

拉格朗日键合图的欧拉梁的模态分析

薛晓鹏, 樊久铭, 刘 钊, 邹经湘

(哈尔滨工业大学 航天科学与力学系, 哈尔滨 150001, watt0304@126.com)

摘 要: 研究了利用拉格朗日键合图建立梁横向振动数学模型的基本方法. 由于拉格朗日键合图方法中能量转换矩阵对广义坐标的要求, 将梁离散为刚杆-质点-弹簧系统, 定义挠度为广义坐标, 然后分析了多种边界条件下梁横向振动的数学模型. 最后以两端简支梁为例作了仿真计算, 其仿真结果与该模型的理论解以及 ANSYS 的计算结果进行了对比, 验证了梁的离散模型的有效性, 并说明了拉格朗日键合图对梁横向振动进行模态分析相对于别的方法是简便可行的.

关键词: 拉格朗日键合图; 模态分析; 欧拉梁

中图分类号: O326

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)01-0020-04

Modal analysis of Euler beam based on Lagrangian bond graph

XUE Xiao-peng, FAN Jiu-ming, LIU Zhao, ZOU Jing-xiang

(Dept. of Astronautic Science and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China, watt0304@126.com)

Abstract: The basic method to establish a mathematical model of bending vibration of Euler beam using Lagrangian bond graph is studied in this paper. Out of the request for the generalized coordinates from energy transformation matrix in Lagrangian bond graph method, Euler beam will be discretized into a rigid bar-mass-spring model. Only generalized deflection variable is defined. And the mathematical model of bending vibration is deduced under various boundary conditions. Simulation on a beam with both ends simply pivoted is carried out, and the results are compared with the theoretical analysis and the results of finite element method, which proves that the discrete model of the beam is effective and accurate, and modeling by use of Lagrangian bond graph is feasible.

Key words: lagrangian bond graph; modal analysis; euler beam

梁的振动问题一直是力学界研究的重要对象. 目前对这一问题的求解方法主要有: 连续梁微元法, 通过对微元受力分析列写梁横向振动方程, 但是所得方程是四阶偏微分方程, 求解过程比较繁杂, 当所求梁为变截面梁时往往难以得出解析解, 且不易于计算机仿真; 传递矩阵法, 离散方式与本文方法相似, 但是它需要分别求弹性段的场传递矩阵和质点段的点传递矩阵, 再经传递计算方能列出分析振动所需的方程组. 当梁或轴上具有较多简支或铰链时, 传递计算不甚方便. 且难

以很方便地整合到整个系统的动力学模型中; 有限元素法, 根据选取的单元, 定义节点, 计算单元的位移插值函数, 通过几何方程求出应变位移关系, 通过物理方程导出应力位移关系, 再以平衡方程求出单元刚度矩阵, 最后将单元刚度矩阵、单元质量矩阵集成整体的刚度矩阵和质量矩阵, 且在梁的处理过程中需要定义节点挠度和节点截面转角为广义坐标, 计算步骤比较繁琐^[1].

基于能量守恒和信号因果分析的键合图技术建立系统模型方式独特而简便, 适于计算机模拟, 近年来发展极为迅速, 在振动问题中应用也越来越广^[2-6]. 目前已有文献提出了用键合图法处理一维杆的轴向振动问题, 并取得了很好的效果^[5], 本文将采用拉格朗日键合图法解决更为复

收稿日期: 2008-11-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50478030/E080509).

作者简介: 薛晓鹏(1982—), 男, 博士研究生;

邹经湘(1938—), 男, 教授, 博士生导师.

杂的梁的横向振动问题,通过选取合理的梁离散模型,根据其拉格朗日键合图表示可以很容易的列出其动力学方程,得到系统振动的数学模型,该计算过程简便易懂,且易于计算机仿真.

1 拉格朗日键合图方法

具有拉格朗日因果关系的精简拉格朗日键合图如图1所示. 广义坐标取为系统的运动位移向量 $\mathbf{q}_G$, 向量 $\mathbf{q}_C$ 是弹性场位移向量, 向量 $\mathbf{V}_I$ 为惯性场速度向量, $\mathbf{F}_I$ 为在 $\dot{\mathbf{q}}_G$ 上的达朗贝尔力, $\mathbf{F}_C$ 为在 $\dot{\mathbf{q}}_G$ 上的弹性力, $\mathbf{F}_S$ 为在 $\dot{\mathbf{q}}_G$ 上的力输入, $\mathbf{F}_R$ 为在 $\dot{\mathbf{q}}_G$ 上的耗散力. 由该图中部的1结知力 $\mathbf{F}_I, \mathbf{F}_C, \mathbf{F}_R$ 和 $\mathbf{F}_S$ 之和应为零. 亦即

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_S = 0, \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{T}_I^T \mathbf{M} \left(\mathbf{T}_I \dot{\mathbf{q}}_G + \frac{d\mathbf{T}_I}{dt} \dot{\mathbf{q}}_G \right), \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{T}_C^T \mathbf{K} \mathbf{f}(\mathbf{q}_C), \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{T}_R^T \mathbf{R} \mathbf{T}_R \dot{\mathbf{q}}_G, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{T}_S^T \boldsymbol{\phi}_S(t). \quad (5)$$

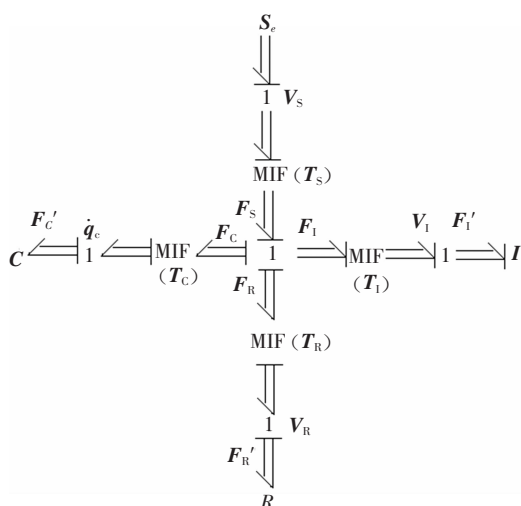


图1 具有拉格朗日因果关系的精简拉格朗日键合图

参考文献[7-9]对拉格朗日键合图的内容作了详细的介绍.

2 梁横向振动的动力学方程推导

按常规方法连续梁被离散的模式,系统的广义坐标为梁的集中质量的挠度 y 和截面转角 θ . 离散单元在拉格朗日键合图方法计算过程中会出现动能时的 dy/dt 和弹性势能时的 $d\theta/dx$, 使速度转换无法统一, 系统方程的建立因此受阻. 而图2所示的梁离散模型恰恰可以解决这个问题, 并且系统的广义坐标仅为集中质量的挠度 u . 它把梁离

散为一种弹簧-质点-刚杆模型^[10], $n+1$ 个长度为 l_i 的无质量刚杆连接 $n+2$ 个质量为 m_i 的质点, 再由 n 个刚度为 k_i 的扭簧连在一起, 于是构成梁的离散模型. 实际上沿着梁分布的质量和刚度被集中在 $n+2$ 个点上. 在本节主要考虑等截面细长梁, 并且离散模型中的无质量刚杆长度均为 L , 质点质量均为 m .

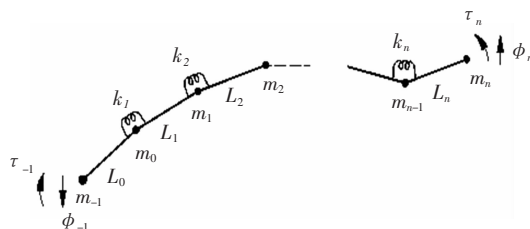


图2 横向振动梁的离散模型

图3画出了梁段某质点 m_r 的受力分析情况, 其中 Q_r 为剪力, M_r 为弯矩, u_r 为某质点的挠度, θ_r 为截面转角.

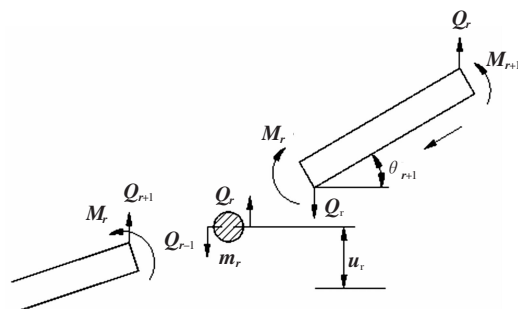


图3 质点 m_r 附近的受力分析

1) 确定关键向量 $\mathbf{q}_G, \mathbf{q}_C, \mathbf{V}_I$

$$\mathbf{q}_G = \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}.$$

向量 $\mathbf{q}_C$ 是转动弹簧的位移向量, 由图2和3可以很容易求得第 r 个转动弹簧的变形. 则有

$$\mathbf{q}_C = \begin{bmatrix} (u_0 - u_{-1})/L + (u_0 - u_1)/L \\ (u_1 - u_0)/L + (u_1 - u_2)/L \\ \vdots \\ (u_{n-2} - u_{n-3})/L + (u_{n-2} - u_{n-1})/L \\ (u_{n-1} - u_{n-2})/L + (u_{n-1} - u_n)/L \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_I = [v_{-1} \ v_0 \ \cdots \ v_{n-1} \ v_n]^T.$$

从图2和动力学知识可以很容易地得出系统的参数矩阵 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{K}$.

力输入是

$$\boldsymbol{\phi}_S(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{-1} & \Phi_n \\ \tau_{-1} & \tau_n \end{bmatrix}.$$

2) 计算速度转换矩阵

$$\mathbf{V}_1 = \frac{d\mathbf{q}_1}{dt} = [\dot{\mathbf{u}}_{-1} \quad \dot{\mathbf{u}}_0 \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{u}}_{n-1} \quad \dot{\mathbf{u}}_n]^T,$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}.$$

相似地,可求得其他速度转换矩阵:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{2 \times (n+2)},$$

$$\mathbf{T}_c = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{n \times (n+2)}.$$

由于在系统中没有耗散元件,所以不需要再计算耗散元件的转换矩阵及相关表达式.

将上述矩阵及由上述矩阵求得的矩阵 $\mathbf{T}_1'$, $\mathbf{T}_c'$, $\mathbf{T}_s'$ 及 $d\mathbf{T}_1/dt$ 代入式(2)~(5),然后再代入(1)式即得所求系统的系统方程.

3) 梁的边界条件分析

(1) 当梁为两端固定时,刚度矩阵不变,质量矩阵 $\mathbf{M}$ 由 $(n+2) \times (n+2)$ 调整为 $n \times n$,运动位移向量也相应变为 $n \times n$.弹性场速度转换矩阵 $\mathbf{T}_c$ 调整为

$$\mathbf{T}_c = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

(2) 当梁为两端简支时,质量矩阵 $\mathbf{M}$ 由 $(n+2) \times (n+2)$ 调整为 $n \times n$,运动位移向量也相应变为 $n \times n$,弹性场速度转换矩阵 $\mathbf{T}_c$ 需要变为

$$\mathbf{T}_c = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

(3) 当梁左右两端有一端固定,一端简支时,质量矩阵由 $(n+2) \times (n+2)$ 调整为 $n \times n$,运动位移向量相应也调整为 $n \times n$,弹性场速度转换矩阵 $\mathbf{T}_c$ 为

$$\mathbf{T}_c = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

(4) 当梁一端固定,一端自由时,质量矩阵 $\mathbf{M}$ 由 $(n+2) \times (n+2)$ 调整为 $(n+1) \times (n+1)$,运动位移向量也相应变为 $(n+1) \times (n+1)$,弹性场速度转换矩阵 $\mathbf{T}_c$ 为

$$\mathbf{T}_c = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{n \times (n+1)}.$$

(5) 当梁左右两端均为自由端时,即为上文所推导的情况.

3 算例

选取文献[11]中简支梁模型,对简支梁进行了离散,如图4所示.

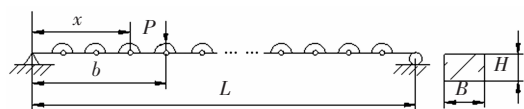


图4 等截面简支梁离散示意图

把梁离散成999个独立质点、999个转动弹簧和1000个无重刚杆构成的多自由度系统模型,有关参数为

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3,$$

$$L = 0.600 \text{ m}, B = 0.0357 \text{ m}, H = 0.0152 \text{ m},$$

$$I = BH^3/12 = 0.0357 \times 0.0152^3/12 =$$

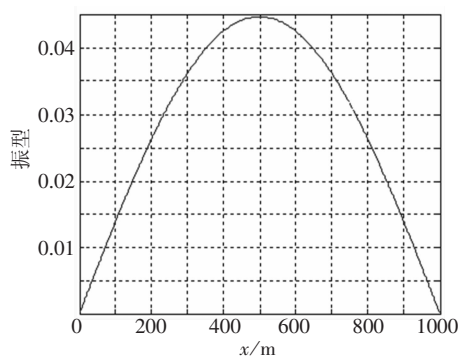
$$1.0448 \times 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$EI = 2.194 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2, m = \rho v = 2.5396 \text{ kg}.$$

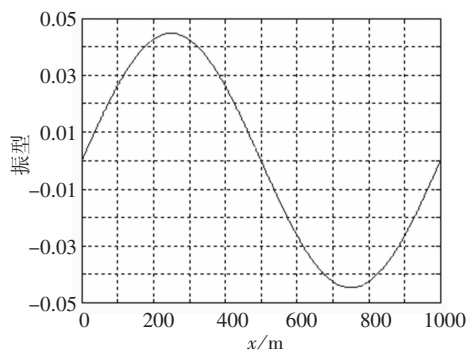
运行自编MATLAB程序可很容易地求得其模态参数.简支梁的固有频率解如表1所示,相对应的振型曲线如图5,并对比了ANSYS对相同单元划分情况的两端简支梁模型的仿真结果和理论解,同时求出了其与理论解的相对误差.

表1 简支梁横向振动固有频率数值解各种方法比较

阶数	横向振动固有频率/Hz			与理论解的 相对误差/%
	本文方法	理论值	有限元	
1	99.291 4	99.341 9	99.318	0.050 8
2	397.164 2	397.367 6	396.960	0.051 2
3	893.615 7	894.077 1	891.980	0.051 6



(a) 第一阶振型曲线



(b) 第二阶振型曲线

图5 两端简支梁横向振动曲线(前两阶)

从表1可以看出拉格朗日键合图方法求得两端简支梁的固有频率解很精确,与理论解的相对误差控制在很小的范围以内,并且在第二、三阶时的固有频率解比ANSYS给出的结果要好,说明该方法在此类模型高阶频率求解上要优于有限元。由结构动力学知识可知,拉格朗日键合图方法仿真的振型曲线是正确的。因此,可以证明拉格朗日键合图对两端简支矩形梁建立的数学模型是准确可行的。

4 结 论

本文提出了利用拉格朗日键合图建立梁横向振动数学模型的基本方法,并给出了各种边界条件下的梁的速度转换矩阵。最后对两端简支条件下的实际模型进行了仿真,将仿真结果与该模型的理论解以及ANSYS的计算结果进行对比,验证了梁的离散模型是有效的及拉格朗日键合图对梁

横向振动建模的可行性和精确性,并说明了拉格朗日键合图法对连续系统建模与常规方法相比更简便规则化,且易于计算机仿真,同时由于键合图是一种适用于多能域系统的动力学建模方法,借助该方法,可以进一步分析多能域耦合复杂多自由度系统动力学问题。

参考文献:

- [1] 商大中. 结构动力分析[M]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005:1-192.
- [2] MARGOLIS D L. A survey of bond graph modeling for interacting lumped and distributed systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 1985, 319(1/2): 125-135.
- [3] SAGIRLI A, BOGOCLU M E, OMURLU V E. Modeling the dynamics and kinematic of a telescopic rotary crane by the bond graph method: Part I [J]. Nonlinear Dynamics, 2003, 33:337-351.
- [4] MCBRIDE R T. System Analysis Through Bond Graph Modeling [D]. Tucson: The University of Arizona, 2005:1-100.
- [5] 王中双. 键合图理论及其在系统动力学中的应用[M]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2000:1-147.
- [6] WANG Ai-lun, ZHONG Jue. A new method of modal analysis—bond graph method [J]. Journal of Vibration Engineering, 2003, 16(4):463-467.
- [7] SUN Jing, SHAO Cheng-xun. Dynamic modelling of complex spacecraft system using Lagrange bond graph [J]. Journal of harbin institute of technology, 2000, 32(2):95-99.
- [8] 张尚才, 罗森伯 R C. 用拉格朗日键图模拟非线性机械系统[J]. 浙江大学学报, 1983 (3): 1-11.
- [9] 张尚才. 非机械系统的拉格朗日键图模型[J]. 浙江大学学报, 1983, 18(1): 69-77.
- [10] GLADWELL G M L. Inverse Problems in Vibration[M]. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986:1-50.
- [11] LI Wei-min, HE Wei, YANG Lin. The theoretical analysis and experimental study on the vibration of simple supported beam[J]. Journal of Guizhou Education Institute: Natural Science, 2007, 18(2): 44-49.

(编辑 张 宏)