

基于颗粒接触理论的深层砂土剪切波速度

夏唐代^{1,2}, 刘瑜^{1,2}, 吴明^{1,2}, 周新民³

(1. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 310058 杭州, xtd@ccea.zju.edu.cn;
2. 浙江大学 岩土工程研究所, 310058 杭州; 3. 浙江省地震局, 310013 杭州)

摘要: 为了研究深层砂土剪切波速度, 首先假设深层砂土为不规则排列等球体颗粒的集合体, 在颗粒接触理论以及细观颗粒弹性力学的研究成果上推导出砂土的等效剪切模量, 继而得到宏观剪切波速计算公式; 然后分析了孔隙率、饱和度、内摩擦角、土粒密度、应力大小以及砂土颗粒的弹性模量和泊松比等因素对剪切波速的影响, 最后将理论方法计算结果与深层砂土实测剪切波速进行了对比验证. 结果表明: 理论方法计算得到的结果与实测结果吻合较好, 剪切波速度主要受孔隙率、应力大小及砂土颗粒弹性模量等因素影响显著; 高应力状态下, 尤其是当密实度达到 100% 后, 应力增长会导致剪切波速继续增加.

关键词: 颗粒接触理论; 实际平均接触点数; 等效剪切模量; 应力状态

中图分类号: TU435 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2011)04-0099-05

Shear wave velocity in deep buried sand based on spheres-contact theory

XIA Tang-dai^{1,2}, LIU Yu^{1,2}, WU Ming^{1,2}, ZHOU Xin-min³

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, 310058 Hangzhou, China, xtd@ccea.zju.edu.cn; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, 310058 Hangzhou, China; 3. Seismological Bureau of Zhejiang Province, 310013 Hangzhou, China)

Abstract: Assuming deep buried sand is an aggregate of randomly packed uniform spheres, the equivalent shear modulus and the formula of shear wave velocity (V_s) in sand media were derived based on the spheres-contact theory and the research results of microscopic particles elasticity. Seven influencing factors were analyzed, including porosity, saturation, internal friction angle, soil grain density, magnitude of stress, elastic modulus of sand grain and Poisson ratio of sand grain. The results were compared with the measured data, and the calculated value of V_s were generally in good agreement with the measured values. This study indicates that the value of V_s is mainly influenced by porosity, magnitude of stress and the elastic modulus of sand grain, and the shear wave velocity increases with the increasing of stress in high stress state, especially after the degree of density achieves 100%.

Key words: spheres-contact theory; actual coordination number; equivalent shear modulus; stress state

砂土主要由固相(固体颗粒)和液相(土中流体)组成, 因此一般认为是两相介质. 不同学者从不同角度出发, 建立了多种理论体系, 深入研究双相介质中弹性波的传播问题, 最具有代表性的理论有: Biot 流体饱和多孔介质波传播理论、Kuster

的散射波分析、Brandt 的颗粒模型理论^[1]. Biot 理论和 Kuster 的散射波分析都只是从宏观上去认识土介质中的波, 并不探究砂土颗粒间的力学行为, 对砂土中剪切波速的预测也有一定的局限性. Brandt 首先尝试引入经典弹性力学中 Hertz 球颗粒接触模型, 从细观模型推导宏观参数, 但其推导是建立在一系列孔隙率的假设的基础上的, 这些孔隙率假设带有较强的主观性, 不能合理解释细观颗粒的力学行为.

收稿日期: 2009-12-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(5107833).

作者简介: 夏唐代(1965—), 男, 教授, 博士生导师.

近些年,关于颗粒介质的弹性力学进展比较快. 20 世纪 50 年代 Hertz-Duffy 理论创立时假设颗粒是规则排列的;到了 20 世纪 80 年代不规则排列的颗粒集合体大量被研究;20 世纪 90 年代钟晓雄、袁建新进一步将散粒体的细观力学变量与宏观力学变量建立了相关关系. 颗粒间的弹性接触行为的研究也逐渐深入, Hertz 模型假设颗粒表面是光滑的;20 世纪 50 年代 Mindlin 考虑颗粒间的摩擦,但是没有考虑颗粒表面粗糙度的大小的影响;20 世纪 60 年代 Greenwood 等引入颗粒粗糙度并指出了在低应力情况下粗糙度大小对接触面大小的影响趋势. 本文尝试在宏观上将砂土介质等效为均匀各向同性的连续介质,利用改进的颗粒接触理论推导宏观等效模型的弹性模量,得到深层砂土的剪切波波速计算公式. 通过分析孔隙率、饱和度、内摩擦角、土粒密度、应力大小、砂土颗粒的弹性模量和泊松比等因素对剪切波速的影响,将计算公式进行简化,最后通过实测结果对本文方法进行验证.

1 砂土宏观模型

砂土介质的本质是非连续的随机堆积的微小颗粒以及填充于颗粒间空隙的流体的集合体. 然而从砂土颗粒粒径大小的统计学分布来看,在整个介质中,颗粒的粒径分布是均匀的而且是各向同性的;从测量的尺度上来看,弹性波的波长往往是砂土的颗粒的数百倍甚至数千倍以上,颗粒之间的空隙尺寸也是波长尺寸的无穷小数量级,因此在宏观上可以将整个介质等效成均匀各向同性的连续介质. 在均匀各向同性介质中,弹性波传播的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \nabla^2 u. \tag{1}$$

式中: V 为弹性波传播的波速, u 为质点的位移.

假设砂土介质的等效剪切模量为 G_e , 密度为 ρ , 则砂土介质中的宏观剪切波传播速度为

$$V_s = \sqrt{\frac{G_e}{\rho}}. \tag{2}$$

砂土介质的等效体积模量和等效剪切模量受到砂土颗粒的矿物组成、物理力学性质以及空间排列方式和流体性质等因素的影响. 为了研究各种因素对整体介质波动特性的影响,从细观力学模型进行分析,运用 Hertz 模型、等效流体模型等方法进行研究.

假设砂土介质中固相(干燥状态下颗粒骨架)的等效剪切模量为 G_{se} . 由于流体不能抗剪,液

相对砂土介质的等效剪切模量没有影响,因此砂土介质的等效剪切模量等于砂土颗粒骨架的等效剪切模量,砂土介质中的剪切波波速为

$$V_s = \sqrt{\frac{G_{se}}{\rho}}. \tag{3}$$

2 砂土颗粒细观力学模型

砂土颗粒骨架的等效剪切模量与砂土颗粒的细观组构、弹性性质、形状及排列形式等因素有关. 本文尝试将砂土介质视为材料性质相同、大小相等的球形固体颗粒的随机堆积散粒集合体,通过推导颗粒之间的接触刚度求出砂土介质的等效剪切模量.

钟晓雄^[2]研究了散粒体的细观组构与本构关系,各向同性散粒体等效剪切模量可以表示为

$$\begin{cases} G_{se} = \frac{c(2 + 3\xi)(1 - \varphi)}{20\pi r} D_n, \\ \xi = \frac{D_s}{D_n}. \end{cases} \tag{4}$$

式中: r 是等效球形颗粒的半径; c 是散粒体中平均每个颗粒与相邻颗粒的接触点数; φ 为散粒体的孔隙率; D_n 为法向接触刚度; D_s 为切向接触刚度.

式(4)表明颗粒接触刚度是影响散粒体等效剪切模量的主要因素,而砂土颗粒的接触刚度取决于颗粒间的接触力学行为. Greenwood 研究了颗粒粗糙度对颗粒接触行为的影响程度,并且指出在高应力状态下,粗糙颗粒间的等效接触半径与 Hertz 模型的计算结果很接近^[3]. 故本文采用 Hertz 弹性等球形颗粒接触模型^[4]来求得颗粒接触刚度,图 1 为两弹性等球体接触示意图,假定如下:1) 相互接触的两球体直径相等,弹性性质相同,表面粗糙;2) 在法向压力作用下形成的接触面为圆形;3) 颗粒间不发生滑移.

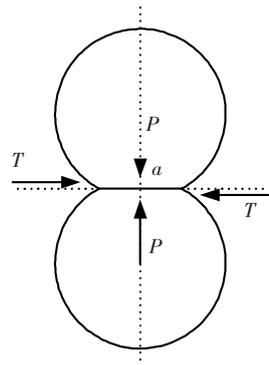


图 1 两弹性等球体接触示意图

图 1 中 a 为等球体间法向压缩接触面积的半径, P 为等球体间的法向压力, T 为剪切力. 两接

触等球体间的法向接触刚度 D_n 和切向接触刚度 D_s 可表示为^[5]

$$\begin{cases} D_n = \frac{2E_p}{1 - \nu_p^2} a, \\ D_s = \frac{4E_p}{(2 - \nu_p)(1 + \nu_p)} a. \end{cases} \quad (5)$$

式中: ν_p 为等球体的泊松比; E_p 为等球体的弹性模量.

a 可表示为

$$a = \sqrt[3]{\frac{3(1 - \nu_p^2)rP}{4E_p}}. \quad (6)$$

等球体间的法向压力属于细观接触力. Digby^[6]假设等球体的随机堆积体的边界被一层连续封闭的膜包裹,膜的外侧均匀分布围压 P_0 . 通过推导, Digby 得到了等球体间的法向力 P 与围压 P_0 的关系为

$$P = \frac{4\pi r^2 P_0}{c(1 - \phi)}. \quad (7)$$

式中 c 为颗粒的平均接触点数. Murphy^[7]研究了等球体致密堆积的平均接触点数 c 与堆积体孔隙率 ϕ 之间的关系,指出颗粒之间接触状态分为实际接触状态和临近接触状态,而实际接触点数目比理论模型的接触点数目要少. 综合实测结果、计算机模拟结果及理论结果,平均接触点数 c 与孔隙率 ϕ 关系如图2所示.

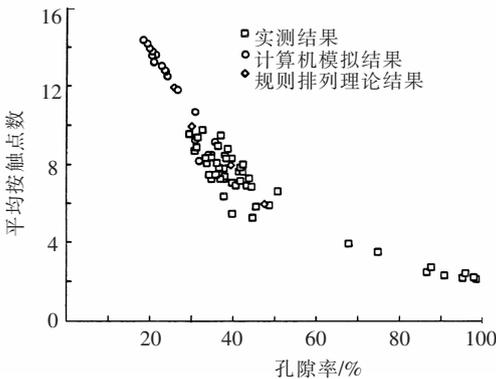


图2 平均接触点数与孔隙率关系

从整体上看, c 随着 ϕ 的增大而减小的. 当 ϕ 在 15% ~ 25% 之间变化时, c 与 ϕ 几乎成线性关系,这是因为此时砂土处于密实状态,砂土颗粒发生刚体位移或者翻滚的几率已非常小,随着 ϕ 的减小,砂土骨架压缩,必然产生新的接触;而当 ϕ 在 25% ~ 45% 之间时, c 与 ϕ 的关系离散性较大,这是因为此时砂土处于中密或松散状态,砂土颗粒发生刚体位移或者翻滚的几率较大,而颗粒位置的变化并不一定导致接触点数目的增加. 本文通过拟合后得到实际平均接触点数 c 与孔隙率 ϕ

的关系为

$$c = 0.0228 \cdot \exp[(1 - \phi)/0.1231] + 2.3929. \quad (8)$$

综合式(4) ~ (8)可得砂土介质的固体颗粒骨架的等效剪切模量 G_{se} 的表达式为

$$G_{se} = \frac{3(5 - 4\nu_p)}{5(2 - \nu_p)} \sqrt[3]{\frac{c^2(1 - \phi)^2 E_p^2 P_0}{9\pi^2(1 - \nu_p^2)^2}}. \quad (9)$$

3 砂土中剪切波波速

将式(9)代入式(3)得

$$V_s = \sqrt{\frac{G_{se}}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(5 - 4\nu_p)}{5(2 - \nu_p)} \frac{1}{\rho} \sqrt[3]{\frac{c^2(1 - \phi)^2 E_p^2 P_0}{9\pi^2(1 - \nu_p^2)^2}}}. \quad (10)$$

本文认为,式(10)中砂土颗粒所受围压 P_0 可视为其所处状态下的有效应力,则

$$P_0 = \sigma_h + \sigma_a = K_0(\bar{\gamma}z + \sigma_a). \quad (11)$$

式中: K_0 为静止土压力系数; $\bar{\gamma}$ 为土的平均重度, $\bar{\gamma} = \bar{\rho}g$, $\bar{\rho}$ 为土的平均质量密度, g 为重力加速度; z 为土的深度; σ_a 为附加应力.

式(11)可改写为

$$P_0 = K_0\bar{\gamma}\left(z + \frac{\sigma_a}{K_0\bar{\gamma}}\right) = K_0\bar{\gamma}(z + z_a). \quad (12)$$

式中: z_a 为附加应力的等效土层深度,当附加应力为 0 时, $z_a = 0$. 静止土压力系数 K_0 根据颗粒状材料的细观压缩变形机理^[8]得出的以下结论.

$$K_0 = \frac{1}{1 + 2\sin\phi}. \quad (13)$$

式中 ϕ 为砂土的内摩擦角.

综合式(10)、(12)、(13),并认为 $\bar{\rho} \approx \rho$, 得到砂土中剪切波速的计算公式为

$$V_s = \sqrt{\frac{B^2 E_p^2 g(z + z_a)}{9\pi^2 \rho_w^2 A(1 + 2\sin\phi)}}. \quad (14)$$

式中 ρ_w 为水的密度.

$$A = \frac{125(1 - \nu_p^2)^2(2 - \nu_p)^3}{27(5 - 4\nu_p)^3},$$

$$B = \frac{(0.0228 \cdot e^{[(1-\phi)/0.1231]} + 2.3929)(1 - \phi)}{d_s - (d_s - S_r)\phi},$$

d_s 为颗粒密度, S_r 为饱和度.

式(14)即砂土中剪切波速的计算公式,各因素对剪切波速的影响如图3 ~ 5 所示.

图3表明,在其他参数保持不变的情况下, V_s 随着 ϕ 的增大而减小,当 ϕ 从 0.25 增大到 0.45 时, V_s 减少了 26.81%,说明孔隙率对剪切波速影响显著;而当砂土的内摩擦角 ϕ 从 25° 增大到 40° 时, V_s 仅减少了 2.70%,说明砂土的内摩擦角对

剪切波速影响很小。

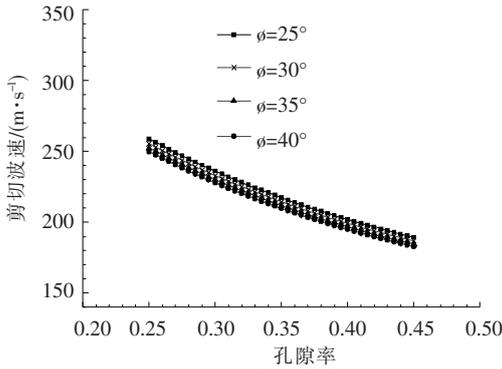


图3 孔隙率影响曲线

图4表明,在其他参数保持不变的情况下, V_s 随着 S_r 的增大而减小,当 S_r 从0增大到1.0时, V_s 减少了8.47%,说明饱和度对剪切波速影响较小,同时这也验证了砂土中的水对剪切波速影响较小的结论;而当砂土的土粒密度 d_s 从 2.65 g/cm^3 增大到 2.69 g/cm^3 时, V_s 仅减少了0.38%,说明砂土的土粒密度对剪切波速影响很小。

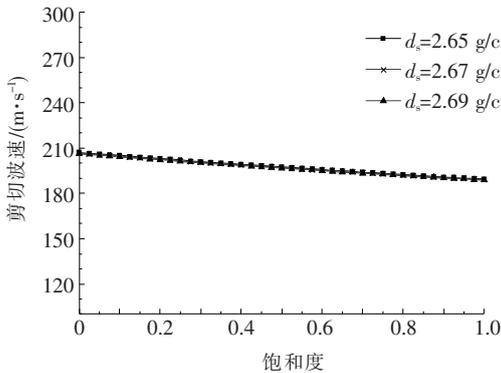


图4 饱和度影响曲线

图5表明,在其他参数保持不变的情况下, V_s 随着 E_p 的增大而增大,当 E_p 从5 GPa增大到30 GPa时, V_s 增大了81.71%,说明砂土颗粒的弹性模量对剪切波速影响显著;而当砂土颗粒的泊松比 ν_p 从0.2增大到0.3时, V_s 仅增大了0.36%,说明砂土颗粒的泊松比对剪切波速影响很小。

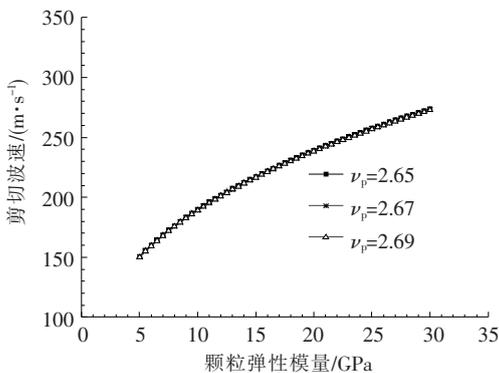


图5 颗粒弹性模量影响曲线

应力大小对 V_s 的影响方式则较为复杂.首先,有效应力的大小会直接影响 V_s ;同时,应力大小的变化会使颗粒弹性模量和孔隙率在一定范围内发生变化,从而间接影响 V_s .在颗粒弹性模量和孔隙率已测得的情况下, V_s 与有效应力的6次方根成正比。

一般认为,砂土的密实度是剪切波速的主要影响因素.这是因为在低应力状态下,砂土颗粒间接触点数较少,接触刚度不大,颗粒间孔隙减少的速率较快,密实度与剪切波波速的相关关系显著;但是当应力增大到一定程度,接触点数量达到极限值,颗粒间的接触刚度变得非常大,颗粒间孔隙不再较少,此时便达到了密实度为100%的状态;此后密实度已不再是影响剪切波速的主要因素,应力的大小变成主要影响因素。

分析表明:砂土的内摩擦角、土粒密度和颗粒泊松比对剪切波波速的影响很小;饱和度对剪切波波速的影响较小;孔隙率、砂土颗粒弹性模量及应力大小对剪切波波速的影响显著。

4 实例

因砂土的内摩擦角、土粒密度和颗粒泊松比对剪切波波速影响很小,故可以采用数值代替变量以简化公式,各参数的取值如表1所示.对于深层砂土,可认为其处于密实状态,取孔隙率 $\varphi = 0.40$ 进行近似计算.迄今为止,对于砂土颗粒的弹性模量的研究资料并不多,参考石英的弹性模量以及采用纳米压痕技术对水泥、磨细矿渣及粉煤灰颗粒的弹性模量的研究成果^[9],将颗粒弹性模量取为10 GPa.表2是浙江省多个工程勘察中测得砂土实测结果与本文方法计算结果的对比.图6为实测波速与计算波速随土层深度变化对比图.对比结果表明:本文方法计算值与实测值间的正负误差都在15%以内,能够反映出剪切波速随的增加趋势,并且能达到较好的计算准确度,从而验证了本文方法的合理性。

可见,随着土层深度的增加,实测剪切波速整体呈增加趋势,深度为50~60 m,剪切波速增长趋势稳定;深度超过60 m以后,剪切波速离散性变大.本文认为位于深层土体下的砂土所受附加应力可影响砂土剪切波速,而计算中未考虑,故导致上述离散现象的出现.此外,砂土颗粒的弹性模量对砂土剪切波速的影响显著,而砂土颗粒的弹性模量取决于砂土颗粒的矿物成分、颗粒形状、受约束状态及应力水平等因素,迄今为止,对砂土颗粒弹性模量的研究很少,这也是值得探讨和研究的方向。

表1 参数取值

颗粒泊松比	颗粒弹性模量/GPa	内摩擦角/(°)	饱和度	土粒密度/(g·cm ⁻¹)	附加应力/MPa	孔隙率
0.3	10	35	1.0	2.67	0	0.4

表2 实测结果与本文方法计算结果对比

序号	土层名称	土层深度/m	实测平均剪切波速/(m·s ⁻¹)	本文方法计算剪切波速/(m·s ⁻¹)	误差率/%
1	细砂	49.4~61.6	311.0	359.1	15.46
2	中砂	53.8~64.0	350.0	362.7	3.64
3	细砂	60.5~64.6	380.0	366.7	-3.51
4	细砂	70.6~77.4	429.0	377.1	-12.10
5	细砂	75.5~83.0	368.3	381.4	3.57
6	粉砂	82.2~87.4	388.0	385.7	0.58
7	粉砂	92.0~94.0	360.0	391.8	8.83
8	细砂	98.5~101.5	435.0	396.4	-8.87
9	粉砂	100.0~104.0	357.0	397.9	11.44
10	粉砂	138.0~166.0	395.0	424.6	7.50

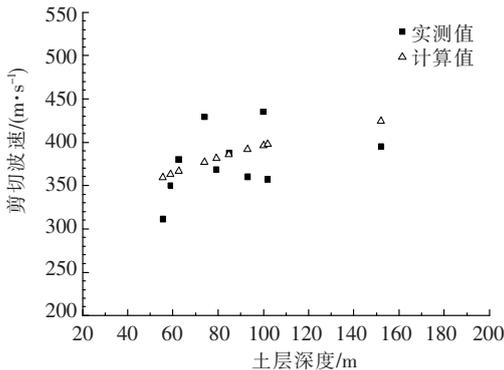


图6 实测波速与计算波速随土层深度变化对比

5 结论

1) 将砂土视为材料性质相同、大小相等的球形固体颗粒的随机堆积集合体,通过颗粒接触理论推导出砂土剪切模量,从而得到砂土剪切波速的方法是可行的.应用该方法对处于深层砂土进行剪切波计算,并与实测结果进行比较,对比结果说明了本文方法的合理性.

2) 颗粒实际接触点数目比理论模型的接触点数目要少,而砂土骨架的等效剪切模量与实际接触点关系密切,故采用实际接触点数目进行推导是更符合真实情况的.

3) 砂土的内摩擦角、土粒密度、颗粒泊松比和饱和度对剪切波波速影响较小;孔隙率、颗粒弹性模量和应力大小对剪切波波速影响较大.砂土颗粒的弹性模量与矿物成分、颗粒形状、受约束状态及应力水平等因素有密切联系,对砂土颗粒弹性模量进行系统的研究很有必要.

4) 应力状态也是影响砂土剪切波速的重要因素,尤其是当砂土处于高应力状态下,密实度已

经到达 100% 后,剪切波速会随着应力增长而继续增加.

参考文献:

[1] 刘旭. 多相介质弹性参数的研究及波速计算[D]. 北京:中国地震局地球物理研究所,2002.

[2] 钟晓雄,袁建新. 散粒体的细观组构与本构关系[J]. 岩土工程学报,1992,14(增刊):39-48.

[3] GREENWOOD J A, TRIPP J H. The elastic contact of rough spheres[J]. Journal of Applied Mechanics,1967,34:153-160.

[4] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity [M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[5] 赵明阶,吕卫兵. 多相土-石复合介质波动传播特性[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(增刊1):4917-4923.

[6] DIGBY P J. The effective elastic moduli of porous granular rocks[J]. Journal of Applied Mechanics, 1981,48:803-808.

[7] WILLIAM F. MUTPHY. Effects of microstructure and pore fluids on the acoustic properties of granular sedimentary materials [D]. Stanford: Stanford University, 1982.

[8] MATSUOKA H, SAKAKIBARA K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation [J]. Soils and Foundations, 1987,27(4):73-88.

[9] 赵庆新,孙伟,郑克仁,等. 水泥、磨细矿渣、粉煤灰颗粒弹性模量的比较[J]. 硅酸盐学报,2005,33(07):837-841.

(编辑 魏希柱)