

电磁炮发射轨道受指数函数磁压力的变形计算

刘文¹, 李敏¹, 白象忠², 张海军¹

(1. 燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004, liuwen1961@hotmail.com; 2. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 为解决电磁炮发射轨道受力变形的精确计算, 以利于延长导轨的使用寿命并提高发射精度, 将某型电磁炮的发射轨道模拟为移动载荷作用下弹性基础上的简支梁, 采用欧拉梁理论建立梁的力学模型, 推导出受任意指数函数磁压力控制方程的解析解, 改变了长期以来利用均布压力近似代替变力求解问题所造成的误差; 运用 MATLAB 软件对弹性基础的弹性系数、阻尼系数、轨道质量和载荷的出口速度对梁变形的影响进行了数值分析. 结果表明, 弹性基础的弹性系数、移动载荷的出口速度对梁变形的影响比较显著, 阻尼系数、轨道质量的大小对梁变形没有明显的影响. 为求解电磁炮发射轨道受任意函数的磁压力作用时的变形以及推动电磁炮的实用化奠定了理论基础.

关键词: 电磁炮; 发射轨道; 欧拉梁; 指数函数磁压力; 拉格朗日方程; 解析解

中图分类号: TJ399; O343.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2010)08-1336-05

Deformation calculation of electromagnetic Launcher's rail subjected to exponential magnetic pressure

LIU Wen¹, LI Min¹, BAI Xiang-zhong², ZHANG Hai-jun¹

(1. School of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China, liuwen1961@hotmail.com;

2. School of Civil Engineering & Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: In order to accurately calculate of the force - deformation of electromagnetic launcher's rail for the purpose of extending the rail life and improving the firing accuracy, the electromagnetic launcher's rail was modeled as a simply supported beam on elastic foundation by moving load. The mechanical model of the beam was built by using Euler beam theory, and the analytical solution to the equation subjected to exponential magnetic pressure was derived, which can avoid the errors resulting from the uniform pressure used to replace the variable force. The influence of the elastic coefficient, the damping coefficient, the mass of rail and the load's velocity on the deformation of beam was numerically analyzed with MATLAB. The result shows that the elastic coefficient and the load's velocity have obvious effect on the deformation of the beam, while the damping coefficient and the mass of rail do not. The study lays a foundation for solving the electromagnetic launcher's rail subjected to magnetic pressure of arbitrary function and promoting the practicality of the electromagnetic guns.

Key words: electromagnetic gun; launcher's rail; Euler beam; exponential function magnetic pressure; Lagrange equation; analytical solutions

电磁炮是一种全新概念的武器, 其技术不仅在军事领域, 而且在航空、航天、交通运输、工业生产、科学研究等领域具有不可估量的应用前景, 各

发达国家均从战略高度予以重视并不断加大力度开展研究. 80 年代以来, 尤其是最近十年来, 随着新技术、新材料的不断发展, 电磁发射技术在发射装置、发射重量、弹丸速度、大功率电源等方面的研究取得了一系列成果. 美国的苏伦斯·利弗莫尔国家实验室和洛斯·阿拉莫斯国家实验室

$$\frac{EI}{cm} \frac{\theta^{(4)}}{\theta} + \frac{k}{cm} = \lambda^2, \tag{6}$$

即

$$\theta^{(4)} - \beta^4 \theta = 0. \tag{7}$$

其中 $\beta^4 = \left(\lambda^2 - \frac{k}{cm}\right) \frac{cm}{EI}$.

式(5)的解可以表示为

$$\phi(t) = A e^{\frac{-c+R}{2m}t} + B e^{\frac{-c-R}{2m}t}. \tag{8}$$

其中

$$R^2 = c^2 - 4cm^2 \lambda^2 > 0.$$

根据简支梁的边界条件

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} \theta(L) = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \end{cases},$$

式(7)的解可以表示为^[12]

$$\theta_i(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

因此

$$w_i(x, t) = \theta_i(x) \phi_i(t) = \left(\sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \times [A_i e^{\frac{-c+R}{2m}t} + B_i e^{\frac{-c-R}{2m}t}].$$

由于 $\theta_i(x)$ 的正交性^[13], 满足

$$\int_0^L \theta_i \theta_j dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j; \\ 1, & \text{当 } i = j. \end{cases}$$

$w(x, t)$ 可以表示成 θ_i 的线性组合, 即

$$w(x, t) = \sum_i \theta_i(x) \phi_i(t) = \sum_i \left(\sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \times [A_i e^{\frac{-c+R}{2m}t} + B_i e^{\frac{-c-R}{2m}t}].$$

其中 A_i, B_i 可以由初始条件确定.

3 控制方程的解析解

式(1)的解析解可以由下面的计入阻力的拉格朗日方程求得, 其中 T 为梁的动能, U 为梁的总变形能, G 为耗散函数.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} + \frac{\partial U}{\partial \phi_i} - \frac{\partial G}{\partial \dot{\phi}_i} = Q_i$$

梁的动能 T 可以表示为^[14]

$$T = \frac{1}{2} \sum_i M_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)^2.$$

其中, $M_i = \int_0^L m \theta_i^2(x) dx$ 为梁的广义质量.

梁的总变形能由梁的应变能 U_b 和弹性基础的应变能 U_f 组成.

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \phi_i \phi_j \int_0^L EI \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} \frac{EI}{m} \sum_i \beta_i^4 M_i \phi_i^2,$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L k w^2 dx = \frac{k}{2} \int_0^L \left(\sum_i \theta_i \phi_i \right)^2 dx =$$

$$\frac{k}{2} \sum_i \sum_j \phi_i \phi_j \int_0^L \theta_i \theta_j dx =$$

$$\frac{k}{2m} M_i \sum_i \phi_i^2.$$

总的变形能 U 为

$$U = U_b + U_f = \frac{1}{2} \frac{EI}{m} \sum_i \beta_i^4 M_i \phi_i^2 + \frac{k}{2m} M_i \sum_i \phi_i^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_i M_i \phi_i^2 \left(\frac{EI}{m} \beta_i^4 + \frac{k}{m} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_i c M_i \phi_i^2 \lambda_i^2 \right].$$

耗散函数 G 为

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{2} \int_0^L c \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \int_0^L c \theta_i \theta_j dx = \\ &= -\frac{c}{2m} \sum_i M_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

电磁力 $p(x, t) = q(x) [1 - H(x - vt)]$ 在虚位移 $\delta \phi_i$ 下所做的虚功可以表示为

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L p(x, t) \delta w_i dx = \\ &= \sum_i \delta \phi_i \int_0^L p(x, t) \theta_i(x) dx = \\ &= \sum_i \delta \phi_i Q_i. \end{aligned}$$

其中 Q_i 表示广义力

$$Q_i = \int_0^L p(x, t) \theta_i(x) dx = \int_0^{vt} q(x) \theta_i(x) dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{mL}} \int_0^{vt} q(a^{bx} + c) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =$$

$$\frac{q \sqrt{\frac{2L}{m}}}{b^2 L^2 (\ln a)^2 + n^2 \pi^2} \left\{ \frac{a^{bvt} n \pi}{1 + \tan^2 \left(\frac{n \pi v t}{2L} \right)} \left(\tan^2 \left(\frac{n \pi v t}{2L} \right) - 1 \right) + \right.$$

$$2L b \ln a \tan \left(\frac{n \pi v t}{2L} \right) + n \pi + c [1 -$$

$$\cos \left(\frac{n \pi v t}{L} \right)] [b^2 L^2 (\ln a)^2 + n \pi] \Big\}.$$

将 T, U, G, Q_i 代入计入阻力的拉格朗日方程, 可以得到微分方程:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} + \frac{c}{m} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + c \lambda_i^2 \phi_i = \frac{Q_i(t)}{M_i} = F(t). \tag{9}$$

其中

$$F(t)=\frac{q\sqrt{\frac{2L}{m}}}{M_i[b^2L^2(\ln a)^2+n^2\pi^2]}\left\{\frac{a^{bvt}n\pi}{1+\tan\left(\frac{n\pi vt}{2L}\right)^2}\cdot\right.\\ \left.\left(\tan\left(\frac{n\pi vt}{2L}\right)^2-1\right)+2Lb\ln atan\left(\frac{n\pi vt}{2L}\right)+n\pi+c\left[1-\cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right][b^2L^2(\ln a)^2+n\pi]\right\}.$$

式(9)的通解为

$$\phi_i(t)=\frac{m}{R}\left(\frac{\partial\phi_i(0)}{\partial t}+\frac{c+R}{2m}\phi_i(0)\right)e^{\frac{-c+R}{2m}t}+\\ \frac{m}{R}\left(-\frac{\partial\phi_i(0)}{\partial t}+\frac{-c+R}{2m}\phi_i(0)\right)e^{\frac{-c-R}{2m}t}+\\ \frac{m}{R}\int_0^tF(\xi)\left(e^{\frac{-c+R}{2m}(t-\xi)}-e^{\frac{-c-R}{2m}(t-\xi)}\right)d\xi.$$

由此,式(1)的解可以表示为

$$w(x,t)=\sum_i\theta_i(x)\phi_i(t)=\sum_i\sqrt{\frac{2}{mL}}\cdot\\ \sin\frac{n\pi x}{L}\left\{\frac{m}{R}\left(\frac{\partial\phi_i(0)}{\partial t}+\frac{c+R}{2m}\phi_i(0)\right)e^{\frac{-c+R}{2m}t}+\\ \frac{m}{R}\left(-\frac{\partial\phi_i(0)}{\partial t}+\frac{-c+R}{2m}\phi_i(0)\right)e^{\frac{-c-R}{2m}t}+\\ \frac{m}{R}\int_0^tF(\xi)\left(e^{\frac{-c+R}{2m}(t-\xi)}-e^{\frac{-c-R}{2m}(t-\xi)}\right)d\xi\right\}.$$

由初始条件

$$\begin{cases} \phi(t)\Big|_{t=0}=0,\\ \frac{\partial\phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \end{cases}$$

有

$$\phi_i(t)=\frac{m}{R}\int_0^tF(\xi)\left(e^{\frac{-c+R}{2m}(t-\xi)}-e^{\frac{-c-R}{2m}(t-\xi)}\right)d\xi.$$

(11)

因此,将式(11)的解代入到式(10)就可以得到方程(1)的解 $w(x,t)$. 由 $w(x,t)$ 可以进一步得到轨道上的弯矩和剪力,为更全面地讨论电磁发射装置的动力响应提供依据.

4 数值分析

由于电磁轨道发射装置制作材料的差异,弹性基础的弹性系数和阻尼系数、轨道的质量以及载荷的出口速度可能会对轨道的变形产生影响^[15],因此有必要对其作比较分析.

已知轨道材料^[16]的杨氏模量 $E=120\text{ GPa}$,弹性基础的弹性系数 $k=2.532\times10^{10}\text{ Pa}$,轨道材料的质量密度 $\rho=8\,700\text{ kg/m}^3$,截面宽度 $b=3\times10^{-2}\text{ m}$,高度 $h=1\times10^{-2}\text{ m}$,轨道长度为 $L=2\text{ m}$,电磁载荷 $q(x)=110\sin(1/2)x\text{ MPa}$.

图 3 给出了弹性基础的弹性系数对梁的动态响应^[18-19]. 时间-挠度曲线随着弹性系数 (k) 的增加而呈下降的趋势. 在本文所给的计算条件下, $k=2.532\times10^{10}\text{ Pa}$ 的材料在 $t=1\times10^{-3}\text{ s}$ 时,梁的挠度 (w) 为 $7\times10^{-3}\text{ m}$,而 $k=5.064\times10^{10}\text{ Pa}$ 的材料在 $t=1\times10^{-3}\text{ s}$ 时,梁的挠度 (w) 为 $3.4\times10^{-3}\text{ m}$,前者比后者增加了 106%.

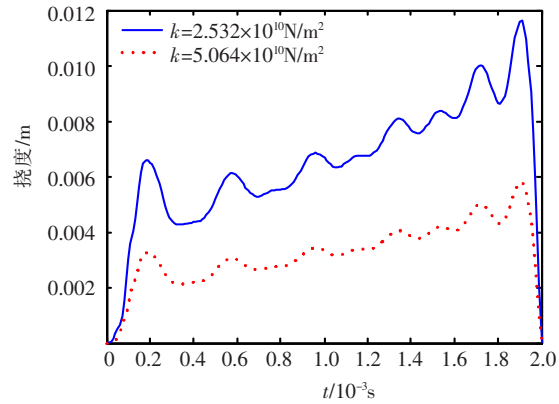


图 3 不同弹性基础的弹性系数下的挠度变化图

图 4 给出了弹性基础的阻尼系数对梁的动态响应. 时间-挠度曲线随着阻尼系数的增加而呈缓慢下降的趋势.

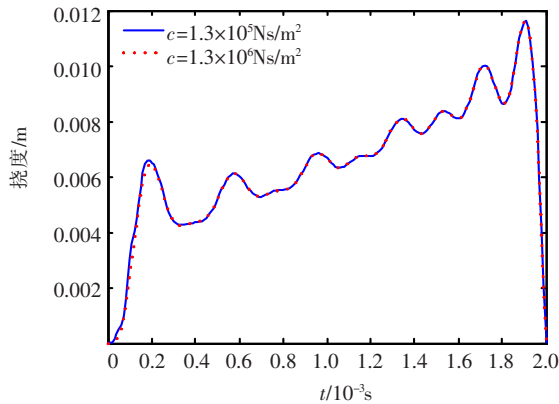


图 4 不同弹性基础的阻尼系数的挠度变化图

图 5 给出了轨道质量 (m) 对梁的动态响应. 对比铝轨道与铜轨道,时间-挠度曲线随着 m 的

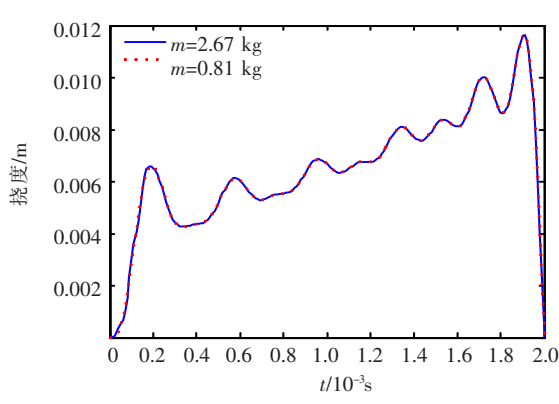


图 5 不同轨道质量下的挠度变化图

增加并没有出现明显的变化,因此,在选择轨道的材料时,可以选择性价比更优的铝材料.

图6给出了载荷的出口速度对梁的动态响应.时间-挠度曲线随着载荷移动速度(v)的增加而呈增加的趋势,在本文所给的计算条件下, $v=1\,000\text{ m/s}$ 的材料在 $t=1.6\times 10^{-3}\text{ s}$ 时,梁的挠度(w)为 $8\times 10^{-3}\text{ m}$,而 $v=1\,200\text{ m/s}$ 的材料在 $t=1.6\times 10^{-3}\text{ s}$ 时,梁的挠度(w)为 $12.5\times 10^{-3}\text{ m}$,前者比后者减小了56%.

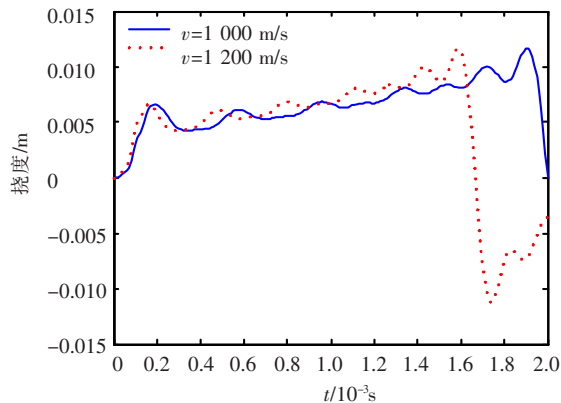


图6 不同载荷出口速度下的挠度变化图

5 结 论

1)考虑了非线性磁压力及阻尼力,将轨道看作是弹性基础上的简支梁,建立了电磁发射装置的力学模型.

2)利用分离变量法和计入阻力的拉格朗日方程,推导出齐次方程的解及受指数函数分布压力控制方程的解析解,丰富和发展了弹性力学理论,为解决电磁轨道受任意分布压力之解析解的难题奠定了理论基础.

3)通过 MATLAB 软件分别进行了地基的弹性系数、阻尼系数、轨道质量和载荷的出口速度对梁变形的影响:地基弹性系数越大,梁变形的越小.载荷的出口速度越大,梁的变形越大,而梁的质量和阻尼系数对梁的变形几乎没有影响.

参考文献:

[1] SMITHA N, ELLIS R L, BEMARDEJ S, *et al.* Thermalmanagement and resistive rail heating of a large - scale naval electro - magnetic launcher[J]. Trans on Magnetizes,2005,41(1):235 - 240.

[2] FAIR H D. Progress in electromagnetic launch science and technology [J]. Trans on Magn, 2007, 43(1): 93 - 98.

[3] FAIR H D. Electromagnetic launch science and technology in the United States enters a new era [J]. Trans on Magn,2005,41(1):158 - 164.

[4] TZENG J T, SUN Wei. Dynamic response of cantilevered rail guns attributed to projectile/gun interaction-theory [J]. Transactions on Magnetics, 2007,43:207 - 213.

[5] 胡玉伟. 电磁轨道炮系统的建模与仿真[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学,2007.

[6] 王胜. 弹性半空间上欧拉梁表面移动荷载引起的位移场[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2007.

[7] 郑哲敏. 郑哲敏文集[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[8] LIU Wen, SHAN Rui. Mathematic model and analytic solution for a cylinder subject to exponential function [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009,22(4):587 - 593.

[9] LIU Zhubai, SHAN Rui, LIU Wen, *et al.* Solution of a hollow thick - wall cylinder subject to quadric function pressures and its limit when $l \rightarrow \infty$ [J]. Science in China (Series E),2004, 47(2):229 - 236.

[10] 于艳丽. 移动载荷作用下轨道系统和高架桥的动力响应分析[D]. 武汉:武汉理工大学,2002.

[11] TZENG J T. Structural mechanics for electromagnetic railguns[J]. Transactions on Magnetics, 2005,6:247 - 249.

[12] 朱石坚. 振动理论与隔振技术[M]. 北京:国防工业出版社,2006:36 - 66.

[13] 张相庭,王志赔. 结构振动力学[M]. 上海:同济大学出版社,2006:93 - 117.

[14] 姜平,曾庆元. 移动载荷作用下连续粘弹性基础之承无限长梁的有有限元分析[J]. 交通运输工程学报,2003,3:1 - 6.

[15] TZENG J T. Dynamic response of electromagnetic rail-gun due to projectile movement[J]. Transactions on Magnetics, 2005,41:246 - 250.

[16] JOHNSON I A J, FRANCIS C. Elastic waves and solid armature contact pressure in electromagnetic launchers [J]. Transactions on Magnetics, 2006,3:472 - 475.

(编辑 刘 彤)