DOI:10.11918/202012030

# 基于正则化约束总体最小二乘的 TDOA/FDOA 无源定位方法

国 强,李文韬

(哈尔滨工程大学 信息与通信工程学院,哈尔滨 150001)

**摘 要:** 目前在基于到达时间差(TDOA)和到达频率差(FDOA)的多站无源定位模型中,噪声的干扰、接收站和目标位置的不合理分布以及接收站的个数均会对定位模型中的系数矩阵造成影响,因此在实际的求解过程中系数矩阵可能会出现病态的问题,这在很大程度上会对定位结果产生影响。为了进一步在系数矩阵出现病态的情况下确保定位精度,提出了一种基于正则化约束总体最小二乘(RCTLS)的闭式解析法。该方法分为两步,第一步针对 TDOA/FDOA 定位问题建立基于 RCTLS 思想的定位模型,同时基于最小化均方误差的准则求解正则化参数,之后通过数学推导给出该模型的闭式解析解;第二步是利用约束条件建立关于第一步估计误差的方程并进行求解,最后利用求得的解对第一步的估计结果进行修正。仿真结果表明:本文方法通过牺牲了无偏性取得了低于两步加权最小二乘法(TSWLS)和约束总体最小二乘法(CTLS)的均方根误差(RMSE),而且在系数矩阵出现病态的情况下,其定位性能较 TSWLS 方法和 CTLS 方法也更为稳定。

**关键词:** 无源定位;到达时间差;到达频率差;正则化约束最小二乘;均方根误差

**中图分类号:** V247;TN97 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2022)05-0081-07

# Passive TDOA/FDOA location based on regularized constrained total least squares

GUO Qiang, LI Wentao

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The interference of noise, the unreasonable distribution of receivers and target, and the number of receivers all affect the coefficient matrix in the multi-station passive positioning model based on time difference of arrival (TDOA) and frequency difference of arrival (FDOA). Therefore, the coefficient matrix may be ill-conditioned in the actual solution process, which will affect the positioning accuracy to a large extent. A closed-form analytical method based on regularized constrained total least squares (RCTLS) was proposed to further improve the positioning accuracy when the coefficient matrix was ill-conditioned. The method was divided into two steps. In the first step, the positioning model based on RCTLS method was established to solve the positioning problem using TDOA and FDOA, and the regularization parameter was solved based on the criterion of minimizing mean square error. Then, the closed-form analytical solution of the model could be obtained by mathematical operation. The second step was to establish the equation of the estimation error obtained from the first step utilizing the constraint conditions, which was then solved. Finally, the obtained solution was used to modify the estimation results of the first step. Simulation results show that the root mean square error (RMSE) of the proposed method was lower than those of two-stage weighted least squares (TSWLS) and constrained total least squares (CTLS) methods through sacrificing unbiasedness, and the positioning performance was more stable than those of TSWLS and CTLS methods in the case of ill-conditioned coefficient matrix.

**Keywords:** passive location; time difference of arrival (TDOA); frequency difference of arrival (FDOA); regularized constrained least squares; root mean square error (RMSE)

目前多站无源定位技术已广泛应用于各种军民领域[1-3],如传感器网络[4]、雷达[5]、导航[6]等。多站无源定位技术可以利用的观测量主要包括到达角(angle of arrival,AOA)、到达时间差(time difference of arrival,TDOA)、到达频率差(frequency difference of arrival,FDOA)等。而联合不同测量参数的定位体制可以融合不同参数的优势,在一定程度上提高定位精度。本文基于 TDOA 和 FDOA 的联合定位问题进行研究。

文献[7]基于 TDOA/FDOA 的定位问题进行了研究,并提出了经典的两步加权最小二乘法(two-stage weighted least squares,TSWLS),在噪声较低的情况下,该算法可以达到克拉美罗下限(Cramer-Rao

**收稿日期:** 2020-12-09
**作者简介:** 国 强(1972—),男,博士生导师
**通信作者:** 国 强,guoqiang@hrben.edu.cn

lower bound, CRLB)。文献[8]将基于 TDOA/FDOA 的定位问题转换为约束加权最小二乘(constrained weighted least squares, CWLS)问题并利用拉格朗日乘子技术和牛顿法进行求解。文献[9-10]指出基于 WLS 的定位模型并未考虑到观测矩阵和数据向量中的噪声有着相关性和不同的方差,因此将约束总体最小二乘(constrained total least squares, CTLS)的思想应用于 TDOA/FDOA 定位问题中,其定位效果要优于文献[7-8]中基于 WLS 模型的定位方法。

但由于噪声的干扰、接收站和目标位置的分布以及接收站个数对系数矩阵的影响,以上这些基于 WLS、TLS 模型的方法中的系数矩阵在实际应用中可能会出现病态的问题。而且文献[11]从数值分析的角度指出,CTLS 方法的求解过程实际上是一个降正则化的过程,会使得系数矩阵出现更为严重的病态。而正则化方法是解决此类病态问题的有效方法[12]。文献[13]在 CTLS 模型的基础上提出了一种正则化约束总体最小二乘方法(regularized constrained total least squares, RCTLS),并将该方法用于处理图像恢复中的病态问题。文献[14]对 RCTLS 算法进行了扰动分析,从理论上证明 RCTLS 算法通过合理地选取正则化参数可以降低 CTLS 算法的均方根误差。文献[15]将 RCTLS 的思想应用于基于 DOA 和 TDOA 的单站无源定位中,并且证明了 RCTLS 方法的定位精度和鲁棒性要优于 CTLS 方法,但文献[15]中提出的这种基于 RCTLS 思想的方法是一种迭代法,而且也无需考虑目标函数的约束条件。

针对 TDOA/FDOA 无源定位问题中的系数矩阵病态问题,本文基于 RCTLS 的思想提出了两步正则化约束最小二乘方法(two-stage regularized constrained total least squares, TRCTLS),这种方法在 CTLS 模型的基础上引入了正则化参数,通过合理地选取正则化参数来提高定位的均方根误差并抑制系数矩阵的病态性,而且不同于文献[9-10]中的迭代类方法,TRCTLS 方法是一种闭式的解析法。仿真实验结果表明所提方法通过合理选择正则化参数可以在 CTLS 方法的基础上进一步降低算法的均方根误差,同时在系数矩阵出现病态时的定位性能也更加稳定。

## 1 定位模型

假设在三维空间中利用 $M$ 个接收站对移动的目标辐射源进行定位,目标辐射源的位置和速度分别为$\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$、$\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}=[\dot{x},\dot{y},\dot{z}]^{\mathrm{T}}$,第 $i$ 个接收站的位置和速度分别为$\boldsymbol{s}_i=[x_i,y_i,z_i]^{\mathrm{T}}$、$\dot{\boldsymbol{s}}_i=[\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i]^{\mathrm{T}}$($i=2,3,\cdots,M$)。则接收站与目标辐射源之间的真实距离可表示为

$$r_i^{\mathrm{o}}=\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i\|=\sqrt{(\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i)} \tag{1}$$

选取其中任意一个接收站为主站,编号为 1,其余为辅站,则主站与各辅站之间的真实距离差为

$$r_{i1}^{\mathrm{o}}=r_i^{\mathrm{o}}-r_1^{\mathrm{o}} \tag{2}$$

式中:$r_{i1}^{\mathrm{o}}$由真实的 TDOA 数据计算得到,其向量形式可记为$\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}=[r_{21}^{\mathrm{o}},r_{31}^{\mathrm{o}},\cdots,r_{M1}^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$,联合式(1)和式(2)可得基于 TDOA 的定位方程:

$$r_{i1}^{\mathrm{o}2}+2r_{i1}^{\mathrm{o}}r_1^{\mathrm{o}}=\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1-2(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}} \tag{3}$$

对式(1)进行求导可得接收站与目标辐射源之间真实距离变化率的定义式:

$$\dot{r}_i^{\mathrm{o}}=\frac{(\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i)}{r_i^{\mathrm{o}}} \tag{4}$$

对式(3)进行求时间导数可得基于 FDOA 的定位方程:

$$\begin{aligned}2(\dot{r}_{i1}^{\mathrm{o}}r_{i1}^{\mathrm{o}}+\dot{r}_{i1}^{\mathrm{o}}r_1^{\mathrm{o}}+r_{i1}^{\mathrm{o}}\dot{r}_1^{\mathrm{o}})=&2(\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_i-\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1)-\\&(\dot{\boldsymbol{s}}_i-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}\end{aligned} \tag{5}$$

式中$\dot{r}_{i1}^{\mathrm{o}}$是由真实的 FDOA 信息推导出的真实距离差变化率,其向量形式可记为$\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{o}}=[\dot{r}_{21}^{\mathrm{o}},\dot{r}_{31}^{\mathrm{o}},\cdots,\dot{r}_{M1}^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$。假设利用实际测量得到的 TDOA 和 FDOA 数据所得的距离差向量和距离差变化率向量分别为$\boldsymbol{r}=[r_{21},r_{31},\cdots,r_{M1}]^{\mathrm{T}}$和$\dot{\boldsymbol{r}}=[\dot{r}_{21},\dot{r}_{31},\cdots,\dot{r}_{M1}]^{\mathrm{T}}$,可将其描述为真实值与噪声值相加的形式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}+\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}+c\Delta\boldsymbol{t}\\\dot{\boldsymbol{r}}&=\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{o}}+\Delta\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{o}}+c\Delta\dot{\boldsymbol{t}}\end{aligned} \tag{6}$$

式中:TDOA 测量数据和 FDOA 测量数据中所包含的测量噪声分别为$\Delta\boldsymbol{r}=[\Delta r_{21},\Delta r_{31},\cdots,\Delta r_{M1}]^{\mathrm{T}}$以及$\Delta\dot{\boldsymbol{r}}=[\Delta\dot{r}_{21},\Delta\dot{r}_{31},\cdots,\Delta\dot{r}_{M1}]^{\mathrm{T}}$。假设它们服从均值为零的高斯分布,则其协方差矩阵为

$$E([\Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}},\Delta\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}[\Delta r^{\mathrm{T}},\Delta\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}])=\boldsymbol{Q}^2 \tag{7}$$

将包含噪声的 TDOA 测量值$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}+\Delta\boldsymbol{r}$和 FDOA 测量值$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{o}}+\Delta\dot{\boldsymbol{r}}$代入式(3)和式(5)中并忽略二阶误差项,可以得到:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{t}}=r_{i1}^2+\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_i+2r_{i1}r_1^{\mathrm{o}}+2(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{f}}=&2(\dot{r}_{i1}r_{i1}+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1-\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_i)+2\dot{r}_{i1}r_1^{\mathrm{o}}+2r_{i1}\dot{r}_1^{\mathrm{o}}+\\&2(\dot{\boldsymbol{s}}_i-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}+2(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}\end{aligned} \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{r}$,为 TDOA 方程的误差项;$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{f}}=\dot{\boldsymbol{B}}\Delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{B}\Delta\dot{\boldsymbol{r}}$,为 FDOA 方程的误差项;$\boldsymbol{B}=2\mathrm{diag}\{r_2^{\mathrm{o}},r_3^{\mathrm{o}},\cdots,r_M^{\mathrm{o}}\}$、$\dot{\boldsymbol{B}}=2\mathrm{diag}\{\dot{r}_2^{\mathrm{o}},\dot{r}_3^{\mathrm{o}},\cdots,\dot{r}_M^{\mathrm{o}}\}$。

## 2 基于 RCTLS 的定位方法

构造辅助变量$\boldsymbol{\theta}_1=\{\boldsymbol{u}^{\mathrm{oT}},\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{oT}},r_1^{\mathrm{o}},\dot{r}_1^{\mathrm{o}}\}^{\mathrm{T}}$,本文提出的 TRCTLS 方法是在 CTLS 方法的基础上引入了正

则化参数，因此首先根据 CTLS 模型将式(8)和式(9)表示为

$$(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b} \tag{10}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}=-2\begin{bmatrix}(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & r_{21} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & r_{M1} & 0\\ (\dot{\boldsymbol{s}}_2-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}} & \dot{r}_{21} & r_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\dot{\boldsymbol{s}}_M-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}} & \dot{r}_{M1} & r_{M1}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}r_{21}^2-\boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1\\ \vdots\\ r_{M1}^2-\boldsymbol{s}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_M+\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1\\ 2(\dot{r}_{21}r_{21}-\dot{\boldsymbol{s}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_2+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1)\\ \vdots\\ 2(\dot{r}_{M1}r_{M1}-\dot{\boldsymbol{s}}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_M+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1)\end{bmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}=-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_{(M-1)\times 2N} & \Delta\boldsymbol{r} & \boldsymbol{0}_{M-1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O}_{(M-1)\times 2N} & \Delta\dot{\boldsymbol{r}} & \Delta\boldsymbol{r}\end{bmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{b}=2\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}\odot\Delta\boldsymbol{r}\\ \dot{\boldsymbol{r}}\odot\Delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\odot\Delta\dot{\boldsymbol{r}}\end{bmatrix} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{O}_{(M-1)\times 2N}$为$(M-1)\times 2N$的零矩阵，$\boldsymbol{0}$为$3\times 1$的零向量。从式中可以看出，接收站和目标位置的不合理分布、噪声的干扰均可能会导致矩阵$\boldsymbol{A}$出现病态，比如当接收站的坐标在$x$轴上比较接近时，那么此时矩阵$\boldsymbol{A}$的条件数会明显增加，矩阵将出现病态，从而导致定位结果对噪声的敏感性增加。而引入正则化参数是一种有效抑制矩阵病态问题的手段。令噪声矩阵$\boldsymbol{n}=[\Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}},\Delta\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，可以看出$\Delta\boldsymbol{A}$和$\Delta\boldsymbol{b}$中的噪声是具有相关性的，可以将矩阵$\Delta\boldsymbol{A}$和$\Delta\boldsymbol{b}$表示为

$$\Delta\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{n},\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{n},\cdots,\boldsymbol{F}_l\boldsymbol{n}]$$
$$\Delta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{F}_{l+1}\boldsymbol{n} \tag{12}$$

式中$l$为矩阵$\Delta\boldsymbol{A}$的列数，$l=1,2,\cdots,8$；$\boldsymbol{F}_1$到$\boldsymbol{F}_9$的值可以表示为

$$\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{O}_{2(M-1)\times 2(M-1)},i=1,2,\cdots,6$$
$$\boldsymbol{F}_7=-2\times\boldsymbol{I}_{2(M-1)\times 2(M-1)}$$
$$\boldsymbol{F}_8=-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_{(M-1)\times(M-1)} & \boldsymbol{O}_{(M-1)\times(M-1)}\\ \boldsymbol{I}_{(M-1)\times(M-1)} & \boldsymbol{O}_{(M-1)\times(M-1)}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{F}_9=2\begin{bmatrix}\sum_{11} & \boldsymbol{O}_{(M-1)\times(M-1)}\\ \sum_{21} & \sum_{22}\end{bmatrix} \tag{13}$$

式中：$\sum_{11}=\sum_{22}=\mathrm{diag}(r_{21},r_{31},\cdots,r_{M1})$、$\sum_{21}=\mathrm{diag}(\dot{r}_{21},\dot{r}_{31},\cdots,\dot{r}_{M1})$。

考虑到$\boldsymbol{n}$中各项误差具有相关性且有着不同的方差，对其进行白化处理。令$\boldsymbol{Q}=E[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}]$，对$\boldsymbol{Q}$做 Cholesky 分解可得$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{n}$的白化向量为$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{n}$，同时可得到$\Delta\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{\sigma},\cdots,\boldsymbol{G}_l\boldsymbol{\sigma}]$、$\Delta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{F}_{l+1}\boldsymbol{n}$，其中$\boldsymbol{G}_i=\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{P}$，对式(10)进行数学变换可得：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{\sigma} \tag{14}$$

式中$\boldsymbol{W}_{\theta_1}=-(\sum_{i=1}^{l}\theta_{1_i}\boldsymbol{G}_i-\boldsymbol{G}_{l+1})$，则基于 RCTLS 的 TDOA/FDOA 定位问题可表述为

$$\min(\|\boldsymbol{\sigma}\|^2+\lambda_1\|\boldsymbol{\theta}_1\|^2)$$
$$\text{s.t. }\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{\sigma} \tag{15}$$

经过简单的数学运算，式(15)可转换为如下函数的求极小值问题：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}_1)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{b})+\lambda_1\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_1 \tag{16}$$

对上式进行求导可得：

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\Lambda})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{b})+\lambda_1\boldsymbol{\theta}_1=0 \tag{17}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Lambda}=-[\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{b}),\cdots,\boldsymbol{G}_l\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{b})] \tag{18}$$

对式(18)进行求解，可得方程的 RCTLS 解：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1=((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\Lambda})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\Lambda})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{b} \tag{19}$$

式(19)中所得的解并未考虑约束条件，因此 TRCTLS 算法的第二步是利用约束条件重新构造一组方程以完成对第一步估计值的修正。假设从第一步得到的目标估计位置和速度分别为$\boldsymbol{u}_1$和$\dot{\boldsymbol{u}}_1$，则第一步的估计误差为$\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}$、$\Delta\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}$，令$\boldsymbol{\theta}_2=\{\Delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}},\Delta\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$。将第一步中辅助变量的真实值$r_1^{\mathrm{o}}$和$\dot{r}_1^{\mathrm{o}}$在$\boldsymbol{u}_1$和$\dot{\boldsymbol{u}}_1$处进行一阶泰勒展开可得：

$$r_1^{\mathrm{o}}\approx\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{s}_1\|^2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{u}$$
$$\dot{r}_1^{\mathrm{o}}\approx(\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{s}_1)/\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{s}_1\|^2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\Delta\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{u} \tag{20}$$

假设第一步得到的辅助变量估计值为$r_1$和$\dot{r}_1$，则$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的表达式为

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{s}_1)/r_1$$
$$\boldsymbol{\beta}=[r_1(\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{s}}_1)-\dot{r}_1(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{s}_1)]/r_1^2 \tag{21}$$

将$\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}$、$\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}$以及式(20)代入式(10)可得：

$$(\boldsymbol{M}+\Delta\boldsymbol{M})\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{N}+\Delta\boldsymbol{N} \tag{22}$$

其中：

$$\boldsymbol{M}=2\begin{bmatrix}(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1+r_{21}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots\\ (\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1+r_{M1}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ (\dot{\boldsymbol{s}}_2-\dot{\boldsymbol{s}}_1+\dot{r}_{21}\boldsymbol{\alpha}+r_{21}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1+r_{21}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots\\ (\dot{\boldsymbol{s}}_M-\dot{\boldsymbol{s}}_1+\dot{r}_{M1}\boldsymbol{\alpha}+r_{M1}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1+r_{M1}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}r_{21}^2-\boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1+2\,r_{21}r_1+\\ 2\,(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1\\ \vdots\\ r_{M1}^2-\boldsymbol{s}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_M+\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1+2\,r_{M1}r_1+\\ 2\,(\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1\\ 2(\dot{r}_{21}r_{21}-\dot{\boldsymbol{s}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_2+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1)+2\,(\dot{\boldsymbol{s}}_2-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1+\\ 2\,(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{u}}_1+2\,\dot{r}_{21}r_1+2\,r_{21}\dot{r}_1\\ \vdots\\ 2(\dot{r}_{M1}r_{21}-\dot{\boldsymbol{s}}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_M+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1)+2\,(\dot{\boldsymbol{s}}_M-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1+\\ 2\,(\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{u}}_1+2\,\dot{r}_{M1}r_1+2\,r_{M1}\dot{r}_1\end{bmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{M}=2\begin{bmatrix}\Delta r_{21}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots\\ \Delta r_{M1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \Delta\dot{r}_{21}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\Delta r_{21}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & \Delta r_{21}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots\\ \Delta\dot{r}_{M1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\Delta r_{M1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & \Delta r_{M1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}2\,r_{21}\Delta r_{21}+2\Delta r_{21}r_1\\ \vdots\\ 2\,r_{M1}\Delta r_{M1}+2\Delta r_{M1}r_1\\ 2\,\dot{r}_{21}\Delta r_{21}+2\Delta\dot{r}_{21}r_{21}+2\Delta\dot{r}_{21}r_1+2\Delta r_{21}\dot{r}_1\\ \vdots\\ 2\,\dot{r}_{M1}\Delta r_{M1}+2\Delta\dot{r}_{M1}r_{M1}+2\Delta\dot{r}_{M1}r_1+2\Delta r_{M1}\dot{r}_1\end{bmatrix} \tag{23}$$

式中的 $\Delta\boldsymbol{M}$ 和 $\Delta\boldsymbol{N}$ 可分别表示为

$$\Delta\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{n},\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{n},\cdots,\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{n}]$$
$$\Delta\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}_{k+1}\boldsymbol{n} \tag{24}$$

式中 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_k(k=6)$ 的具体表达式略，对 $\boldsymbol{n}$ 进行白化处理后可得：

$$\Delta\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{n},\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{n},\cdots,\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{n}]$$
$$\Delta\boldsymbol{N}=\boldsymbol{V}_{k+1}\boldsymbol{n} \tag{25}$$

式中 $\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{P}$，则式(22)可转换为以下形式：

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}_2-\boldsymbol{N}=\boldsymbol{W}_{\theta_2}\boldsymbol{\sigma} \tag{26}$$

式中 $\boldsymbol{W}_{\theta_2}=-\left(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\theta}_{2_i}\boldsymbol{V}_i-\boldsymbol{V}_{k+1}\right)$，利用第一步的 RCTLS 算法对式(26)进行求解可得：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2=((\boldsymbol{M}-\boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_2}\boldsymbol{W}_{\theta_2}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{M}+\lambda_2\boldsymbol{I})^{-1}$$
$$(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_2}\boldsymbol{W}_{\theta_2}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{N} \tag{27}$$

式中

$$\boldsymbol{Z}=-[\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}_{\theta_2}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_2-\boldsymbol{b}),\cdots,\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{W}_{\theta_2}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_2-\boldsymbol{b})] \tag{28}$$

则目标位置和速度的最终估计值分别为 $\hat{\boldsymbol{u}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_2(1:3)$、$\hat{\dot{\boldsymbol{u}}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(4:6)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_2(4:6)$。

## 3 正则化参数的选择

正则化参数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的选取对 TRCTLS 方法的性能有着很大的影响，本节主要从最小化均方误差的原则对正则化参数进行求解。假设第一步的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ 与真实值 $\boldsymbol{\theta}_1$ 之间的关系为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1=\boldsymbol{\theta}_1+\Delta\boldsymbol{\theta}_1 \tag{29}$$

将式(29)代入式(17)中可得：

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\Lambda})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{\sigma})+\lambda_1(\boldsymbol{\theta}_1+\Delta\boldsymbol{\theta}_1)=0 \tag{30}$$

令 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\Lambda})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{\mathrm{T}})^{-1}$，由式(30)可得：

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_1=-(\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{8\times8})^{-1}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{\sigma}+\lambda_1\boldsymbol{\theta}_1) \tag{31}$$

令 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{J}$，可得：

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\theta}_1=(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}+\lambda_1\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}})[(\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{8\times8})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{8\times8})^{-1}(\boldsymbol{J}+\lambda_1\boldsymbol{\theta}_1) \tag{32}$$

通常矩阵 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，存在一个标准正交矩阵使得 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}$ 对角化：

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{u_1,u_2,\cdots,u_8\}\boldsymbol{P} \tag{33}$$

对 $[(\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{8\times8})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{8\times8})^{-1}$ 进行特征值分解可得：

$$[(\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{8\times8})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{8\times8})^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P} \tag{34}$$

式中：$\boldsymbol{P}$ 是 8 × 8 的标准正交矩阵，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{(u_1+\lambda_1)^{-2},(u_2+\lambda_1)^{-2},\cdots,(u_8+\lambda_1)^{-2}\}$。考虑到 $E(\boldsymbol{J})=0$，对式(32)取期望可得第一步估计值的均方误差为

$$E[\Delta\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\theta}_1]=E[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}]+\lambda_1^2\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\theta}_1 \tag{35}$$

令 $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\theta}_1$，则 $\boldsymbol{C}_1$、$\boldsymbol{C}_2$ 为两个列向量。设 $\boldsymbol{C}_1=[c_{11},c_{12},\cdots,c_{18}]^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{C}_2=[c_{21},c_{22},\cdots,c_{28}]^{\mathrm{T}}$，则 $E[\Delta\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\theta}_1]$ 可表示为

$$E[\Delta\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\theta}_1]=E[\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}_1]+\lambda_1^2\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}_1=\sum_{i=1}^{8}\frac{E[c_{1i}^2]}{(\boldsymbol{u}_i+\lambda_1)^2}+\lambda_1^2\sum_{i=1}^{8}\frac{c_{2i}^2}{(u_i+\lambda_1)^2} \tag{36}$$

可以看出第一步中利用 RCTLS 算法求得的结果的均方误差是关于 $\lambda_1$ 的函数，为了求得均方误差最小值对应的 $\lambda_1$ 值，对式(36)求导可得：

$$\frac{\partial E[\Delta\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\theta}_1]}{\partial\lambda_1}=2\sum_{i=1}^{8}\frac{\lambda_1^2c_{2i}^2u_i-E[c_{1i}^2]}{(u_i+\lambda_1)^3} \tag{37}$$

对式(37)进行分析可得，当 $0<\lambda_1<\min\left\{\frac{E[c_{1i}^2]}{c_{2i}^2u_i}\right\}$时，$\frac{\delta E[\Delta\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\theta}_1]}{\delta\lambda_1}<0$，此时估计均方误差随$\lambda_1$单调递减；当$\lambda_1>\max\left\{\frac{E[c_{1i}^2]}{c_{2i}^2u_i}\right\}$时，$\frac{\delta E[\Delta\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\theta}_1]}{\delta\lambda_1}>0$，此时估计均方误差随$\lambda_1$单调递增。因此可以得到$\lambda_1$最小值的取值区间为$\left[\min\left\{\frac{E[c_{1i}^2]}{c_{2i}^2u_i}\right\},\max\left\{\frac{E[c_{1i}^2]}{c_{2i}^2u_i}\right\}\right]$，则本文中取极小值为

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\min\left\{\frac{E[c_{1i}^2]}{c_{2i}^2u_i}\right\}+\max\left\{\frac{E[c_{1i}^2]}{c_{2i}^2u_i}\right\}\right) \tag{38}$$

同理可得$\lambda_2$的取值。注意到第一步中$\boldsymbol{\Lambda}$和$\boldsymbol{W}_{\theta_1}$均含有未知数$\boldsymbol{\theta}_1$，因此在实际的计算中先假设$\boldsymbol{\Lambda}=0$、$(\boldsymbol{W}_{\theta_1}\boldsymbol{W}_{\theta_1}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{Q}$，得到初始的值后再将其代入$\boldsymbol{\Lambda}$和$\boldsymbol{W}_{\theta_1}$的表达式中，之后利用新的$\boldsymbol{\Lambda}$和$\boldsymbol{W}_{\theta_1}$重新计算$\boldsymbol{\theta}_1$，如此循环 3 ~ 5 次即可得到最终的$\boldsymbol{\theta}_1$；同样地，在第二步对$\boldsymbol{\theta}_2$进行求解时也需要进行类似的处理。

## 4　实验仿真及分析

本节通过仿真实验对提出的 TRCTLS 方法进行性能分析。蒙特卡洛循环次数设置为10 000次，分别为 TDOA 和 FDOA 测量值添加均值为零的高斯白噪声，其中 TDOA 的噪声的方差为$\delta_d^2$，协方差矩阵为$\boldsymbol{R}_{\mathrm{t}}=\delta_d^2\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$为对角线上元素为 1、其余元素为 0.5 的矩阵。FDOA 的噪声方差为 TDOA 噪声方差的 0.1 倍，其协方差矩阵为$\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}}=0.1\,\delta_d^2\boldsymbol{R}$。计算机仿真条件为 Windows10，64 位操作系统，Core i5-9300H 处理器，16 GB 内存，MATLAB9.0 版本。利用均方根误差 RMSE 对定位方法进行性能分析，其表达式为

$$R_{\mathrm{MSE}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})=\sqrt{\sum_{i=1}^{L}\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_i-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}\|^2/L} \tag{39}$$

本文的仿真实验在 3 个场景下进行，其中场景 1 和场景 2 中目标辐射源的位置和速度分别为$\boldsymbol{u}=[285,325,275]^{\mathrm{T}}$ m 和$\dot{\boldsymbol{u}}=[-20,15,40]^{\mathrm{T}}$ m/s，场景 3 中目标辐射源的位置和速度分别为$\boldsymbol{u}=[50,320,110]^{\mathrm{T}}$ m 和$\dot{\boldsymbol{u}}=[-20,15,40]^{\mathrm{T}}$ m/s。每个场景均设置 5 个接收站，场景 1 和场景 3 中接收站的位置坐标分别见表 1；场景 2 中接收站的位置坐标见表 2；3 个场景中的接收站与目标的位置在三维空间中的分布见图 1。可以看出，3 个场景中的接收站的整体分布基本接近，只有场景 2 中有 2 个接收站在 $z$ 轴上的坐标与场景 1 和场景 3 中略有不同，这种设置可减少不同场景中接收站的分布方式对定位精度的影响。场景 1 为系数矩阵并未出现病态时的定位场景，而场景 2 中则因为接收站在 $z$ 轴上坐标接近而导致系数矩阵出现病态，场景 3 则是因为目标辐射源与 5 个接收站之间的距离接近而导致系数矩阵出现病态。在 3 个场景中均使用式(39)的均方根误差对定位方法进行性能分析，使用 CRLB 作为衡量估计精度的标准，同时使用文献[7]中的 TSWLS 方法、文献[9]中的 CTLS 方法作为对比方法。

**表 1　场景 1 和场景 3 中的接收站位置分布**

Tab. 1　Location distribution of receivers in scenario 1 and scenario 3

| 接收站编号 | $x_i$/m | $y_i$/m | $z_i$/m | $\dot{x}_i$/(m·s$^{-1}$) | $\dot{y}_i$/(m·s$^{-1}$) | $\dot{z}_i$/(m·s$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 300 | 100 | 120 | 30 | −20 | 20 |
| 2 | 400 | 150 | 100 | −30 | 10 | 20 |
| 3 | 300 | 500 | 120 | 10 | −20 | 10 |
| 4 | 350 | 200 | 100 | 10 | 20 | 3 |
| 5 | −150 | −200 | 100 | 20 | −10 | 10 |

**表 2　场景 2 中的接收站位置分布**

Tab. 2　Location distribution of receivers in scenario 2

| 接收站编号 | $x_i$/m | $y_i$/m | $z_i$/m | $\dot{x}_i$/(m·s$^{-1}$) | $\dot{y}_i$/(m·s$^{-1}$) | $\dot{z}_i$/(m·s$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 300 | 100 | 105 | 30 | −20 | 20 |
| 2 | 400 | 150 | 100 | −30 | 10 | 20 |
| 3 | 300 | 500 | 105 | 10 | −20 | 10 |
| 4 | 350 | 200 | 100 | 10 | 20 | 3 |
| 5 | −150 | −200 | 100 | 20 | −10 | 10 |

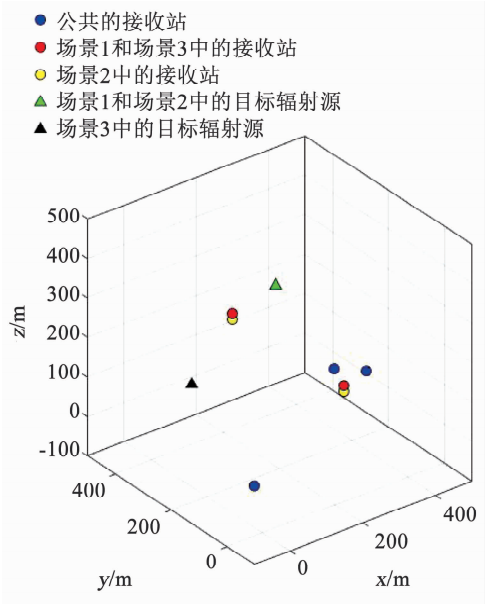
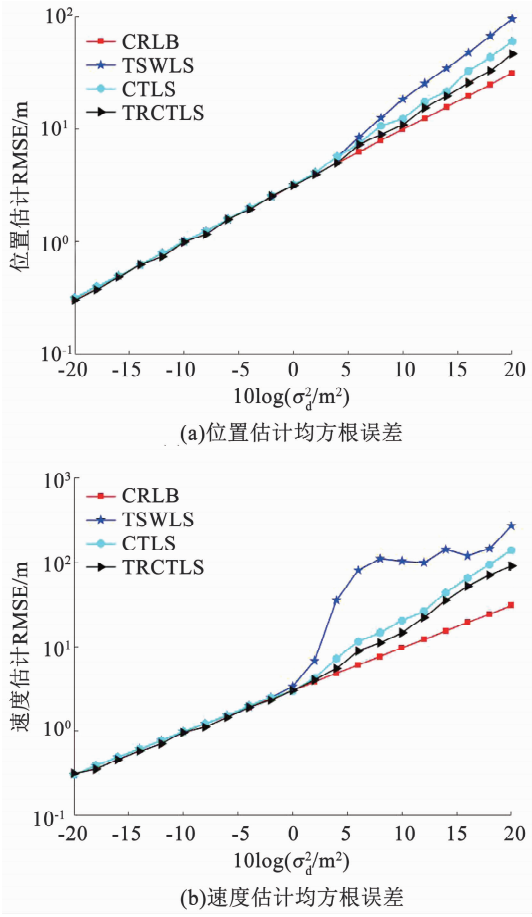



**图 1　3 个场景中接收站以及目标位置分布**

Fig. 1　Distribution of receivers and target in three scenarios

图 2 是场景 1 中 3 种方法的定位情况，图 2(a)和(b)中横坐标为噪声功率，纵坐标分别为位置估计和速度估计的均方根误差。可以看出 3 种方法在噪声较低时均可达到 CRLB，文献[16]表明了有偏估计可以通过牺牲算法的偏差来使得算法的均方根误差低于 CRLB，而本文提出的基于 RCTLS 思想的方法是一种有偏估计，通过牺牲了无偏性来换取更低的均方根误差，因此在噪声较低的情况下本文提出的 TRCTLS 方法的定位均方根误差要略低于

CRLB。而随着噪声的增加,3 种算法均开始偏离 CRLB,其中 TSWLS 方法受噪声影响较大,偏离 CRLB 的程度也最为明显,CTLS 方法和本文提出的 TRCTLS 方法偏离 CRLB 程度较小,而且 TRCTLS 方法的偏离程度还要小于 CTLS 方法,这表明 TRCTLS 方法通过合理的选取正则化参数进一步提升了基于 CTLS 模型的定位算法的性能。



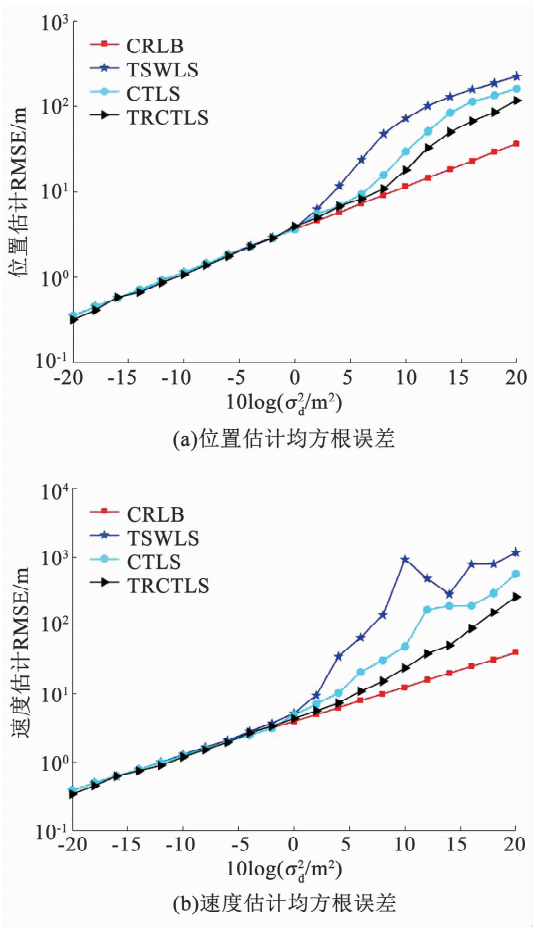

(a)位置估计均方根误差

(b)速度估计均方根误差

**图 2 场景 1 中 3 种方法的定位均方根误差**

Fig. 2 RMSE of three methods in scenario 1

图 3 是场景 2 下 3 种方法的定位情况,由于场景 2 中 5 个接收站在 $z$ 轴上的坐标接近,导致系数矩阵出现病态,此时估计值对噪声的敏感程度要高于场景 1。因此从图 3(a)和(b)中可以看出 3 种方法偏离 CRLB 的程度均要高于在场景 1 中偏离 CRLB 的程度,但相对于 TSWLS 方法和 CTLS 方法,TRCTLS 方法在场景 2 中的表现则更为稳定,这是因为相对于文献[7,9]中的方法,TRCTLS 方法在求解过程中引入了正则项,而引入正则项是解决病态问题的有效方法。TRCTLS 方法通过合理地选取正则化参数来抑制系数矩阵的病态性,进而降低了病态矩阵对定位精度的影响,提升了定位方法在病态情况下的稳定性。可以看出,本文提出的定位方法通过合理地选取正则化参数,不仅在 CTLS 模型的基础上降低了均方根误差,而且在系数矩阵出现病态时的定位误差也要低于 CTLS 方法和 TSWLS 方法,提升了算法在不同定位情况下的稳定性。




(a)位置估计均方根误差

(b)速度估计均方根误差

**图 3 场景 2 中 3 种方法的定位均方根误差**

Fig. 3 RMSE of three methods in scenario 2

图 4 显示了场景 3 下 3 种方法的定位情况,可以看出,由于目标辐射源距离各个接收站的距离接近,因此系数矩阵出现了较为严重的病态问题。TSWLS 方法和 CTLS 方法均在噪声较低的情况下便开始偏离 CRLB。但与场景 2 中不同,TSWLS 方法和 CTLS 方法在噪声较低时偏离 CRLB 的程度比在噪声较高时偏离 CRLB 的程度更为明显,这是因为在噪声较低时,$r_1, r_2, \cdots, r_M$ 的值比较接近,这会造成系数矩阵的病态,而在噪声较高时,因为受到测量误差的影响,导致 $r_1, r_2, \cdots, r_M$ 的值出现了较大的差异,此时系数矩阵的病态性得到了较大的改善。而相较于 TSWLS 方法和 CTLS 方法,本文提出的 TRCTLS 方法在各种测量噪声的情况下均有着更为稳定的定位性能。

最后对 3 种定位算法的计算复杂度和运行时间进行分析。文献[7]中提出的 TSWLS 方法的计算量为 $48M^3 - 48M^2 + 768M + 8\,010$,而文献[12]中的 CTLS 方法为迭代法,单次迭代的计算量与 TSWLS 方法相近,本文提出的 TRCTLS 方法的计算量约为 $56M^3 + 139M^2 + 398M + 1\,230$。在 3 种场景

下的仿真实验中，对 3 种方法的运行时间进行分析，其中 CTLS 方法的迭代次数设置为 5 次，可以得到 TSWLS 方法的平均运行时间为 0.001 7 s，CTLS 方法的平均运行时间约为 0.007 4 s，而 TRCTLS 方法的平均运行时间为 0.002 9 s，可以看出本文提出的 TRCTLS 方法因为具有计算正则化参数以及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 的过程，因此其运行时间要少于 TSWLS 方法，而 CTLS 方法是一种迭代法，需要利用牛顿法迭代求解拉格朗日参数，当迭代次数高于 2 次时，其运行速度要高于本文提出的 TRCTLS 方法。

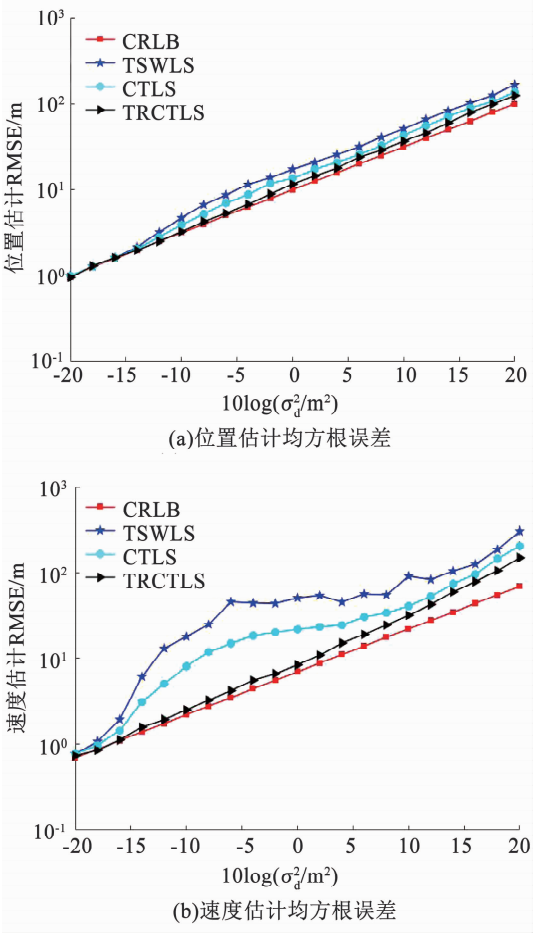



**图 4　场景 3 中 3 种方法的定位均方根误差**

Fig. 4　RMSE of three methods in scenario 3

## 5　结　论

针对基于 TDOA/FDOA 的无源定位问题，本文提出了一种基于 RCTLS 思想的定位方法。该方法分为两步，第一步在 CTLS 模型的基础上引入正则化参数后进行求解，第二步利用约束条件构造出一组关于第一步的估计误差的方程后进行求解，之后利用求解结果对第一步的估计结果进行修正以得到最终的估计值。仿真结果表明，本文方法通过牺牲了无偏性取得了低于 TSWLS 和 CTLS 方法的均方根误差，而且在系数矩阵出现病态的情况下定位性能较 TSWLS 方法和 CTLS 方法也更为稳定。同时本文的算法是一种闭式解析方法，因此在运行速度上也要优于 CTLS 方法。

## 参考文献

[1] HOK C, CHAN Y T. Geolocation of a known altitude object from TDOA and FDOA measurements [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(3): 770

[2] QU X, XIE L, TAN W. Iterative constrained weighted least squares source localization using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017: 3990

[3] WEINSTEIN E. Optimal source localization and tracking from passive array measurements[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, 1982, 30(1): 69

[4] GUSTAFSSON T, RAO B D, TRIVEDI M. Source localization in reverberant environments: Modeling and statistical analysis[J]. IEEE Transactions on Speech & Audio Processing, 2003, 11(6): 791

[5] 王伟，王咸鹏，马跃华. 基于多级维纳滤波的双基地 MIMO 雷达多目标定位方法[J]. 航空学报，2012，33(7)：1281
WANG Wei, WANG Xianpeng, MA Yuehua. Multi-target localization based on multi-stage wiener filter for bistatic MIMO radar [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(7): 1281

[6] STOICA P, LI Jian. Lecture notes-source localization from range-difference measurements [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2006, 23(6): 63

[7] HO K C, XU W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9): 2453

[8] GUO Fucheng, HO K C. A quadratic constraint solution method for TDOA and FDOA localization[C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Prague: IEEE, 2011: 2588

[9] YU H, HUANG G, GAO J. Constrained total least-squares localisation algorithm using time difference of arrival and frequency difference of arrival measurements with sensor location uncertainties [J]. IET Radar Sonar & Navigation, 2012, 6(9): 891

[10] 曲付勇，孟祥伟. 基于约束总体最小二乘方法的到达时差到达频差无源定位算法[J]. 电子与信息学报，2014，36(5)：1075
QU Fuyong, MENG Xiangwei. Source localization using TDOA and FDOA based on constrained total least squares algorithm[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2014, 36(5): 1075

[11] GOLUB G H, VAN LOAN C F. An analysis of the total least squares problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17(6): 883

[12] GOLUB G H, HANSEN P C, O'LEARY. Tikhonov regularization and total least squares[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Application, 1999, 21(1): 185

[13] MESAROVIC V Z, GALATSANOS N P, KATSAGGELOS A K. Regularized constrained total least squares image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995

[14] FAN X, YOUNAN N H, TAYLOR C D. A perturbation analysis of the regularized constrained total least squares [J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems II Analog & Digital Signal Processing, 1996, 43(2): 140

[15] 赵拥军，赵勇胜，赵闯. 基于正则化约束总体最小二乘的单站 DOA-TDOA 无源定位算法[J]. 电子与信息学报，2016，38(9)：2336
ZHAO Yongjun, ZHAO Yongsheng, ZHAO Chuang. Single-observer passive DOA-TDOA location based on regularized constrained total least squares [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2016, 38(9): 2336

[16] SENGIJPTA S K. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory[J]. Technometrics, 1993, 37(4): 465

（编辑　苗秀芝）