

各向异性黏弹性隧道开挖位移时变解析解

李镜培^{1,2}, 饶平平^{1,2}, 张述涛^{1,2}

- (1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 200092 上海;
2. 同济大学 地下建筑与工程系, 200092 上海, raopingping@sohu.com)

摘要: 针对各向异性初始应力状态(侧压力系数 K_0 不等于 1) 的岩体隧道开挖问题, 假定开挖岩体为 Maxwell 黏弹性模型, 从各向异性条件下围岩位移解答出发, 通过对应性原理求解圆形隧道施工开挖过程中的围岩位移时变解, 探讨各因素对围岩位移的影响. 结果表明: 对于隧道顶点, 当各向异性参数(侧压力系数) $K_0 > 1$ 时, 先是向围岩方向产生位移, 此后流变作用的影响导致围岩位移逐渐向隧道内转变; 而对于 $K_0 \leq 1$, 隧道一旦开始开挖, 随即向隧道内产生围岩位移, 且时变位移随 K_0 的不断减小而逐渐增大; 对于隧道中点, 各向异性(侧压力系数)对隧道中点处位移的影响与隧道顶点处位移刚好相反; 此外, 隧道施工中开挖速度、开挖加速度越大, 围岩时变位移也越大.

关键词: 各向异性; 黏弹性; 隧道开挖; 时变

中图分类号: U45 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2011)04-0094-05

Time-varying displacement analytical solution of anisotropic visco-elastic tunnel excavation

LI Jing-pei^{1,2}, RAO Ping-ping^{1,2}, ZHANG Shu-tao^{1,2}

- (1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, 200092 Shanghai, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, 200092 Shanghai, China, raopingping@sohu.com)

Abstract: Based on the Maxwell visco-elastic constitutive model and the solution of the anisotropic displacement for surrounding rock, the time-varying analytical solution of anisotropic visco-elastic tunnel excavation are presented through the correspondence principle. The anisotropic stress state means that the lateral earth press coefficient does not equal to 1 in this paper. A variety of ingredients on the displacement of surrounding rock are discussed. The results show that when the anisotropic parameter $K_0 > 1$, the summit of tunnel will move in the direction of surrounding rock and then change to the opposite direction due to the rheological effect. However, the displacement will generate in the direction of inner tunnel when $K_0 \leq 1$, and the time-varying displacement gradually increases with the decreasing of K_0 . For the midpoint of the tunnel, the influence of the anisotropic parameter is just opposite to the summit displacement of tunnel. Moreover, the time-varying displacement of surrounding rock would increase with the increase of excavation speed and acceleration. The shear modulus and viscosity also have some influences on the time-varying displacement of surrounding rock.

Key words: anisotropy; visco-elasticity; tunnel excavation; time-varying

随着国民经济的发展,隧道工程建设规模正日益扩大,许多隧道工程属于长周期、大断面施

工,连续的开挖施工造成隧道内边界条件随时间不断发生变化,而信息化施工要求隧道开挖工程关注的不仅是最终状态,对开挖过程中的工况及安全也提出了更高的要求.因此,应在考虑开挖过程的时变特征基础上建立适当的分析方法,对隧道围岩应力、位移分布及稳定性情况开展研究.有

收稿日期: 2010-01-01.

基金项目: 上海市科技攻关计划资助项目(09231200900).

作者简介: 李镜培(1963—),男,教授,博士生导师.

关时变力学的研究中,早期文献[1-3]提出了时变力学的概念,并应用于简单工程实践中;文献[4-6]逐步将时变力学引入到岩土及隧道工程施工实践中.如果隧道在黏土、软岩等具有明显流变特性的岩土体中进行施工,隧道开挖属于黏弹性时变力学问题.文献[7-8]采用渗流-力学耦合模型,分析了黏弹性饱和土体中隧道开挖引起的应力场和位移场,但其未考虑时变特征.此外,众多文献表明目前分析隧道围岩应力及位移的理论大多假设初始各向应力相等(即侧压力系数 K_0 为1),但在工程实践中,岩体通常处于初始非等向的固结状态,侧压力系数 K_0 一般小于1,在超固结状态中大于1,均表现出明显的各向异性初始应力;另外,隧道开挖过程中应力状态的改变以及塑性变形等因素也会改变岩体的各向异性特性.

基于以上原因,将隧道围岩视为 Maxwell 黏弹性模型,通过拉普拉斯数值变换求解各向异性初始应力状态下圆形隧道开挖过程中的围岩位移时变解析解,探讨隧道各向异性初始应力状态、匀速及加速开挖工况等因素对围岩时变位移的影响.

1 模型描述

各向异性条件下隧道开挖的力学模型如图1所示,其中 θ, r 为所取极坐标,隧道半径时变函数 $a(t)$ 即为施工隧道半径与开挖时间的关系, θ 为沿逆时针方向与水平向的夹角, p_0 为初始竖向应力, K_0 为各向异性参数(侧压力系数). Maxwell 黏弹性模型如式(1)与图2所示^[9],其中参数 G, η, E, ν 分别为岩体材料的剪切模量、黏滞系数、弹性模量、泊松比; σ 为应力, $\dot{\sigma}$ 与 $\dot{\varepsilon}$ 分别为应力变化率与应变率.

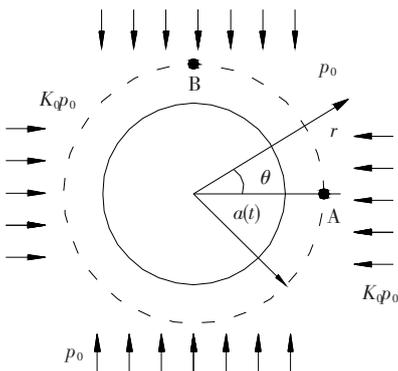


图1 隧道开挖力学模型

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{1}$$

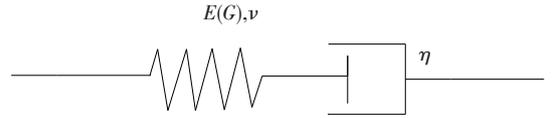


图2 Maxwell 黏弹性模型

2 非时变弹性解析

对于隧道圆孔在各向异性初始应力状态作用下的开挖问题,弹性状态下隧道周围岩体位移表达式为^[10]

$$u = \frac{(\nu^2 - 1)p_0}{2E} \left[(1 + K_0) \left(r + \frac{a^2}{r} \right) + (K_0 - 1) \times \left(r - \frac{a^4}{r^3} + \frac{4a^2}{r} \right) \cos 2\theta \right] + \frac{\nu(1 + \nu)p_0}{2E} \left[(1 + K_0) \left(r - \frac{a^2}{r} \right) + (1 - K_0) \times \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right]. \tag{2}$$

式中: u 为隧道圆孔外岩体径向位移,本文假定位移向岩体外方向为正,向隧道内方向为负; a 为圆孔半径; r 为圆孔外某一点半径.

3 黏弹性时变解析解

由对应性原理可知^[11],黏弹性时变力学解即由相应的弹性时变力学解答经过 Laplace 变换,然后将式中的剪切模量 G 用 G_v 表示,对于 Maxwell 模型, $G_v = s/(s/G + 1/\eta)$ ^[12],最后将结果进行逆变换即可得到黏弹性时变解.

考虑隧道开挖为时变过程时,假设土体不可压缩($\nu = 0.5$),则式(2)变为

$$u = -\frac{p_0}{8G} \left[(1 + K_0) \left(r + \frac{a(t)^2}{r} \right) + (K_0 - 1) \times \left(r - \frac{a(t)^4}{r^3} + \frac{4a(t)^2}{r} \right) \cos 2\theta \right] + \frac{p_0}{8G} \left[(1 + K_0) \left(r - \frac{a(t)^2}{r} \right) + (1 - K_0) \times \left(r - \frac{a(t)^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right]. \tag{3}$$

3.1 匀速开挖黏弹性时变位移解

假定隧道以匀速进行开挖,隧道圆孔初始半径 $a(0) = a_0$,以速度 v 向外扩展,即

$$a(t) = a_0 + vt. \tag{4}$$

将式(4)及 $G_v = s/(s/G + 1/\eta)$ 代入式(3)中,即可得到黏弹性时变 Laplace 变换位移解:

$$u_s = u_a + u_b + u_c + u_d. \tag{5}$$

式中:

$$u_a = \frac{-p_0(\eta s + G)}{8sG\eta} \left[(1 + K_0) \left(\frac{r}{s} + \frac{B}{r} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
u_b &= \frac{-p_0(\eta s + G)}{8sG\eta} \left[(K_0 - 1) \left(\frac{r}{s} - \frac{A}{r^3} + \frac{4B}{r} \right) \right] \cos 2\theta, & u_6 &= -\frac{p_0}{8} (K_0 - 1) \cos 2\theta \left[\frac{1}{G} \left(r - \frac{T}{r^3} + \frac{L}{r} \right) + \right. \\
u_c &= \frac{p_0(\eta s + G)}{8sG\eta} \left[(1 + K_0) \left(\frac{r}{s} - \frac{B}{r} \right) \right], & & \left. \frac{t}{\eta} \left(r - \frac{M}{r^3} + \frac{N}{r} \right) \right], \\
u_d &= \frac{-p_0(\eta s + G)}{8sG\eta} \left[(K_0 - 1) \left(\frac{r}{s} - \frac{A}{r^3} \right) \right] \cos 2\theta, & u_7 &= \frac{p_0}{8G} (1 + K_0) \left(r - \frac{J}{r} \right) + \frac{p_0 t}{8\eta} (1 + K_0) \left(r - \frac{Q}{r} \right), \\
A &= \frac{a_0^4}{s} + \frac{24v^4}{s^5} + \frac{12a_0^2 v^2}{s^3} + \frac{4a_0^3 v}{s^2} + \frac{24a_0 v^3}{s^4}, & u_8 &= \frac{p_0}{8G} \left[(1 - K_0) \left(r - \frac{T}{r^3} \right) \cos 2\theta \right] + \frac{p_0 t}{8\eta} \left[(1 - K_0) \times \right. \\
B &= \frac{a_0^2}{s} + \frac{2v^2}{s^3} + \frac{2a_0 v}{s^2}. & & \left. \left(r - \frac{M}{r^3} \right) \cos 2\theta \right],
\end{aligned}$$

再将式(5)进行逆变换,即可得到隧道匀速开挖过程中黏弹性时变位移解答:

$$u_n^v(r, t) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4. \quad (6)$$

式中:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{p_0 t}{8\eta} (1 + K_0) \left(r + \frac{C}{r} \right) - \frac{p_0}{8G} (1 + K_0) \left(r + \frac{D^2}{r} \right), & T &= \frac{1}{16} b^4 t^8 + \frac{1}{2} a_0 b^3 t^6 + \frac{3}{2} a_0^2 b^2 t^4 + 2a_0^3 b t^2 + a_0^4, \\
u_2 &= -\frac{p_0}{8G} (K_0 - 1) \left(r - \frac{D^4}{r^3} + \frac{4D^2}{r^2} \right) \cos 2\theta - & M &= \frac{1}{144} b^4 t^8 + \frac{1}{14} a_0 b^3 t^6 + \frac{3}{10} a_0^2 b^2 t^4 + \frac{2}{3} a_0^3 b t^2 + a_0^4, \\
& \frac{p_0 t}{8\eta} (K_0 - 1) \left(r - \frac{F}{r^3} + \frac{4H}{r} \right) \cos 2\theta, & N &= \frac{1}{5} b^2 t^4 + 4a_0^2 + \frac{4}{3} a_0 b t^2, \\
u_3 &= \frac{p_0}{8G} (1 + K_0) \left(r - \frac{D^2}{r} \right) + \frac{p_0 t}{8\eta} (1 + K_0) \left(r - \frac{C}{r} \right), & L &= b^2 t^4 + 4a_0^2 + 4a_0 b t^2. \\
u_4 &= \frac{p_0}{8} (1 - K_0) \cos 2\theta \left[\frac{1}{G} \left(r - \frac{D^4}{r^3} \right) + \frac{t}{\eta} \left(r - \frac{F}{r^3} \right) \right], & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= a_0^2 + a_0 v t + \frac{1}{3} v^2 t^2, \\
D &= a_0 + v t, \\
H &= a_0^2 + \frac{1}{3} v^2 t^2 + a_0 v, \\
F &= a_0^4 + 2a_0 v^2 t^2 + 2a_0^3 v t + \frac{1}{5} v^4 t^4 + a_0 v^3 t^3.
\end{aligned}$$

3.2 加速开挖黏弹性时变位移解

对于隧道加速开挖情况,假定

$$a(t) = \frac{1}{2} b t^2 + c t + a_0. \quad (7)$$

式中: b 为开挖加速度; t 为开挖时间. 为简单起见,假定 $c = 0$.

同上一小节一样,将式(7)及 $G_v = s/(s/G + 1/\eta)$ 代入式(3)中,得到黏弹性时变 Laplace 变换位移解,再将其进行逆变换,即可得到隧道加速开挖过程中围岩黏弹性时变位移解答:

$$u_n^b(r, t) = u_5 + u_6 + u_7 + u_8. \quad (8)$$

式中:

$$\begin{aligned}
u_5 &= -\frac{p_0 t}{8\eta} (1 + K_0) \left(r + \frac{Q}{r} \right) - \frac{p_0}{8G} (1 + \\
& K_0) \left(r + \frac{J}{r} \right),
\end{aligned}$$

$$Q = \frac{1}{20} b^2 t^4 + a_0^2 + \frac{1}{3} a_0 b t^2,$$

$$J = \frac{1}{4} b^2 t^4 + a_0^2 + a_0 b t^2,$$

$$T = \frac{1}{16} b^4 t^8 + \frac{1}{2} a_0 b^3 t^6 + \frac{3}{2} a_0^2 b^2 t^4 + 2a_0^3 b t^2 + a_0^4,$$

$$M = \frac{1}{144} b^4 t^8 + \frac{1}{14} a_0 b^3 t^6 + \frac{3}{10} a_0^2 b^2 t^4 + \frac{2}{3} a_0^3 b t^2 + a_0^4,$$

$$N = \frac{1}{5} b^2 t^4 + 4a_0^2 + \frac{4}{3} a_0 b t^2,$$

$$L = b^2 t^4 + 4a_0^2 + 4a_0 b t^2.$$

至此,本文已完整推导了考虑各向异性特性(不同侧压力系数)及隧道不同开挖方式(匀速开挖、加速开挖)的围岩时变位移解析解.

3.3 对本文解答的讨论

本文推导的式(6)与式(8)为各向异性条件下考虑匀速开挖与加速开挖工况的围岩黏弹性时变位移解答,令侧压力系数 K_0 为 1,则式(6)可退化到各向同性条件下匀速开挖围岩时变位移解答,即

$$\begin{aligned}
u_n^v(r, t) &= -\frac{p_0 t}{2\eta r} \left(a_0^2 + a_0 v t + \frac{1}{3} v^2 t^2 \right) - \\
& \frac{p_0}{2Gr} (a_0 + v t)^2.
\end{aligned} \quad (9)$$

该表达式与文献[5]解答完全一致.

再令开挖速度 v 以及加速度 b 为 0,式(6)与式(8)均可退化到文献[5]中的黏弹性位移解答. 即

$$u_n^v(r, t) = u_n^b(r, t) = -\frac{p a_0^2}{2Gr} - \frac{p a_0^2}{2\eta r} t. \quad (10)$$

由上可知,文献[5]中解答仅为本文解答的一个特解,文献[5]考虑了匀速开挖的时变位移解析解,并用对应性原理验证了其方法的正确性,本文解答不仅可以考虑开挖方式(匀速开挖、加速开挖)对围岩时变位移的影响,还可考虑各向异性特性对围岩时变位移的影响.

4 算例分析

为了便于分析各向异性初始应力状态条件下圆形隧道施工开挖过程中围岩黏弹性时变位移解的规律性,取如下参数进行对比:隧道初始半径 a_0 为0 m,初始竖向应力 p_0 为1 MPa,剪切模量 G 为1 000 MPa,黏滞系数 η 为1 000 MPa·d,围岩半径 r 为10 m(即图1中A、B点的半径),开挖速度 $v = 1 \text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$.

4.1 各向异性对围岩时变位移解的影响

各向异性初始应力状态条件下,侧压力系数 K_0 值的改变对围岩位移影响如图3,4所示.

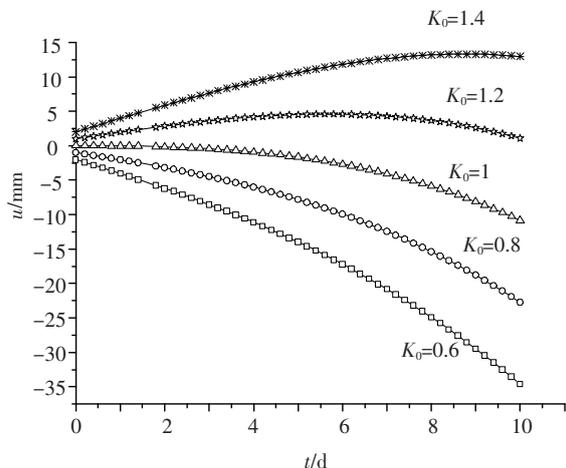


图3 各向异性对时变位移的影响(B点位置)

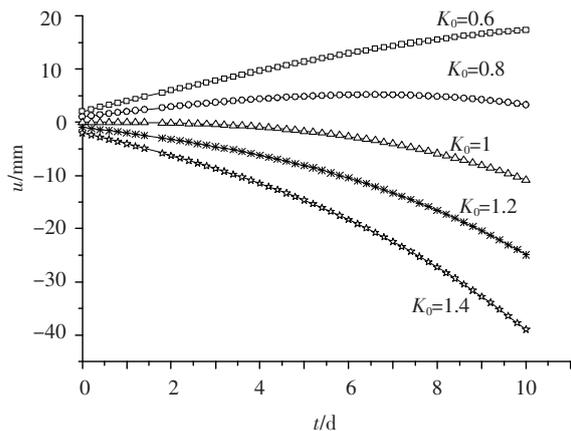


图4 各向异性对时变位移的影响(A点位置)

对于图3,当不考虑各向异性特性时($K_0 = 1$),隧道开挖后,由于未采取围岩支护措施,隧道顶部B点向隧道内产生围岩位移(位移值为负),这与实际工程是一致的;当各向异性参数 $K_0 > 1$ 时,在隧道开挖的前期,各向异性状态对围岩位移起主导作用,即隧道顶部围岩B点处先是由于隧道两端侧压力作用向围岩方向收缩(位移值为正),且 K_0 越大,收缩作用越明显,此后随着开挖时间的不断推移,流变作用的影响逐渐显现,导致

B点部位围岩位移逐渐向隧道内转变;而对于 $K_0 \leq 1$ 情况时,隧道一旦开始开挖,随即向隧道内产生位移,且围岩时变位移随 K_0 的不断减小而逐渐增大.

对于隧道中部A点处围岩位移,由图4可以看出,各向异性对隧道中点处位移与隧道顶点处位移刚好相反.即当 $K_0 \geq 1$ 时,隧道一旦开始开挖,隧道中点处内壁位移就向洞内方向发生,且位移随着时间与 K_0 的不断增大而增大;当 $K_0 < 1$ 时,其位移变化规律与图3中 $K_0 > 1$ 时隧道顶点B处时变位移较为相似.

4.2 不同开挖速度对围岩时变位移解的影响

由于4.2~4.3节只分析某一因素对时变位移解的影响,故此时不考虑各向异性特性(即假定 $K_0 = 1$).图5为不同开挖速度条件下,隧道围岩的黏弹性时变位移与隧道开挖时间关系.可以看出:隧道开挖速度的大小对围岩位移影响较大,开挖速度越大,围岩时变位移也越大(位移为负值,即向隧道内方向,下同),且其增大速率越大.如在开挖第10天时, $v = 0.25 \text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$ 所对应的围岩位移为0.68 mm, $v = 0.5 \text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$ 所对应的围岩位移为2.7 mm,而当 $v = 1 \text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$ 时对应的围岩位移则达10.8 mm,由此说明在实际工程中,考虑开挖速度的影响是非常有必要的,应根据隧道支护时围岩所需的自身蠕变位移采取适当的开挖速度.

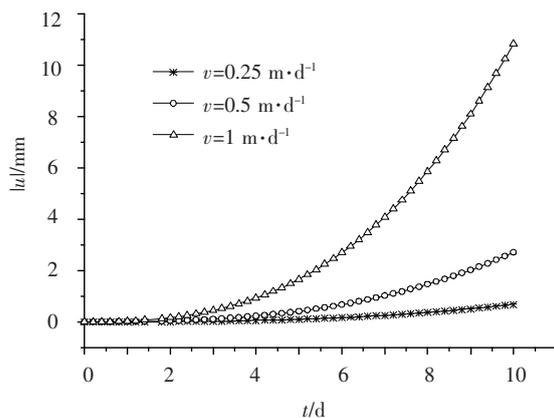


图5 开挖速度对围岩时变位移的影响

4.3 不同开挖加速度对围岩时变位移解的影响

隧道开挖加速度对隧道围岩黏弹性时变位移的影响如图6所示,可以看出,加速度越大,开挖过程中的时变位移也越大,且呈非线性加速增大.开挖10 d时, $b = 0.05 \text{ m} \cdot \text{d}^{-2}$ 时隧道围岩所对应的位移为0.94 mm, $b = 0.1 \text{ m} \cdot \text{d}^{-2}$ 时,其时变位移为3.8 mm,增大了3.0倍,而当 $b = 0.2 \text{ m} \cdot \text{d}^{-2}$ 时所对应的位移则达15.0 mm,比

$b = 0.05 \text{ m} \cdot \text{d}^{-2}$ 时所对应的位移增大了 15.0 倍,说明隧道开挖加速度对围岩黏弹性时变位移影响非常显著.

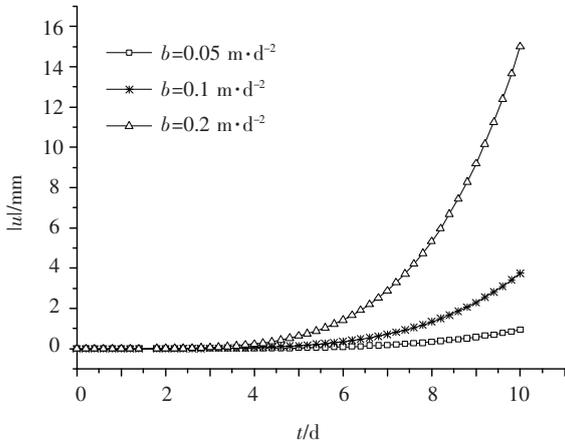


图6 开挖加速度对围岩时变位移的影响

5 结 论

1) 推导了各向异性条件下匀速开挖以及加速开挖隧道围岩位移时变解答,本文应力各向异性即侧压力系数不仅包括 1,而且能取其他任意值,文献[5]仅是本文解答的特例之一.

2) 当各向异性参数 $K_0 > 1$ 时,隧道顶点上方 B 处先是向围岩方向收缩,此后受流变作用的影响,围岩位移逐渐向隧道内转变;而对于 $K_0 \leq 1$,隧道一旦开始开挖,随即向隧道内产生围岩位移,且时变位移随 K_0 的不断减小而逐渐增大.

3) 对于隧道中部 A 点围岩位移,各向异性对隧道中点处位移的影响与隧道顶点处位移刚好相反.即当 $K_0 \geq 1$ 时,隧道一旦开始开挖,隧道中点处内壁就向洞内方向产生位移,且位移随着时间与 K_0 的不断增大而增大;当 $K_0 < 1$ 时,其规律与图 3 中 $K_0 > 1$ 时隧道顶点处时变位移相似.

4) 开挖速度、开挖加速度对围岩时变位移的影响不可忽视,随着隧道开挖速度、开挖加速度的增大,围岩时变位移也逐渐增大,且呈非线性加速增大.

参考文献:

- [1] 曹志远. 时变力学及其工程应用[J]. 力学与实践, 1999, 21(5): 1-44.
- [2] RASHBA E I. Stress determination in bulks due to own weight taking into account the construction sequence [J]. Proc Inst Struct Mech, 1953, 57(3): 529-536.
- [3] BROWN C B, GREEN D R, PAWSEY S. Flexible culverts under light fills[J]. J Struct Div ASCE, 1968, 94(4): 905-917.
- [4] WANG Huaning, NIE G H. Analytical expansions for stress and displacement fields in viscoelastic axisymmetric plane problem involving time-dependent boundary regions [J]. Acta Mech, 2010, 210: 315-330.
- [5] 王华宁, 曹志远. 无限黏弹性平面中孔洞扩展的时变力学解析解[J]. 固体力学学报, 2006, 27(3): 319-323.
- [6] WANG Huaning. Analytics study of time-varying axisymmetric problem of viscoelasticity [C]//The Fifth International Conference on Nonlinear Mechanics. Shanghai: Press of Shanghai University, 2007: 503-508.
- [7] LI X. Stress and displacement field around a deep circular tunnel with partial sealing [J]. Computer and Geotechnics, 1999, 4: 125-140.
- [8] 刘干斌, 谢康和, 施祖元. 黏弹性土体中深埋圆形隧道的应力和位移分析[J]. 工程力学, 2004, 21(5): 132-138.
- [9] 钱家欢, 殷宗泽. 土工计算原理[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996.
- [10] YU H S. Cavity expansion methods in geomechanics [M]. AH Dordrecht: Kluwer Academic, 2000: 16-18.
- [11] DURBIN F. Numerical inversion of laplace transformation: an efficient improvement to Durbin and Abate's method[J]. The Computer Journal, 1974, 17(4): 371-376.
- [12] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994: 318-324.

(编辑 刘 彤)