

Winkler 地基上矩形层合厚板三维解析解

钟 阳, 田 斌, 李 锐

(大连理工大学 土木水利学院, 116024 辽宁 大连, zhongyang58@163.net)

摘 要: 为求解 Winkler 地基上矩形简支层合厚板的三维解析解, 采用有限积分变换和状态空间理论相结合的方法. 在分析过程中舍弃有关应力和位移函数的各种人为假定, 完全从三维弹性力学基本方程出发, 经过变量代换将关于应力和位移分量的偏微分方程组化为两个彼此独立的四阶、二阶矩阵微分方程, 根据结合面处状态向量的连续性求得沿板厚方向的状态向量传递方程, 最后经过有限积分逆变换得到了层合板的三维解析解. 通过计算实例验证了方法的正确性, 预先将求解矩阵进行降阶处理, 提高了求解效率.

关键词: 层合厚板; 有限积分变换; Cayley-Hamilton 定理; 三维解析解

中图分类号: O343.6

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2011)04-0109-05

Three-dimensional analytical solution of simply supported laminated thick rectangular plates on the winkler foundation

ZHONG Yang, TIAN Bin, LI Rui

(School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, 116024 Dalian, Liaoning, China, zhongyang58@163.net)

Abstract: Three-dimensional analytical solution of simply supported laminated thick rectangular plates on the Winkler foundation was derived by the finite integral transform method and state space theory. During the analysis process, the preselection of various stress and displacement functions used commonly in thick plate model was abandoned, and based on the basic elasticity equations and variable substitution, a system of partial differential equations with respect to stress and displacement components was reduced to two matrix differential equations, one was second order and another was fourth order. The transfer equation of laminated plates was derived according to the continuity of state space vector of joint surface, the three-dimensional analytical solution of simply supported laminated thick rectangular plates on the Winkler foundation were obtained by the finite integral inverse transform method. Numerical results demonstrate the validity of the method in this paper, and compared with other methods, this method can greatly improve the solution efficiency because of the technique of reduced order.

Key words: laminated thick rectangular plates; finite integral transform; Cayley-Hamilton theory; Three-dimensional analytical solution

层合板结构具有强度大、模量高、可设计性强等特点, 在土木工程、航空航天等领域得到了广泛应用, 因此如何精确求出层合板结构的挠度和应力, 为设计者提供准确可靠的数据一直是研究者追求的目标^[1-2]. 在板的计算理论中, Kirchhoff 薄板理论^[3] 和考虑一阶剪切变形的 Reissner、

Mindlin 理论应用最广^[4-5], 上述各种理论的共同点是求解过程中均预先人为假定板的应力或位移分量与坐标 z 的函数关系, 从而将三维弹性力学问题转化为平面问题进行求解. 但随着复合材料的发展, 一阶剪切变形理论计算得到的层间结合面应力无法满足设计要求, 于是研究者又相继提出了各种高阶理论^[6-7]. 实际上, 弹性板的求解属于三维问题, 以简化后的平面问题进行求解得到

的仅为三维问题的近似解,且无论是一阶还是高阶理论,都会由于采用人为预定的应力或位移函数而导致弹性力学基本方程的不相容,无法包含全部的弹性常数,这意味着某些弹性常数的变化对计算结果毫无影响,这显然与实际情况不相符.

近年来,为精确计算层合板结构,众多学者采用三维弹性理论对其进行研究,范家让^[8]、盛宏玉^[9]从六阶矩阵弹性力学微分方程出发,采用傅里叶级数法对弹性层合厚板进行了分析,该方法是国内较早的层合板三维计算理论,在工程中计算中得到了广泛应用;唐立民^[10]采用状态方程与有限元相结合的半逆解法求解了弹性矩形层合厚板,该方法仍属于半逆解法范畴.

本文舍弃了有关应力和位移函数的各种人为假定,完全从三维弹性力学的基本方程出发,将关于应力和位移分量的基本方程化为 2 个彼此独立的四阶、二阶矩阵微分方程,在有限积分变换域内得到了应力和位移的空间状态方程,再由 Cayley-Hamilton 定理求得沿板厚度 z 方向变化的传递矩

阵,再根据结合面处状态向量的连续性求得层合板状态向量传递方程,从而得到了挠度和应力分量沿板厚 z 方向变化的层合板三维解析解.

1 有限积分变换

积分变换法是求解高阶偏微分方程的有力工具,传统的积分变换方法一般仅用在无限或半无限域问题的求解中,而在矩形层合板有限域问题求解中应用的较少.

有限双正弦、余弦及混合积分正变换分别为

$$\left\{\begin{aligned}\bar{f}^{ss}(m,n) &= \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy, \\ \bar{f}^{ec}(m,n) &= \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy, \\ \bar{f}^{sc}(m,n) &= \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy, \\ \bar{f}^{cs}(m,n) &= \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy.\end{aligned}\right. \tag{1}$$

相应的逆变换为

$$\left\{\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{4}{ab} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{f}^{ss}(m,n) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ f(x,y) &= \frac{1}{ab} \bar{f}^{ec}(0,0) + \frac{2}{ab} \sum_{m=1} \bar{f}^{ec}(m,0) \cos \alpha_m x + \frac{2}{ab} \sum_{n=1} \bar{f}^{ec}(0,n) \cos \beta_n y + \\ &\quad \frac{4}{ab} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{f}^{ec}(m,n) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ f(x,y) &= \frac{2}{ab} \sum_{m=1} \bar{f}^{sc}(m,0) \sin \alpha_m x + \frac{4}{ab} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{f}^{sc}(m,n) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ f(x,y) &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1} \bar{f}^{cs}(0,n) \sin \beta_n y + \frac{4}{ab} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{f}^{cs}(m,n) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

式中: $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b, a$ 和 b 分别为板的长度和宽度.

2 层合厚板三维状态方程及解析解

为求解如图 1 所示 Winkler 地基上层合厚板的解析解,需完全从三维弹性力学基本方程出发进行计算.取局部坐标系下第 j 层如图 2 所示,层厚为 h_j ,对于简支厚板边界条件为

$$\left\{\begin{aligned}x = 0, a \text{ 时}, \sigma_x = 0, v = 0, w = 0, \\ y = 0, b \text{ 时}, u = 0, \sigma_y = 0, w = 0.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

根据文献[11]中方法,将三维弹性力学基本方程分解成彼此独立的四阶、二阶矩阵微分方程如式(4)、(5)所示,为表达简便,推导过程省略下标 j .

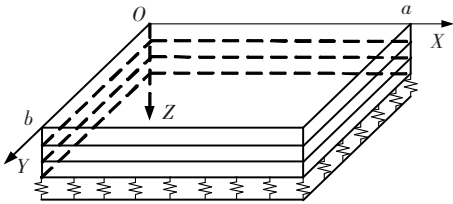


图 1 弹性层合厚板示意图

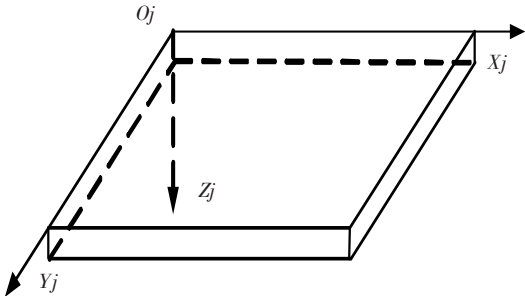


图 2 第 j 层厚板示意图

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_v \\ \sigma_z \\ w \\ \tau_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & \frac{1}{G} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-\mu}{1-\mu} & \frac{1}{G} \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ \frac{-2G}{1-\mu}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & \frac{-\mu}{1-\mu}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ \sigma_z \\ w \\ \tau_v \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_H \\ \tau_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{G} \\ -G(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_H \\ \tau_H \end{bmatrix}. \quad (5)$$

其中

$$u_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_v = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}, u_H = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\tau_H = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}.$$

$$(6)$$

分别对式(4)、(5)进行如式(1)前两式所示的二维有限正弦、余弦变换,考虑水平位移一阶偏导数与边界正应力的关系,并将边界条件(3)代入后可以得到

$$\frac{d}{dz} \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}}, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dz} \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{Y}}. \quad (8)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2 & \frac{1}{G} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-\mu}{1-\mu} & \frac{1}{G} \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ \frac{2Gk^2}{1-\mu} & \frac{\mu k^2}{1-\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{G} \\ Gk^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\mathbf{X}} = [\bar{u}_v^{ss}, \bar{\sigma}_z^{ss}, \bar{w}^{ss}, \bar{\tau}_v^{ss}]^T, \bar{\mathbf{Y}} = [\bar{u}_H^{cc}, \bar{\tau}_H^{cc}]^T,$$

$$k = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2}.$$

根据控制论的状态空间理论^[12],式(7)通解为

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{e}^{A z} \bar{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{T} \bar{\mathbf{X}}_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{e}^{B z} \bar{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{D} \bar{\mathbf{Y}}_0. \quad (10)$$

式中: $\bar{\mathbf{X}}$ 、 $\bar{\mathbf{Y}}$ 为沿板 z 方向任意厚度处的状态向量, $\bar{\mathbf{X}}_0$ 、 $\bar{\mathbf{Y}}_0$ 为板上表面 $z=0$ 处的初始状态向量. 可见,式(9)建立了任意深度状态向量与初始状

态向量即 $z=0$ 处状态向量之间的传递关系式,指数矩阵 $\mathbf{e}^{A z}$ 、 $\mathbf{e}^{B z}$ 即为传递矩阵,与每层板的弹性常数 E 、 μ 相关. 传递矩阵各元素经由 Cayley-Hamilton 定理计算,可得

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_v^{ss} \\ \bar{\sigma}_z^{ss} \\ \bar{w}^{ss} \\ \bar{\tau}_v^{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} & T^{14} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} & T^{24} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} & T^{34} \\ T^{41} & T^{42} & T^{43} & T^{44} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_v^{ss}(z=0) \\ \bar{\sigma}_z^{ss}(z=0) \\ \bar{w}^{ss}(z=0) \\ \bar{\tau}_v^{ss}(z=0) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_H^{cc} \\ \bar{\tau}_H^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{11} & D^{12} \\ D^{21} & D^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_H^{cc}(z=0) \\ \bar{\tau}_H^{cc}(z=0) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

式中 T^{ij} 、 D^{ij} 表达式为

$$T^{11} = \frac{1}{1-\mu} \left[(1-\mu) \cosh kz + \frac{kz}{2} \sinh kz \right],$$

$$T^{12} = \frac{1}{G(1-\mu)} \left(\frac{kz}{4} \sinh kz \right),$$

$$T^{13} = \frac{1}{1-\mu} \frac{k}{2} [kz \cosh kz + (1-2\mu) \sinh kz],$$

$$T^{14} = \frac{1}{G(1-\mu)} \frac{kz \cosh kz + (3-4\mu) \sinh kz}{4k},$$

$$T^{21} = -\frac{G}{1-\mu} kz \sinh kz,$$

$$T^{22} = \frac{1}{1-\mu} \left[(1-\mu) \cosh kz - \frac{kz}{2} \sinh kz \right],$$

$$T^{23} = \frac{G}{1-\mu} k (\sinh kz - kz \cosh kz),$$

$$T^{24} = -\frac{1}{1-\mu} \frac{1}{2k} [kz \cosh kz + (1-\mu) \sinh kz],$$

$$T^{31} = \frac{1}{1-\mu} \frac{1}{2k} [(1-2\mu) \sinh kz - kz \cosh kz],$$

$$T^{32} = \frac{1}{G(1-\mu)} \frac{(3-4\mu) \sinh kz - kz \cosh kz}{4k},$$

$$T^{33} = T^{22}, \quad T^{34} = -\frac{1}{G(1-\mu)} \frac{z}{4k} \sinh kz,$$

$$T^{41} = \frac{G}{1-\mu} k (kz \cosh kz + \sinh kz),$$

$$T^{42} = \frac{1}{1-\mu} \frac{k}{2} [kz \cosh kz - (1-2\mu) \sinh kz],$$
$$T^{43} = \frac{G}{1-\mu} k^3 z \sinh kz,$$
$$T^{44} = T^{11}, D^{11} = \cosh kz,$$
$$D^{12} = \frac{\sinh kz}{Gk}, D^{21} = Gk \sinh kz, D^{22} = \cosh kz.$$

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_z^{ss}(z=h) = k \overline{w}^{ss}(z=h), \\ \overline{\tau}_V^{ss}(z=h) = 0, \\ \overline{\tau}_H^{cc}(z=h) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

式(9)即为图 2 所示单层板空间状态向量的传递方程,对于如图 1 所示的 $N(N \geq 2)$ 层 Winkler 地基上层合厚板问题,由式(9)、(10)依次列出各层状态向量传递方程,考虑到层间结合面处状态向量的连续性,可得到

$$\overline{X}(m,n,z) = \prod_{i=N}^1 T(E_i, \mu_i, h_i, m, n) \overline{X}(m,n,0),$$
$$(13)$$

$$Y(m,n,z) = \prod_{i=N}^1 D(E_i, \mu_i, h_i, m, n) \overline{Y}(m,n,0).$$
$$(14)$$

式(13)、(14)分别为 4 阶、2 阶代数方程组,建立了层合板任意深度内的状态向量与上表面初始状态向量的传递关系. 式(13)、(14)即为厚板空间状态向量的解析解,对于 N 层的层合板,仅仅需要分别计算 N 个 4 阶、2 阶传递矩阵的乘积.

考虑 Winkler 地基上层合厚板受竖向荷载,初始状态向量中的应力分量可由层合板上表面荷载确定,在式(13)、(14)中,令 $z = h$, 根据层合板下表面应力边界条件可得到

$$\begin{bmatrix} \overline{\sigma}_x^{ss} \\ \overline{\sigma}_y^{ss} \\ \overline{\tau}_{xy}^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\alpha_m \beta_n G}{k^2} & 0 & \frac{2(\alpha_m^2 + \mu \beta_n^2) G}{(1-\mu)k^2} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 \\ \frac{2\alpha_m \beta_n G}{k^2} & 0 & \frac{2(\mu \alpha_m^2 + \beta_n^2) G}{(1-\mu)k^2} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 \\ \frac{(\beta_n^2 - \alpha_m^2) G}{k^2} & 0 & -\frac{2\alpha_m \beta_n G}{k^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_H^{ss} \\ \overline{\tau}_H^{ss} \\ \overline{u}_V^{cc} \\ \overline{\sigma}_z^{ss} \\ \overline{w}^{ss} \\ \overline{\tau}_V^{cc} \end{bmatrix}.$$
$$(17)$$

将已求得的状态向量代入上式即可得到 $[\overline{\sigma}_x^{ss}/G, \overline{\sigma}_y^{ss}/G, \overline{\tau}_{xy}^{cc}/G]^T$, 再通过相应的二维积分逆变换,即可得到任意深度处 $[u \ v \ w \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz} \ \sigma_z \ \sigma_x \ \sigma_y]^T$ 表达式.

4 算 例

采用 Mathematica^[13] 编程计算了 3 层板算例:

表 1 不同深度板中点挠度

10⁻⁶ m

坐标	(a/2, b/2, 0)	(a/2, b/2, h/5)	(a/2, b/2, 4h/5)	(a/2, b/2, h)
本文	1. 876	1. 883	1. 861	1. 852
文献[8]	1. 873	1. 887	1. 865	1. 858

求解式(15)可得到初始位移分量 $\overline{u}_V^{ss}(z=0)$ 、 $\overline{w}^{ss}(z=0)$ 、 $\overline{u}_H^{cc}(z=0)$, 将得到的初始状态向量代入式(13)、(14)即可得到层合板任意深度的状态向量;其中, $\overline{\sigma}_z$ 、 $\overline{w}$ 可直接由 $\overline{\sigma}_z^{ss}$ 、 $\overline{w}^{ss}$ 经有限积分逆变换式(2)中第一式得到;对式(6)前两式进行双正弦变换,后两式进行双余弦变换,联立求解可得到 $\overline{u}^{cs}$ 、 $\overline{v}^{sc}$ 、 $\overline{\tau}_{yz}^{sc}$ 、 $\overline{\tau}_{zx}^{cs}$, 最后经积分逆变换公式(2)中后两式即可解得 u 、 v 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} .

3 其他应力分量的求解

弹性力学空间问题共有 9 个应力和位移分量,前面已求得 $[\sigma_z \ \tau_{xz} \ \tau_{zy} \ u \ v \ w]^T$, 其余 3 个分量表达式为

$$\frac{\sigma_x}{G} = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\sigma_z}{G} + \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\mu}{1-\mu} \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\sigma_y}{G} = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\sigma_z}{G} + \frac{2\mu}{1-\mu} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$
$$(16)$$

为与状态向量相对应,分别对式(16)前两式和第三式进行二维有限域正、余弦变换,可得

均布荷载 $q_0 = 1 \text{ kN}$, $a = b = 1 \text{ m}$, $h = 0.1 a$, $h_1 = h_3 = 0.2 h$, $E_1 = E_3 = 2.1 \times 10^4 \text{ MPa}$, $E_2 = 2.1 \times 10^3 \text{ MPa}$, $\mu_1 = \mu_3 = 0.3$, $\mu_2 = 0.16$, 地基模量 $K = 350 \text{ MPa}$, 按文献[8]方法编程计算了对比数据,计算结果列于表 1~2.

表2 不同深度板应力 kPa

应力位置	σ_z ($x = a/2, y = b/2$)		σ_x ($x = a/2, y = b/2$)		τ_{xy} ($x = a/4, y = b/4$)		τ_{xz} ($x = a/4, y = b/4$)	
	本文	文献[8]	本文	文献[8]	本文	文献[8]	本文	文献[8]
上层上表面	-1.001	-1.002	-19.381	-19.378	-5.464	-5.464	0.000	0.000
上层下表面	-0.937	-0.935	-10.674	-10.670	-2.950	-2.951	0.573	0.572
中层上表面	-0.937	-0.935	-1.057	-1.059	-0.329	-0.331	0.573	0.572
中层下表面	-0.690	-0.691	0.797	0.796	0.353	0.355	0.575	0.573
底层上表面	-0.690	-0.691	10.844	10.842	3.151	3.153	0.575	0.573
底层下表面	-0.644	-0.644	19.385	19.385	5.651	5.652	0.000	0.000

从表1~2可见,本文与文献[8]计算方法所得结果完全一致,说明本文方法正确.图3为级数收敛速度图,可以看出挠度、应力收敛速度比较快.图4为求解效率比值图,其中, T 和 T' 分别为文献[8]和本文方法计算程序求解所需时间.由于预先对求解矩阵进行降阶处理,本文方法较文献[8]求解效率有了极大提升,求解 $z = 0$ 挠度时传递矩阵为单位矩阵,故对其效率提升仅为6.3倍,随着求解深度的增大和传递矩阵的连乘,效率提升非常明显,当 $z = h$ 时,挠度和应力的提升效率分别为16.5倍、18.4倍.

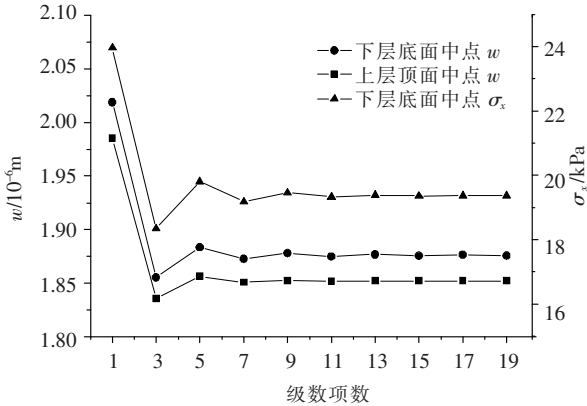


图3 挠度、应力收敛速度

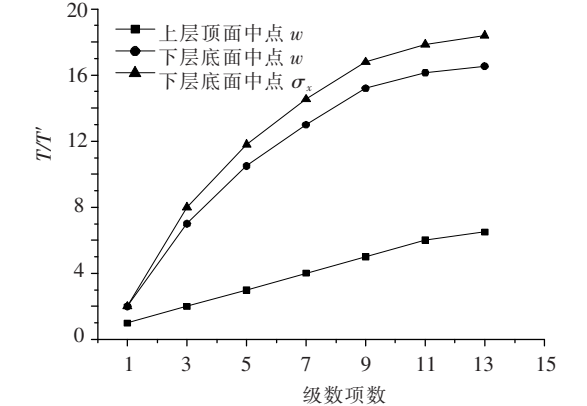


图4 运行时间比值

发,利用有限积分变换和状态空间理论相结合的方法推导出了 Winkler 地基上矩形层合简支厚板的三维解析解.

参考文献:

[1] 武兰河,赵永茂. 强厚度层合板的一种高阶单元[J]. 应用力学学报,2001,18(3):41-46.

[2] AHMET S. Fourier solution to a thick cross-ply levy type clamped plate problem[J]. Composite Structures, 2007, 79:481-492.

[3] 钟阳. 四边任意支承条件下弹性矩形薄板弯曲问题的解析解[J]. 应用力学学报,2005,22(2):293-297.

[4] REISSNER E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. Appl Mech, 1945, 12:69-77.

[5] MINDLIN E. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1951,18:31-38.

[6] LO K H,CHRISTRNSEN R M,WU E M. A high order theory of plate deformation, part2:laminated plates[J]. ASME, Journal of Applied Mechanics,1977,44:669-676.

[7] REDDY J N. A simple higher order theory for laminated composite plates [J]. ASME, Journal of Applied Mechanics,1984,51:745-752.

[8] 范家让. 强厚度层合板壳的精确理论[M]. 北京:科学出版社,1996.

[9] 盛宏玉. 一种改进的 Pasternak 地基模型及层合地板的解析解[J]. 土木工程学报,2006,39(1):87-97.

[10] 唐立民. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和层合板的计算[J]. 计算力学学报,1992,9(4):347-360.

[11] 钟阳. 弹性层状体系求解方法[M]. 北京:科学出版社,2007:134-144.

[12] 陆文. 控制理论基础[M]. 北京:清华大学出版社,2008:23-53.

[13] 洪维恩. 数学运算大师 Mathematica4[M]. 北京:人民邮电出版社,2002:245-265.

5 结 语

在分析过程中舍弃了有关应力和位移函数的各种人为假定,完全从三维弹性力学基本方程出

(编辑 赵丽莹)