

近地轨道电磁编队飞行相对轨道动力学建模

侯振东, 曹喜滨, 张锦绣

(哈尔滨工业大学 卫星技术研究所, 150080 哈尔滨, hzd1988120@126.com)

摘要: 本文将电磁力引入编队飞行应用中,在考虑地球扁率和大气摄动情况下,建立了电磁编队飞行相对轨道动力学模型. 基于磁偶极子假设,推导了编队飞行任意两颗卫星间电磁力模型,采用 Hill 方程的形式给出了电磁编队飞行的相对轨道动力学表述. 分别对编队飞行任意两颗卫星间电磁力、大气阻力以及地球扁率摄动进行线性化,得到了电磁编队飞行线性化相对轨道动力学模型. 仿真结果表明,线性化相对轨道动力学模型合理可行,与非线性模型相比,运行 3 圈后误差为 0.05 ~ 5 m,误差主要来自于电磁力线性化.

关键词: 电磁编队飞行; 轨道动力学; 磁偶极子; 线性化

中图分类号: V412

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2012)03-0006-07

Relative orbital dynamics to LEO electromagnetic formation flying

HOU Zhen-dong, CAO Xi-bin, ZHANG Jin-xiu

(Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China, hzd1988120@126.com)

Abstract: Taking account of earth oblateness and atmospheric drag, this article established the relative orbital dynamics for electromagnetic formation flying. The model of electromagnetic force is derived by the dipole approximation of the coils, and the relative orbital dynamics of EMFF is derived by Hill equation. Utilizing the linearization of electromagnetic force between any two satellites, atmospheric drag and earth oblateness, the linear relative orbital dynamics is presented. The results indicate that the linear relative orbital dynamics is reasonable and feasible. Compared to the nonlinear dynamics, the error of 3 revolution is about 0.05 m ~ 5 m, which is resulted from the linearization of electromagnetic force.

Key words: EMFF; orbital dynamics; dipole; linearization

卫星编队飞行技术是近几年提出的空间科学领域的新技术,具备系统成本低、性能好、可靠性高和适应性强等优点. 但由于地球扁率、大气阻力等影响,通常需要附加作用力与力矩对成员卫星的相对位置与姿态进行控制. 传统采用的喷气推进由于能量消耗,影响编队飞行寿命,且推力器排出的羽流可能污染邻近卫星的光学器件表面. 而电磁编队飞行(EMFF)利用通电线圈产生的电磁力来实现编队构型的保持与控制,并由太阳能提供机动能量,且不存在羽流污染,在编队飞行中将

会有很大的应用前景.

自电磁编队飞行的概念提出以来,国内外学者进行了先期探索和研究,取得了部分成果. 其中, Schweighart^[1]提出了近场、中场和远场三种电磁力模型. Hashimoto^[2]与 Kaneda^[3]等分析了低地球轨道(LEO)的电磁编队飞行动力学模型,并对在同一平面运行的相对距离固定的双星系统进行了详细分析. Elias^[4]提出了电磁编队飞行的通用非线性动力学模型,对卫星星体、飞轮、电磁体以及飞轮和星体的连接部分都建立了数学模型. Elias^[5]还研究了稳定旋转的双星系统动力学,该双星系统绕其质心旋转,同时径向距离保持恒定,维持这种运动的径向力由电磁力提供,在论述中作者将非线性动力学模型在理想轨迹附近线性化,并进行了稳定性分析.

收稿日期: 2010-10-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11002040); 中国博士后科学基金特别资助项目(200902389).

作者简介: 侯振东(1988—),男,硕士研究生;

曹喜滨(1963—),男,长江学者特聘教授,博士生导师.

本文假设编队系统中每颗卫星都安装3个正交的通电线圈,通过改变每个线圈的电流大小、方向,可产生任意大小、方向的电磁控制力与力矩,实现编队构型的保持与控制.另外星体上还安装3个正交的飞轮,用来控制星体姿态.产生电磁体的激励电流和飞轮旋转所需的能源由太阳帆板提供.本文在此基础上,考虑大气摄动、地球扁率 J_2 摄动,建立电磁编队飞行的非线性相对轨道动力学模型,并对相对轨道动力学方程进行线性化,得到参考坐标系下的线性化相对轨道动力学方程.

1 坐标系定义

为叙述方便,建立以下4种直角坐标系.坐标系示意图见图1.

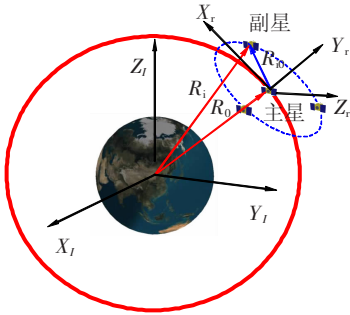


图1 坐标系定义

地心惯性坐标系 F_I :原点在地心 O_e ; X_I 轴指向赤道平面与黄道平面相交接线的升交点(即春分点);地球自转轴为 Z_I ;选择 Y_I 使其与 X_I 、 Z_I 满足右手坐标.

主星参考坐标系 F_r :原点在主星质心 O_r ; Y_r 轴沿地心与主星的连线方向,指向主星; X_r 轴指向主星速度方向; Z_r 轴与 X_r 、 Y_r 构成右手坐标系,指向轨道面负法线方向.

卫星轨道坐标系 F_o :原点在于卫星质心 O_o .各轴指向类似于主星参考坐标系,只不过卫星轨道坐标系针对的是相应的卫星,而非主星.

线圈安装坐标系 F_m :原点在于卫星质心 O_m (即 O_o); X_m 、 Y_m 、 Z_m 三轴分别沿星上3个正交的通电线圈平面的法线方向.

为叙述方便,记编队卫星数目为 n ,编号依次为 $0, 1, 2, \dots, n-1$,其中卫星0为主星.

2 任意两星间电磁力建模

电磁编队飞行的电磁力由卫星上的通电线圈产生.如果用 f_{ij} 表示卫星 B 上第 j 个线圈产生的磁场对卫星 A 上第 i 个线圈的作用力,则两颗卫星间的电磁力为

$$\mathbf{F}_{AB} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 f_{ij}. \quad (1)$$

参照文献[1],建立远场模型.以任意两颗卫星 i 和 j 为例,记 $\boldsymbol{\mu}_i$ 为卫星 i 的磁偶极子矢量, $\boldsymbol{\mu}_j$ 为卫星 j 的磁偶极子矢量, μ_0 为真空磁导率, $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i$ 为两颗卫星的相对矢径, R_{ij} 为相应距离.则卫星 j 对卫星 i 的电磁力与电磁力矩分别为

$$\mathbf{F}_{ij}^m = -\frac{3\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j}{R_{ij}^5} \mathbf{R}_{ij} + \frac{\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^5} \boldsymbol{\mu}_j + \frac{\boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^5} \boldsymbol{\mu}_i - 5 \frac{(\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{R}_{ij}) \cdot (\boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{R}_{ij})}{R_{ij}^7} \mathbf{R}_{ij} \right), \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^m = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \left(\frac{3\boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^5} \mathbf{R}_{ij} - \frac{\boldsymbol{\mu}_j}{R_{ij}^3} \right). \quad (3)$$

为便于分析,假设以反作用飞轮完成卫星的姿态控制,在建模过程中暂不考虑电磁力矩对相对轨道运动的影响.

式(2)中, $\boldsymbol{\mu}_i$ 在安装坐标系下可表述为

$$\mathbf{F}_m \boldsymbol{\mu}_i = [n_{ix} I_{ix} A_{ix} \quad n_{iy} I_{iy} A_{iy} \quad n_{iz} I_{iz} A_{iz}]^T. \quad (4)$$

式中: n_{ix} 表示安装坐标系 X_m 轴的线圈匝数; I_{ix} 表示 X_m 轴的电流强度; A_{ix} 表示 X_m 轴的线圈所围面积; F_m 表示分量所在坐标系,其他符号的意义依此类推.

采用 zxy 顺序的欧拉角转换形式,卫星 i 的轨道坐标系到安装坐标系的坐标转换矩阵为

$$\mathbf{C}_{mo}^i = \mathbf{C}_y^i(\theta) \mathbf{C}_x^i(\varphi) \mathbf{C}_z^i(\psi). \quad (5)$$

采用 zxz 顺序的欧拉角变换,地心惯性坐标系到卫星 i 的轨道坐标系的坐标转换矩阵为

$$\mathbf{C}_{ol}^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{C}_z^i(f) \mathbf{C}_x^i(\bar{i}) \mathbf{C}_z^i(\Omega). \quad (6)$$

式中 Ω 为卫星的升交点赤经, $\bar{i}$ 为轨道倾角, f 为纬度幅角.

由参考坐标系的定义可知,地心惯性坐标系到主星参考坐标系的转换矩阵与式(6)相似.

由公式(5)、(6)可得 $\boldsymbol{\mu}_i$ 在地心惯性坐标系下的表达式为

$$\mathbf{F}_I \boldsymbol{\mu}_i = (\mathbf{C}_{ol}^i)^T (\mathbf{C}_{mo}^i)^T [n_{ix} I_{ix} A_{ix} \quad n_{iy} I_{iy} A_{iy} \quad n_{iz} I_{iz} A_{iz}]^T. \quad (7)$$

式中 $\boldsymbol{\mu}_j$ 在地心惯性坐标系下的表述与 $\boldsymbol{\mu}_i$ 类似.将公式(5)~(7)代入式(2),可得卫星 j 对卫星 i 的电磁力在地心惯性坐标系下的分量形式,将作为仿真程序的理论基础.

由式(2)~(7)可见,两颗卫星间的电磁力与两星的磁偶极子相耦合,与相对距离的四次方成反比,具有强烈的非线性.而磁偶极子是两颗卫星姿态及线圈电流的函数(一般情况下线圈匝数与所围面积是常数).结合电磁力产生的机理与公

式分析可知,任意两星间的电磁力是两星相对位置、相对姿态及各线圈电流的1个非线性函数.

卫星*i*的主星参考坐标系到安装坐标系的转换矩阵 $\mathbf{C}_{mr}^i$ 为

$$\mathbf{C}_{mr}^i = \mathbf{C}_y^i(\bar{\theta})\mathbf{C}_x^i(\bar{\varphi})\mathbf{C}_z^i(\bar{\psi}). \quad (8)$$

式中 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{\varphi}$ 、 $\bar{\psi}$ 为相应的欧拉转角. 则 $\boldsymbol{\mu}_i$ 在主星参考坐标系下可表示为

$${}^F_r\boldsymbol{\mu}_i = (\mathbf{C}_{mr}^i)^T [n_{ix}I_{ix}A_{ix} \quad n_{iy}I_{iy}A_{iy} \quad n_{iz}I_{iz}A_{iz}]^T. \quad (9)$$

同理,将式(9)代入式(2)中,可得卫星*j*对卫星*i*的电磁力在主星参考坐标系下的分量形式.

理论上编队卫星所受的电磁力应包括地磁场的作用. 但由参考文献[6]可知,在轨道高度不低于200 km,编队距离几十米的情况下,地磁场对卫星的电磁力至少比两星相互作用的电磁力小1个数量级,因此在电磁力建模时可以忽略地磁场对卫星的影响.

3 线性化相对轨道动力学模型建立

相对轨道动力学方程建立在参考坐标系下. 参照希尔方程,可得卫星*i*的相对轨道动力学方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_i - \omega^2 x_i + 2\omega\dot{y}_i + \dot{\omega}y_i + \frac{\mu_e}{R_0^3}x_i = f_{ix}^m + f_{ix}^r + f_{ix}^J + f_{ix}^d; \\ \ddot{y}_i - \omega^2 y_i - 2\omega\dot{x}_i - \dot{\omega}x_i - 2\frac{\mu_e}{R_0^3}y_i = f_{iy}^m + f_{iy}^r + f_{iy}^J + f_{iy}^d; \\ \ddot{z}_i + \frac{\mu_e}{R_0^3}z_i = f_{iz}^m + f_{iz}^r + f_{iz}^J + f_{iz}^d. \end{cases} \quad (10)$$

式中: ω 为主星轨道角速度; μ_e 为引力常数; m 为卫星质量; R_0 为主星地心距;且

$$[f_{ix}^m \quad f_{iy}^m \quad f_{iz}^m]^T = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m - \sum_{j=1}^{n-1} {}^F_r\mathbf{F}_{0j}^m \right), \quad (11)$$

$$[f_{ix}^r \quad f_{iy}^r \quad f_{iz}^r]^T = \frac{1}{m} ({}^F_r\mathbf{F}_{ri} - {}^F_r\mathbf{F}_{r0}), \quad (12)$$

$$[f_{ix}^J \quad f_{iy}^J \quad f_{iz}^J]^T = {}^F_r\mathbf{J}_2^i - {}^F_r\mathbf{J}_2^0. \quad (13)$$

其中 ${}^F_r\mathbf{F}_{ri}$ 、 ${}^F_r\mathbf{F}_{r0}$ 、 ${}^F_r\mathbf{J}_2^i$ 、 ${}^F_r\mathbf{J}_2^0$ 分别为卫星*i*与主星的气动阻力和 J_2 摄动加速度. 为简化相对轨道动力学方程,下面对电磁力、 J_2 摄动及大气阻力线性化.

3.1 电磁力线性化

在多颗卫星(多于两颗)的电磁编队飞行中,每两颗卫星之间都会产生电磁力. 多颗卫星编队的电磁力实质上是任意两颗卫星间电磁力的叠加. 为方便起见,本文先研究双星编队系统,两颗

卫星标号为*i*、*j*. 由坐标系定义可知,卫星0为主星. 这里以卫星*i*为主星来分析卫星*i*、*j*之间的电磁力线性化方法. 由于卫星姿态由飞轮协同控制,理论上可将卫星姿态稳定在任意方位. 为方便讨论,假设在飞轮作用下,各卫星的线圈安装坐标系与主星参考坐标系指向重合. 在参考坐标系下记 $\mathbf{R}_{ij} = [x \quad y \quad z]^T$. 由式(9)可得:

$${}^F_r\boldsymbol{\mu}_i = [\mu_{ix} \quad \mu_{iy} \quad \mu_{iz}]^T = [n_{ix}I_{ix}A_{ix} \quad n_{iy}I_{iy}A_{iy} \quad n_{iz}I_{iz}A_{iz}]^T, \quad (14)$$

$${}^F_r\boldsymbol{\mu}_j = [\mu_{jx} \quad \mu_{jy} \quad \mu_{jz}]^T = [n_{jx}I_{jx}A_{jx} \quad n_{jy}I_{jy}A_{jy} \quad n_{jz}I_{jz}A_{jz}]^T. \quad (15)$$

由式(14)、(15)及式(2)可得到在上述假设条件下的电磁力表达式为

$$\begin{aligned} {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m = & -\frac{3\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mu_{ix}\mu_{jx} + \mu_{iy}\mu_{jy} + \mu_{iz}\mu_{jz}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \right. \\ & \frac{\mu_{ix}x + \mu_{iy}y + \mu_{iz}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{bmatrix} \mu_{jx} \\ \mu_{jy} \\ \mu_{jz} \end{bmatrix} + \frac{\mu_{jx}x + \mu_{jy}y + \mu_{jz}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{bmatrix} \mu_{ix} \\ \mu_{iy} \\ \mu_{iz} \end{bmatrix} - \\ & \left. 5 \frac{(\mu_{ix}x + \mu_{iy}y + \mu_{iz}z)(\mu_{jx}x + \mu_{jy}y + \mu_{jz}z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

由式(16)可知在假设条件下, $\mathbf{F}_{ij}^m$ 是卫星*i*、*j*的相对位置及线圈电流的函数,消除了坐标转换带来的三角函数矩阵的影响. 将影响 $\mathbf{F}_{ij}^m$ 的变量组合,记为列向量 $\mathbf{S}$,即

$$\mathbf{S} = [x \quad y \quad z \quad I_{ix} \quad I_{iy} \quad I_{iz} \quad I_{jx} \quad I_{jy} \quad I_{jz}]^T. \quad (17)$$

利用泰勒定理对 $\mathbf{F}_{ij}^m$ 在理想点

$$\mathbf{S}_0 = [x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad I_{i0} \quad I_{i0} \quad I_{i0} \quad I_{j0} \quad I_{j0} \quad I_{j0}]^T$$

展开得

$${}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}) = {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0) + [\nabla {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0)]^T \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{S}_0). \quad (18)$$

式中 $[\nabla {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0)]^T$ 可通过对式(16)求梯度得到. 由梯度计算知 $[\nabla {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0)]^T$ 为 3×9 阶矩阵,可用Matlab的符号运算求出,但鉴于表述冗长,这里不详细列出来.

记 $\mathbf{M} = [\nabla {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0)]^T$,则对双星电磁编队飞行,由式(11)及(18)可得

$$\begin{aligned} [f_{jix}^m \quad f_{jix}^m \quad f_{jiz}^m]^T = & \frac{1}{m} ({}^F_r\mathbf{F}_{ji}^m - {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m) = \\ & -\frac{2}{m} \mathbf{M}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_0) - \frac{2 {}^F_r\mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0)}{m}. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(19)可知,根据某一理想点 $\mathbf{S}_0$ 可求出任意 $\mathbf{S}$ 处的电磁力,电磁力简化为 $\mathbf{S}$ 的线性函数. 但

这一表述基于泰勒展开定理, 舍去二阶以上表达式, 只在 $\mathbf{S} - \mathbf{S}_0$ 较小时精确成立. 因此为达到精度要求, 实际应用中需要实时校正理想点 $\mathbf{S}_0$.

下面推导 n 颗卫星相互作用时电磁力的线性化. 先假定有多颗主星, 表述 $\mathbf{F}_{ij}^m (i < j)$ 时以卫星 i 为主星, 按上述方法可表述如下:

$$\mathbf{F}_r \mathbf{F}_{ij}^m = \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_{ij}^0) + \mathbf{M}_{ij}(\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^0). \quad (20)$$

式中 $\mathbf{S}_{ij}^0$ 表示卫星 j 相对卫星 i 的展开点向量, 包括位置与电流 6 个变量. $\mathbf{S}_{ij}$ 表示卫星 j 相对卫星 i 的任一时刻位置、线圈电流. $\mathbf{M}_{ij}$ 表示卫星 i, j 的电磁力梯度.

当 $i > j$ 时, 易知 $\mathbf{F}_{ij}^m = -\mathbf{F}_{ji}^m$, 即 $\mathbf{F}_{ij}^m$ 也可按上述方法表述. 实际上, n 颗卫星的电磁编队飞行只能有 1 颗主星, 动力学方程也将表述在它的参考坐标系下. 因此, 要把多颗卫星的电磁力表述转换到同一参考坐标系下. 记 $\mathbf{C}_{0k}$ 为卫星 k 的参考坐标系到主星 (即卫星 0) 的参考坐标系的方向余弦矩阵. 则可得

$$\frac{1}{m} \left(\sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{ij}^m - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{0j}^m \right) = \mathbf{A}_i - \frac{1}{m_i} \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_{0j} \mathbf{M}_{ji} \cdot \mathbf{S}_{ji} + \frac{1}{m_j} \sum_{j=i+1}^{n-1} \mathbf{C}_{0i} \mathbf{M}_{ij} \cdot \mathbf{S}_{ij} - \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{M}_{0j} \cdot \mathbf{S}_{0j}. \quad (21)$$

记

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i = & -\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{i-1} [\mathbf{C}_{0j} \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{ji}^m(\mathbf{S}_{ji}^0) - \mathbf{M}_{ji} \cdot \mathbf{S}_{ji}^0] + \\ & \frac{1}{m_j} \sum_{j=i+1}^{n-1} [\mathbf{C}_{0i} \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_{ij}^0) - \mathbf{M}_{ij} \cdot \mathbf{S}_{ij}^0] - \\ & \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n-1} [\mathbf{F}_r \mathbf{F}_{0j}^m(\mathbf{S}_{0j}^0) - \mathbf{M}_{0j} \cdot \mathbf{S}_{0j}^0]. \end{aligned}$$

为线性化的常数项.

由式 (21) 可知, 多颗卫星的电磁编队飞行中电磁力的线性化表述还有坐标转换矩阵的影响, 增加了电磁力表达式的耦合性. 这是由电磁力的作用机理决定的, 给实际应用带来困难. 对于多星电磁编队飞行的电磁力线性化, 本文只做初步的分析总结.

3.2 气动力线性化

假设 n 颗卫星气动参数的 C_D 和密度 ρ 均相同, 有一定的面质比偏差. 记主星迎流面面积为 A , 卫星 i 迎流面面积为 $A + \delta A$. 则卫星 i 的气动阻力在主星参考坐标系下表述为

$$\mathbf{F}_r \mathbf{F}_i = -\frac{1}{2} C_D (A + \delta A) \rho |\dot{\mathbf{R}}_i| \dot{\mathbf{R}}_i, \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_i = [\dot{x} + \omega y + R_0 \omega \quad \dot{y} - \omega x + R_0 \quad \dot{z}]^T. \quad (23)$$

分别对式 (22) 中的 $[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$ 、 $[x \quad y \quad z]^T$ 、 δA 求梯度, 可导出

$$[f_{0ix}^r \quad f_{0iy}^r \quad f_{0iz}^r]^T = \frac{1}{m} (\mathbf{F}_r \mathbf{F}_{ri} - \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{r0}) =$$

$$\mathbf{C}_r \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_r \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{1}{2m} C_D \delta A \rho \cdot$$

$$\sqrt{(R_0 \omega)^2 + (R_0)^2} \begin{bmatrix} R_0 \omega \\ R_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

其中:

$$\mathbf{C}^r = -\frac{1}{2m} C_D A \rho \frac{1}{\sqrt{R_0^2 \omega^2 + R_0^2}} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 2R_0^2 \omega^2 + R_0^2 & R_0 R_0 \omega & 0 \\ R_0 R_0 \omega & 2R_0^2 + R_0^2 \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & R_0^2 \omega^2 + R_0^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}^r = -\frac{1}{2m} C_D A \rho \frac{1}{\sqrt{R_0^2 \omega^2 + R_0^2}} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -R_0 R_0 \omega^2 & 2R_0^2 \omega^3 + R_0^2 \omega & 0 \\ -2R_0^2 \omega - R_0^2 \omega^3 & R_0 R_0 \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 J_2 摄动线性化

结合本文的坐标系定义, 对参考文献 [7] 的公式略作修改, 可得

$$\begin{bmatrix} f_{0ix}^J \\ f_{0iy}^J \\ f_{0iz}^J \end{bmatrix} = -\frac{3\mu_e J_2 R_c^2}{2R_0^5} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}. \quad (25)$$

式中:

$$C_{11} = 1 + 2\sin^2 \bar{i}_0 - 7\sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 f_0,$$

$$C_{12} = -4\sin^2 \bar{i}_0 \sin 2f_0,$$

$$C_{13} = -\sin 2\bar{i}_0 \cos f_0,$$

$$C_{21} = -4\sin^2 \bar{i}_0 \sin 2f_0,$$

$$C_{22} = -4(1 - 3\sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 f_0),$$

$$C_{23} = 4\sin(2\bar{i}_0) \sin f_0,$$

$$C_{31} = -\sin(2\bar{i}_0) \cos f_0,$$

$$C_{32} = 4\sin(2\bar{i}_0) \sin f_0,$$

$$C_{33} = 3 - 2\sin^2 \bar{i}_0 - 5\sin^2 f_0 \sin^2 \bar{i}_0.$$

其中 $\bar{i}_0$ 、 f_0 分别为主星的轨道倾角和纬度幅角.

3.4 相对轨道动力学方程最终表述

略去未知干扰项, 由式 (10) ~ (25) 可得卫星 i 在主星参考坐标系下的线性化相对轨道动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{W}' - \mathbf{C}^r) \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{U} + \mathbf{W} - \mathbf{W}^r - \mathbf{J}) \mathbf{X} =$$

$$\frac{1}{m} \left(\sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{ij}^m - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{F}_r \mathbf{F}_{0j}^m \right) + \delta \mathbf{F}_r.$$

其中:

$$\mathbf{W}' = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega & 0 \\ -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \frac{\mu_e}{R_0^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{J} = -\frac{3\mu_e J_2 R_e^2}{2R_0^5} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\omega^2 & \dot{\omega} & 0 \\ -\dot{\omega} & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta \mathbf{F}_r = -\frac{1}{2m} C_0 \delta A \rho \sqrt{(R_0 \omega)^2 + (\dot{R}_0)^2} [R_0 \omega \quad \dot{R}_0 \quad 0]^T,$$
$$\mathbf{X} = [x \quad y \quad z]^T.$$

针对两颗卫星的电磁编队飞行,略去未知干扰因素,公式可简化为

$$\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{W}' - \mathbf{C}^r) \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{U} + \mathbf{W} - \mathbf{W}^r - \mathbf{J}) \mathbf{X} = -\frac{2}{m} \mathbf{M}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_0) - \frac{2^{F_r} \mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0)}{m} + \delta \mathbf{F}_r. \quad (26)$$

式(26)是相对位置 $[x \ y \ z]^T$ 及控制量 $[I_{ix} \ I_{iy} \ I_{iz} \ I_{jx} \ I_{jy} \ I_{jz}]^T$ 的线性微分方程组,对控制算法设计及其他理论分析带来便利.

经分析,式(26)还可整理为状态空间的表达式.选状态变量为 $\mathbf{x} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ x \ y \ z]^T$,控制量 $\mathbf{I} = [I_{ix} \ I_{iy} \ I_{iz} \ I_{jx} \ I_{jy} \ I_{jz}]^T$.式(26)的状态空间描述如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{I} + \mathbf{F};$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{W}' + \mathbf{C}^r & -\mathbf{U} - \mathbf{W} + \mathbf{W}^r + \mathbf{J} + \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{2}{m} \mathbf{M} \mathbf{S}_0 - \frac{2^{F_r} \mathbf{F}_{ij}^m(\mathbf{S}_0)}{m} + \delta \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

式中: $\mathbf{E}$ 为 3×3 阶单位矩阵; $\mathbf{M}_1 \ \mathbf{M}_2$ 为矩阵 $-2\mathbf{M}/m$ 的子式,且 $-2\mathbf{M}/m = [\mathbf{M}_1 \ \mathbf{M}_2]$, $\mathbf{M}_1$ 为 3×3 阶矩阵, $\mathbf{M}_2$ 为 3×6 阶矩阵; $\mathbf{F}$ 为常数向量.

4 仿真及结果分析

为考核线性化相对动力学模型的可用性及精度,对线性化相对轨道动力学模型与未线性化轨道动力学模型分别进行仿真分析.仿真中设定主星与从星各轴线圈匝数、所围面积相同.大气密度查表可得.表1给出初始时刻两颗卫星的轨道参数.两颗卫星的其他设计参数见表2.轨道参数的

选择以构成串行编队为约束,卫星间距约为20 m.不失一般性,从星的三轴电流均设为 $I = I_0 + \delta I = [2000 + 100\sin(\pi t)] \text{ A}$,主星的三轴电流均设为 $I_0 = 2\ 000 \text{ A}$.

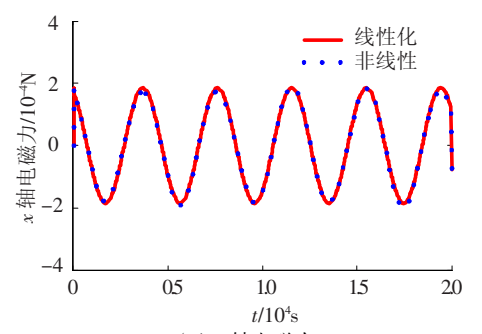
表 1 卫星轨道参数

卫星	<i>a</i> /km	<i>e</i>	$\Omega/(^\circ)$	<i>i</i> / $(^\circ)$	$\omega/(^\circ)$	$\theta/(^\circ)$
卫星 1	6 882	0	145	97.366	270	0
卫星 2	6 882	0	145	97.366	270	1.67×10^{-4}

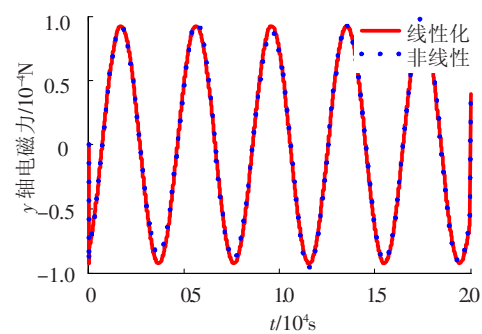
表 2 卫星其他设计参数

卫星	气动参数	迎风面积/ m ²	各轴线 圈匝数	各轴线圈 面积/m ²	卫星质量/kg
卫星 1	2.2	0.5	5	3.14	300
卫星 2	2.2	0.5×1.01	5	3.14	300

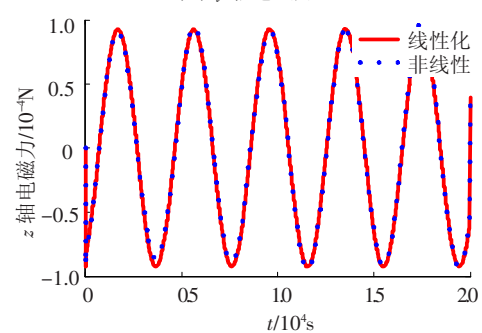
在上述条件下对线性化与非线性的动力学模型进行仿真,电磁力线性模型与非线性模型的变化曲线见图2.线性模型与非线性模型的运动情况见图3.



(a) x轴电磁力



(b) y轴电磁力



(c) z轴电磁力

图 2 电磁编队线性模型与非线性模型的电磁力对比

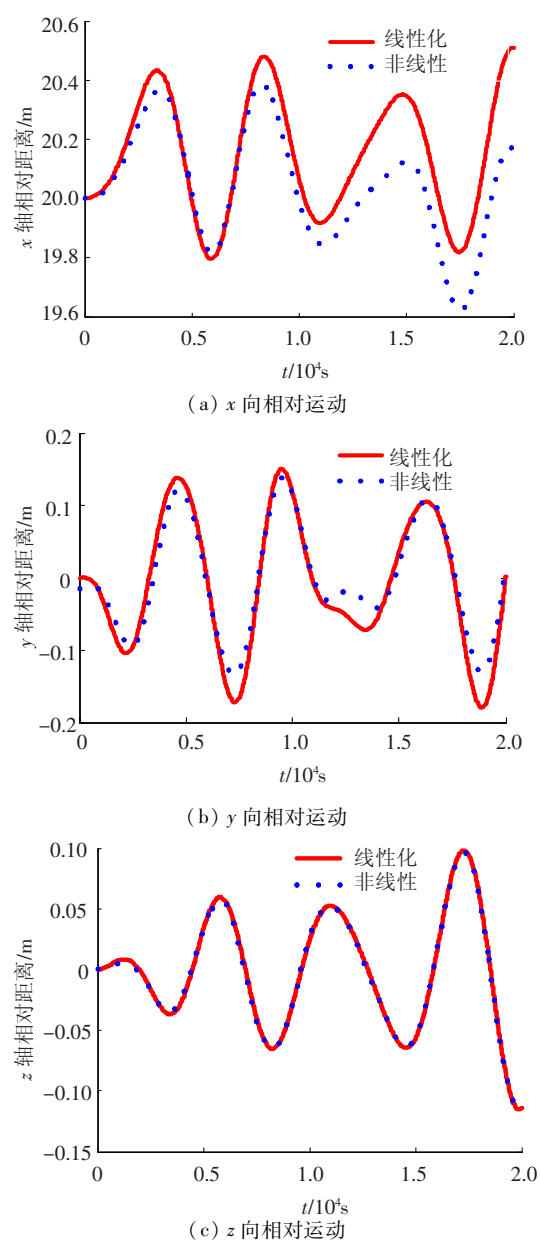


图3 电磁编队线性模型与非线性模型精度对比

由图2可见,在20 000 s的仿真时间内,电磁力线性模型与非线性模型计算值几乎一致,误差不超过10%,说明电磁力线性化是合理的。

由图3可见,在20 000 s的仿真时间(卫星轨道周期约5 900 s,即卫星运行3个周期多)内,线性模型与非线性模型运行轨迹几乎重合,线性模型与非线性模型的主从星相对运动在主星参考坐标系的 y 、 z 两轴误差不会发散, x 轴误差逐渐发散,在仿真结束时有0.3 m的误差。单独分析电磁力、 J_2 摄动等每一项单独作用力线性化对模型精度的影响。仿真结束时,电磁力线性化可使模型误差达0.2 m,其他作用(气动阻力线性化、 J_2 摄动线性化及Hill方程误差)对模型精度影响不超过0.1 m。

为考察不同轨道高度与不同卫星质量对模型

精度的影响,设置轨道高度分别为6 600 km、6 882 km、7 400 km,卫星质量分别为100 kg、300 kg、500 kg,做9组仿真实验。鉴于 x 轴误差为主要误差,图4给出各种情况下的线性化模型与非线性模型的 x 轴误差。由图4可见,误差随卫星质量的减小而增大,这是因为在一定的电磁力线性化误差下,小质量卫星受到的电磁加速度误差更大。减小线圈电流可以减小轻质量引起的误差。图4还表明轨道越高,误差越小。分析认为高轨道卫星受大气阻力、 J_2 摄动的影响较小,电磁力对相对位置的影响变大,使得模型对电磁力线性化的误差更为敏感。

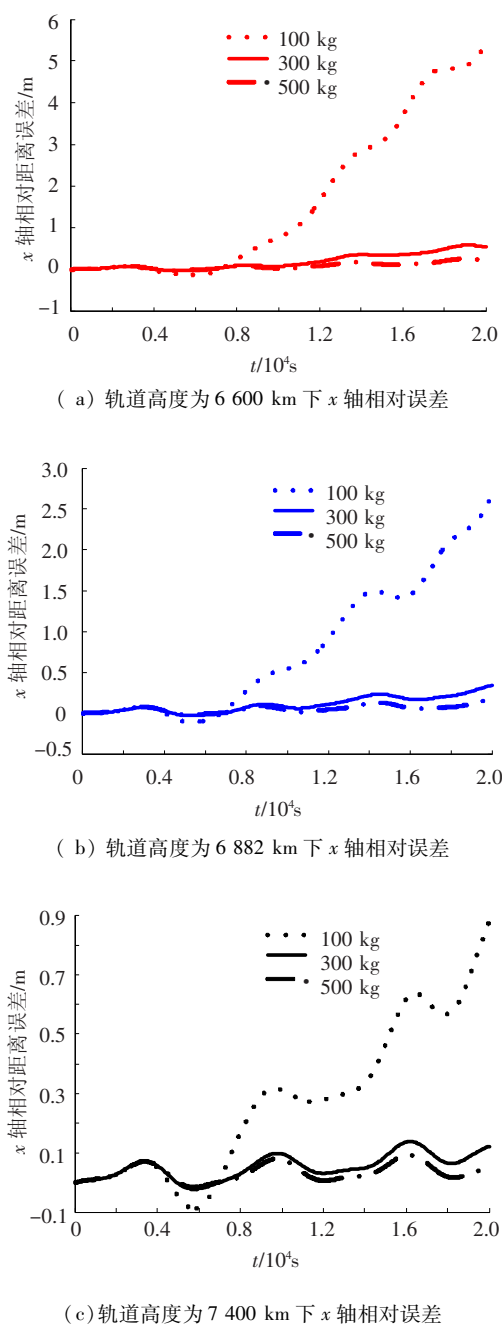


图4 不同轨道高度与卫星质量情况下的 x 轴误差

仿真结果还表明这 9 组实验中 x 轴误差主要由电磁力线性化产生,但篇幅有限,没有列出仿真图.

综上所述,本文建立的电磁编队线性化轨道动力学模型在低轨道(200 ~ 1 000 km)、小卫星(100 ~ 500 kg)、编队距离 20 m 左右、激励电流几千安的条件下是合理的,仿真结束时误差在 0.05 ~ 5 m 范围内.且误差主要来自于电磁力线性化.为电磁编队飞行动力学的进一步研究提供参考,也可作为控制研究的理论基础.

5 结 论

本文以基于磁偶极子假设的远场模型为基础,在考虑大气摄动、地球扁率 J_2 摄动的条件下推导了电磁编队飞行的非线性相对轨道动力学模型,并在一定条件下,对动力学方程线性化,最终得到基于 Hill 方程的线性化相对轨道动力学方程.利用 Matlab/Simulink 对电磁编队线性模型与非线性模型进行建模仿真,结果表明本文建立的线性化相对轨道动力学与精确的非线性模型很好吻合, x 轴相对运动有累积误差,误差主要源于电磁力线性化,且误差在一定的运行时间内很小.

由本文分析可知,线性化模型结构清晰,形式简单,便于独立分析各控制变量作用,有利于更成熟的线性控制方法的应用.非线性模型精度高,但结构复杂,控制算法设计上有困难.本文的线性化模型合理可行,结果将为电磁编队飞行的控制研究奠定理论基础.

参考文献:

[1] SCHWEIGHART S A, SEDWICK R J. Propellantless

formation flight operations using electromagnetic formation flight[C]//SpaceOps 2006 Conference. Rome, Italy:[s. n.], 2006:1-38.

- [2] HASHIMOTO T, SAKAI S, NINOMIYA K, *et al.* Formation flight using super-conducting magnets[C]//International Symposium of Formation Flying Missions and Technologies. Toulouse, France:[s. n.], 2002:3-10.
- [3] KANEDA R, YAZAKI F, SAKAI S, *et al.* The relative position control in formation flying satellites using super-conducting magnets[C]//2nd International Symposium on Formation Flying Missions and Technologies. Washington, DC:[s. n.], 2004:3-5.
- [4] ELIAS L M. Dynamics of multi-body space interferometers including reaction wheel gyroscopic stiffening effects: structurally connected and electromagnetic formation flying architectures[D]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 2004:1-23.
- [5] ELIAS L M, KWON D W, SEDWICK R J, *et al.* Electromagnetic formation flight dynamics including reaction wheel gyroscopic stiffening effects[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(2): 499-511.
- [6] AHSUN U, MILLER D W. Dynamics and control of electromagnetic satellite formations[D]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 2007:1-58.
- [7] SCHWEIGHART S A. Development and analysis of a high fidelity linearized J_2 model for satellite formation flying[D]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 2001.

(编辑 张 宏)