

Chebyshev 局部配点法在轨迹优化中的应用

王立峰¹, 汪洋¹, 郭焯¹, 赵晨², 李昊²

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 100191 北京; 2. 陆航驻北京地区军事代表室, 100101 北京)

摘要: 伪谱法在轨迹优化中应用广泛, 其中 Chebyshev 伪谱法在求解轨迹优化问题时具有较快的收敛性和较高的精度. 为了证明 Chebyshev 局部配点法在求解轨迹优化等问题的可行性, 给 Chebyshev 局部配点法的应用提供理论基础, 研究了 Chebyshev 局部配点法收敛性和稳定性. 文中以 Hyper-sensitive 问题和 Minimum-energy 为例, 分别用 Chebyshev 局部配点法与传统插值方法和经典 Chebyshev 伪谱法求接, 计算结果表明: Chebyshev 局部配点法是可行和有效的. 该方法不仅在一定程度上相比于传统的插值法精度更高、计算速度更快, 和经典 Chebyshev 伪谱法相比也略有优势.

关键词: Chebyshev 伪谱法; 轨迹优化; 最优控制; 插值

中图分类号: V249.122.3

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2013)05-0095-06

Application of Chebyshev local collocation method to trajectory optimization

WANG Lifeng¹, WANG Yang¹, GUO Xiao¹, ZHAO Chen², LI Hao²

(1. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, 100191 Beijing, China;

2. Army Aviation Military Representative Office in Beijing, 100101 Beijing, China)

Abstract: To improve the trajectory optimization with Chebyshev local collocation method, we study the convergence and stability of Chebyshev local collocation method and provide a theoretical basis for its application. In this paper, the examples of Hyper-sensitive and Minimum-energy problem verify the feasibility and effectiveness of Chebyshev local collocation method which not only is convergent and stable for Hyper-sensitive problem, but also can achieve higher accuracy and faster computation speed in some degree compared with traditional interpolation method and even classic Chebyshev pseudospectral method.

Key words: Chebyshev pseudospectral method; trajectory optimization; optimal control; interpolation

最优控制问题的起源可以追溯到 17 世纪, 最早是由 Johann Bernoulli 提出的著名的 brachystochrone 最短时间(即最速降线)问题^[1]. J. T. Betts^[2]在 1998 年描述和总结了经典的轨迹优化方法. 近年来, 一类离散控制变量和状态变量的伪谱法(Pseudospectral Method, PS Method)^[3], 也称为正交配点方法(Orthogonal Collocation)^[4]备受关注. 该方法采用全局插值多项式的有限基, 在一系列离散点上近似状态变量和控制变量. 对多项式求导来近似动力学方程中

的状态变量对时间的导数, 且在一系列配点上满足动力学方程右函数约束, 从而将微分方程约束转换为代数约束. 其中, Legendre 伪谱法^[5]、Chebyshev 伪谱法^[6]、Radau 正交配点法和 Gauss 伪谱法^[7]越来越受到学者的青睐. 在伪谱法中, 配点有两种不同的选取方法: 局部法和全局法. 局部配点法, 是将整个时间段分割成 N 段相等的子区间, 再在每个子区间上选取相同数目的插值点; 每相邻两个子区间受状态变量、独立变量和控制变量的连续性条件约束. 全局配点法是在整个时间段里进行插值近似.

本文阐述了 CPM (Chebyshev Pseudospectral Method) 局部配点法的求解公式, 证明了其收敛性和稳定性, 并用两个数值算例加以证明其在轨迹

收稿日期: 2012-06-21.

基金项目: 国家国际科技合作专项资助项目(2012DFG61930).

作者简介: 王立峰(1972—), 男, 博士, 讲师.

通信作者: 汪洋, zhuoyue771988@126.com.

优化中的应用. 计算结果表明, 局部法求得的数值解和解析解相吻合, 具有较高的精度.

1 Bolza 型连续性最优控制问题

Bolza 型最优控制问题定义为: 寻找控制变量 $u(\tau) \in R^n$ 和状态变量 $x(\tau) \in R^n$, 在定义区间 $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_f$ 里, 最小化具有一般性的 Bolza 型性能指标^[8]为

$$J = \Phi[x(\tau_f), \tau_f] + \int_{\tau_0}^{\tau_f} g[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau.$$

1) 动力学约束条件为

不等式约束:

$$f_l \leq \dot{f}[x(\tau), x(\tau), u(\tau), \tau] \leq f_u.$$

式中: 上界 f_u 和下界 f_l 相等时, 动力学约束条件转换为等式约束为

$$\dot{f}[x(\tau), x(\tau), u(\tau), \tau] = 0. \quad (1)$$

如果, $\partial f/\partial x'$ 矩阵是非奇异的, 式(1) 则可以转化为普通微分方程为

$$\dot{x}(\tau) = \bar{f}[x(\tau), u(\tau), \tau].$$

2) 边界约束条件为

$$\psi_{0l} \leq \psi[x(\tau_0), u(\tau_0), \tau_0] \leq \psi_{0u},$$

$$\psi_{fl} \leq \psi[x(\tau_f), u(\tau_f), \tau_f] \leq \psi_{fu}.$$

式中: $\psi_0: R^m \times R^l \times R \rightarrow R^h; \psi_{0l}, \psi_{0u} \in R_h; \psi_f: R^m \times R^l \times R \rightarrow R^p; \psi_{fl}, \psi_{fu} \in R_p.$

3) 路径约束条件为

$$C_l \leq C[x(\tau), u(\tau), \tau] \leq C_u.$$

式中: $C: R^m \times R^l \times R \rightarrow R^r; C_l, C_u \in R_r$ 分别为路径约束的下界和上界.

4) 状态变量和控制变量的边界约束为

$$\begin{bmatrix} x_l \\ u_l \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_u \\ u_u \end{bmatrix}.$$

2 Chebyshev 局部伪谱法

Bolza 型连续性最优控制问题可通过下面的局部 CPM 方法将其转化为非线性规划问题(NLP). 首先, 将最优控制问题的时间区间 $I = [\tau_0, \tau_f]$ 划分成 M 个子区间 $I_m (m = 1, \dots, M)$, 则有 $I_m = [\tau_{m-1}, \tau_m]$ 为

$$\bigcap_{m=1}^M I_m = 0, \quad \bigcup_{m=1}^M I_m = I.$$

由于 Chebyshev 伪谱法的配点都分布在区间 $[-1, 1]$ 上, 因此, 在每个子区间内, 需将最优控制问题的时间区间 $I_m (m = 1, \dots, M)$ 转化到区间 $[-1, 1]$ 上, 对时间变量 $\tau(m)$ 作变换

$$t = \frac{2\tau^{(m)}}{\tau_m - \tau_{m-1}} - \frac{\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_m - \tau_{m-1}}, t \in [-1, 1].$$

在 Chebyshev 伪谱法中, 插值点(即 CGL 点)的选取为

$$t_k = \cos((N - k)\pi/N), k = 0, \dots, N. \quad (2)$$

由式(2) 可知, $t_k \in [-1, 1]$, 且它是 N 次 Chebyshev 多项式 $T_N(t)$ 的极值. 第 j 次 Chebyshev 多项式为

$$T_j(t) = \cos(j \cos^{-1} t), j = 0, \dots, N.$$

文献[5] 证明了在 CGL 点处求得的近似解是最接近所求问题最优解的, 且文中给出了误差表达式. 在每一子区间上, 为离散控制变量和状态变量, 本文寻找如下形式的多项式近似

$$x^{(m)} \approx X^{(m)}(t) = \sum_{j=0}^N x_j^{(m)} \phi_j(t), \quad (3)$$

$$u^{(m)} \approx U^{(m)}(t) = \sum_{j=0}^N u_j^{(m)} \phi_j(t). \quad (4)$$

式中, $\phi_j(t)$ 是 N 次拉格朗日插值基函数为

$$\phi_j(t) = \frac{(-1)^{j+1} (1 - t^2) \dot{T}_N(t)}{N^2 c_j (t - t_j)}.$$

其中:

$$c_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N; \\ 1, & 1 \leq j \leq N - 1. \end{cases}$$

由插值基函数的性质可得

$$\phi_j(t_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

从而有

$$X^{(m)}(t_k) = x_k^{(m)}, U^{(m)}(t_k) = u_k^{(m)}.$$

对式(3)、(4) 求导可得状态变量的导数, 从而将动力学约束方程转化为代数约束, 即

$$\dot{x}^{(m)} \approx \dot{X}^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^N X^{(m)}(t_i) \dot{\phi}_i(t) = \sum_{i=0}^N D_{ki}(t_k) X(t_i).$$

式中: 微分矩阵 D 是 $(N + 1) \times (N + 1)$ 维微分矩阵, 表达式为

$$[D_{ki}] = \begin{cases} (c_k/c_i) [(-1)^{i+k}/(t_k - t_i)], & i \neq k; \\ -t_k/[2(1 - t_k^2)], & 1 \leq i = k \leq N - 1; \\ -(2N^2 + 1)/6, & i = k = 0; \\ (2N^2 + 1)/6, & i = k = N. \end{cases}$$

这样, 将最优控制问题的动力学微分方程约束转换为代数约束为

$$\sum_{i=0}^N D_{ki} X_i^{(m)} - \frac{\tau_m - \tau_{m-1}}{2} f(X_k^{(m)}, U_k^{(m)}, t_k; \tau_{m-1}, \tau_m) = 0, \quad (k = 1, \dots, N).$$

其中:

$$X_k^{(m)} \equiv X^{(m)}(t_k) \in R^n,$$

$$U_k^{(m)} \equiv U^{(m)}(t_k) \in R^n, (k = 1, \dots, N).$$

需要注意的是, 本文中选取的每个子区间的末端点就是下一个相邻子区间的始端点, 即

$$X_N^{(m-1)} = X_0^{(m)}.$$

也就是说, 在子区间 I_m 中的离散点是由 $(N - 1)$ 个 LG 点和两个端点组成的 $(N + 1)$ 个节点.

将性能指标函数中的积分项用 Gauss 积分来近似, 得到 Chebyshev 伪谱法中的性能指标函数为

$$J = \Phi[X_0^{(1)}, \tau_0, X_f^{(M)}, \tau_f] + \sum_{m=1}^M \frac{\tau_m - \tau_{m-1}}{2} \sum_{k=1}^M \omega_k g(X_k^{(m)}, U_k^{(m)}, t_k; \tau_{m-1}, \tau_m).$$

式中, ω_k 为在 LG 点处的 Gauss 权重.

其次, 边界条件约束可表示为

$$\begin{aligned} \psi_{0l} &\leq \psi[X_0^{(1)}, U_0^{(1)}, \tau_0] \leq \psi_{0u}, \\ \psi_{fl} &\leq \psi[X_f^{(M)}, U_f^{(M)}, \tau_f] \leq \psi_{fu}. \end{aligned}$$

路径约束可表述为

$$C_l \leq C[X_k^{(m)}, U_k^{(m)}, t_k; \tau_{m-1}, \tau_m] \leq C_u, \quad (k = 1, \dots, N; m = 1, \dots, N).$$

至此, 将求解最优化问题转化为了如下所述的问题.

目标函数为

$$J = \Phi[X_0^{(1)}, \tau_0, X_f^{(M)}, \tau_f] + \sum_{m=1}^M \frac{\tau_m - \tau_{m-1}}{2} \sum_{k=1}^M \omega_k g(X_k^{(m)}, U_k^{(m)}, t_k; \tau_{m-1}, \tau_m).$$

约束方程为

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N D_{ki} X_i^{(m)} - \frac{\tau_m - \tau_{m-1}}{2} f(X_k^{(m)}, U_k^{(m)}, t_k; \tau_{m-1}, \tau_m) &= 0, \\ (k = 1, \dots, N). \\ \psi_{0l} &\leq \psi[X_0^{(1)}, U_0^{(1)}, \tau_0] \leq \psi_{0u}, \\ \psi_{fl} &\leq \psi[X_f^{(M)}, U_f^{(M)}, \tau_f] \leq \psi_{fu}, \\ C_l &\leq C[X_k^{(m)}, U_k^{(m)}, t_k; \tau_{m-1}, \tau_m] \leq C_u, \\ (k = 1, \dots, N; m = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

实际上, 局部配点法和全局配点法是有密切联系的. 特别的, 取 $M = 1$, 也即为把时间区间分为一段, 就是所谓的全局配点法. 同样的, 只要取任意 $M > 1$ 的值, 就是局部配点法. 在以下应用分析中, 本文将比较分析 CPM 方法的局部配点法 ($M > 1$) 和全局配点法 ($M = 1$).

3 局部法收敛性和稳定性

3.1 收敛性

由数值分析相关知识可知, 要证明方法的收敛性只需证明其截断误差的极限为 0.

由于上述考虑的都是复平面里面的插值, 为了区别表示, 将用 z 来表示插值点 x , 仍用 $x_k (k = 0, 1, \dots, N)$ 表示节点. 假设 $f(z)$ 为待求被插值函

数, $p_N(z)$ 为其插值多项式 (即式 (3) 中的 $\varphi_j(t)$), 插值点在区间 $[-1, 1]$ 内. 则由文献 [9] 可得截断误差 $R_N(z) = f(z) - p_N(z)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} R_N(z) &= f(z) - p_N(z) = \\ f(z) - \sum_{k=0}^N \frac{\omega(z)f(x_k)}{(z - x_k)\omega'(x_k)} &= \\ \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)}{\omega(x)(z - x)} dx. \end{aligned}$$

式中: 积分曲线 C 包含区间 $[-1, 1]$ 和插值点 z , 且函数 $f(z)$ 没有奇点. 且

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^N (x - x_k).$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \ln |z - x_k| \rightarrow \int_{-1}^1 \mu(x) \ln |z - x| dx = -\varphi(z).$$

因此

$$\omega(z) = \prod_{k=0}^N |z - x_k| = \exp\left(\sum_{k=0}^N \ln |z - x_k|\right) \approx e^{-N\varphi(z)}.$$

式中: $\varphi(z)$ 是对于给定的节点密度函数 $\mu(x)$ 的势函数, 表达式为

$$f(z) = - \int_{-1}^1 \mu(x) \ln |z - x| dx + \text{const}.$$

Chebyshev 插值点的密度函数为

$$\mu_{1/2}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - x^2}}, x_j = \cos \frac{(N - j)\pi}{N}.$$

选取任意正数 $\varepsilon > 0$ 和轮廓曲线 C , 使得

$$\varphi(z)_{\text{on } C} > \varphi(z) + \varepsilon.$$

则有

$$\left| \int_C \frac{f(t) dt}{\omega(t)(t - z)} \right| \leq \left\{ \int_C \left| \frac{f(t)}{t - z} \right| dt \right\} \frac{1}{\omega(z)_{\text{on } C}} \leq c(\varepsilon) e^{N(\varphi(z_0) + \varepsilon)}.$$

其中 $|R_N(z)| \leq c(\varepsilon) e^{N[(\varphi(z_0) + \varepsilon) - \varphi(z)]}$.

因此, 就能得到截断误差的极限 ($N \rightarrow \infty$) 为

$$|R_N(z)|^{\frac{1}{N}} \rightarrow e^{\varphi(z_0) - \varphi(z)} \rightarrow 0.$$

需要注意的是, 此结论只适用于 z 在特定积分曲线包围的轮廓之内的值. 如果 z 超出范围包含奇点 z_0 , 则截断误差 R_N 将会发散.

3.2 稳定性

Lebesgue 常数 Λ_N 描述的是一个插值多项式逼近一个被插值函数的程度. Lebesgue 常数 Λ_N 定义为 P 的算子范数, 它满足勒贝格引理

$$\|f - p_N\| \leq (\Lambda_n + 1) \|f - p^*\|.$$

式中: p^* 为函数 f 的最佳逼近 n (或小于 n) 次多项式, 或者说在所有近似多项式 p 里面的 p^* 使得 $\|f - p\|$ 最小. 插值多项式的误差最多是最优逼近多项式的误差的 $(\Lambda_N + 1)$ 倍, 这表明本文要找使 Λ_N 最小的插值节点. 尤其是选择切比雪夫节点时

$$\Lambda_N^{Ch} = \frac{2}{\pi} \left(\ln N + \gamma + \ln \frac{8}{\pi} \right) + o(1).$$

相应的

$$\Lambda_N^{\min} = \frac{2}{\pi} \left(\ln N + \gamma + \ln \frac{4}{\pi} \right) + o(1).$$

表明:切比雪夫节点是多项式插值中比较好的选择,但是这些节点并不是最优的,且随着 N 的增大稳定性是以对数的形式下降的.

4 算例分析

本文将利用两个数值算例来分验证本文阐述的局部配点法的有效性.所有的算例都是在 MATLAB2011 中求解计算, MATLAB 的运行环境是 Intel Core(TM)2 CPU, 2.1 GHz processor 和 2 GRAM.另外,利用 MATLAB 带有 SQP 算法的 fmincon 函数作为非线性程序运算器.本文选用的第 1 个例子是文献[9]中一个关于 Hypersensitive 问题,并指出这个问题用间接法很难求解.第 2 个算例是文献[12]中带有二次状态变量不等式约束的最小能量问题.

4.1 算例 1:Hyper-sensitive 问题

Hyper-sensitive 问题是含两个或两个以上独立时间变量的完全超敏感最优轨迹控制问题.完全超敏感问题的解是典型的 3 部分结构,被形象的描述为从机场到机场的最优飞行轨迹过程——“起飞”、“巡航”和“着陆”^[10].起飞部分由初始条件、动力学方程和进入巡航阶段的目标时间决定,着陆部分由终端条件、动力学方程和出巡航的目标时间决定,而巡航部分由与边界条件基本不相关的目标函数和动力学方程决定.正如文献[11]中指出,这类问题用间接法求解是及其困难的.

问题的目标函数为

$$J = \int_0^{1000} (x^2(t) + u^2(t)) dt.$$

动力学约束为

$$\dot{x} = -x^3 + u.$$

初始条件和终端条件为

$$x(0) = 1,$$

$$x(1000) = 1.5.$$

这个问题的求解环境和算例 1 是相同的.选取子区间个数为 $M = 10$,每个子区间节点的个数为 $N = 10$,总共 101 个节点.通过求解计算,得出状态量 x ,和控制量 u 的伪谱法求解结果如图 1 和图 3 所示,该方法的计算时间为 26.7 s.为验证 Chebyshev 局部伪谱法的有效性,文章还利用 Hermite-Simpson 插值法用相同插值节点求解该问

题,结果如图 2 和图 4 所示,该方法的计算时间为 55.6 s,两个方法计算时间比较结果如表 1、2 所示.

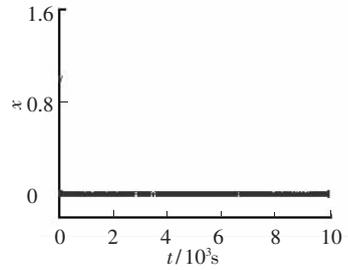


图 1 状态量 x 伪谱法求解结果

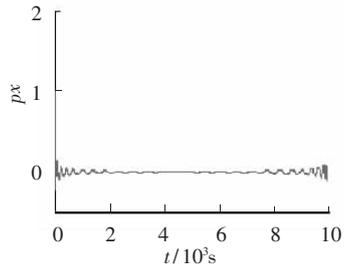


图 2 状态量 px 插值求解结果

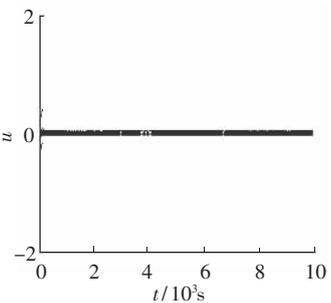


图 3 控制量 u 伪谱法求解结果

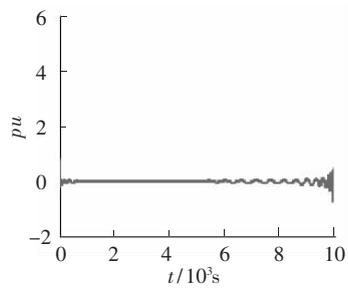


图 4 控制量 pu 插值求解结果

表 1 Chebyshev 局部伪谱法计算时间和精度的比较

N_{pit}	$t_{\text{CPU},s}$	误差
23	3.8	10^{-2}
31	6.2	10^{-3}
55	17.8	10^{-3}
101	55.6	10^{-4}

表2 Hermite-Simpson 插值法计算时间和精度的比较

N_{pit}	$t_{\text{CPU},s}$	误差
23	1.7	10^{-5}
31	3.0	10^{-5}
55	6.9	10^{-6}
101	26.7	10^{-6}

从图1和图2中可以看出,用插值法求解状态量 x 的误差相对较大,在 2 000 s 以前和 8 000 s 以后有明显波动,而用 Chebyshev 局部伪谱法求解的结果没有明显的波动. 同样的,利用 Chebyshev 局部配点法求得的控制量 u 所得的结果要比利用插值法求得的结果要好得多. 这是由于 Chebyshev 局部伪谱法的 Lebesgue 常数 A_N 和最小的 Lebesgue 常数很接近,而 Lebesgue 常数 A_N 描述的是一个插值多项式与其被插值函数的逼近程度,Lebesgue 常数越小,说明插值多项式越逼近被插值函数. 所以在算例2中由 Chebyshev 局部伪谱法算得的结果比由 Hermite-Simpson 插值法算得的结果波动要小. 从表1、2中可以看出,就 Hyper-sensitive 问题的计算量和计算误差而言, Chebyshev 局部伪谱法求解的结果更为理想.

4.2 算例2: Minimum-energy 问题

本文考虑带有二次状态变量含不等式约束的最小能量问题, A. E. Bryson 等^[12]提出了该问题的解析解法,所以本文可以获得精确解. 该问题是为了找出控制变量 u 最小化目标函数为

$$J = 0.5 \int_0^1 a^2(t) dt.$$

动力学约束为

$$x' = v, v' = a.$$

初始条件及终端条件为

$$x(0) = x(1) = 0, v(0) = -v(1) = 1.$$

路径约束为

$$x(t) \leq l.$$

l 的取值不同,结果会有很大区别. 对于 $0 < l < 1/6$, 带有该约束的解是

$$a = \begin{cases} -\frac{2}{3l}\left(1 - \frac{t}{3l}\right), & 0 \leq t \leq 3l; \\ 0, & 3l < t \leq 1 - 3l; \\ -\frac{2}{3l}\left(1 - \frac{1-t}{3l}\right), & 1 - 3l < t \leq 1. \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{3l}\right)^2, & 0 \leq t \leq 3l; \\ 0, & 3l \leq t \leq 1 - 3l; \\ -\left(1 - \frac{1-t}{3l}\right)^2, & 1 - 3l \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} l\left[1 - \left(1 - \frac{t}{3l}\right)^3\right], & 0 \leq t \leq 3l; \\ l, & 3l < t \leq 1 - 3l; \\ l\left[1 - \left(1 - \frac{1-t}{3l}\right)^3\right], & 1 - 3l < t \leq 1. \end{cases}$$

在本文中, $l = 1/36$, 所以可以求得目标函数 J_{ana} 的解析解的值为 16. 再用 Chebyshev 局部配点法和经典 Chebyshev 伪谱法分别求解, 所得结果如表3、4所示. 两种结果都基于 31 个节点, 局部配点法分 $M = 5$ 段, 每段选取 $N = 6$ 个节点. 为比较两种方法的计算误差本文引入 L_∞ 范数 ($\| \cdot \|_{L_\infty} = \max | \cdot |$). 另外, 程序运行所需 CPU 时间是通过 MATLAB 的 cputime 命令获得的时间. 各变量的求解结果如图5中所示, 其中“+”表示由 Chebyshev 局部配点法求解所得的结果, “○”表示由经典 Chebyshev 伪谱法所求得的结果, “—”代表解析解. 从图5中可以看出, 由经典 Chebyshev 伪谱法求得变量 x 的数值解与解析解误差较由 Chebyshev 局部配点法的大.

表3 两种方法最优结果比较

方法	J	$ J - J_{\text{ana}} $	$ J - J_{\text{ana}} / J_{\text{ana}}$	$t_{\text{cpu},s}$
Cheb PS	15.914 243	0.085 757	$5.359 8 \times 10^{-3}$	5.609 3
局部 Cheb PS	16.004 602	0.004 602	$2.876 3 \times 10^{-4}$	3.546 8

表4 两种方法计算误差的比较

方法	$\ x - x_{\text{ana}}\ _{L_\infty}$	$\ v - v_{\text{ana}}\ _{L_\infty}$	$\ u - u_{\text{ana}}\ _{L_\infty}$
Cheb PS	$4.486 1 \times 10^{-3}$	$2.137 2 \times 10^{-2}$	$4.282 3 \times 10^{-1}$
局部 Cheb PS	$6.669 6 \times 10^{-5}$	$3.582 5 \times 10^{-3}$	$1.612 7 \times 10^{-2}$

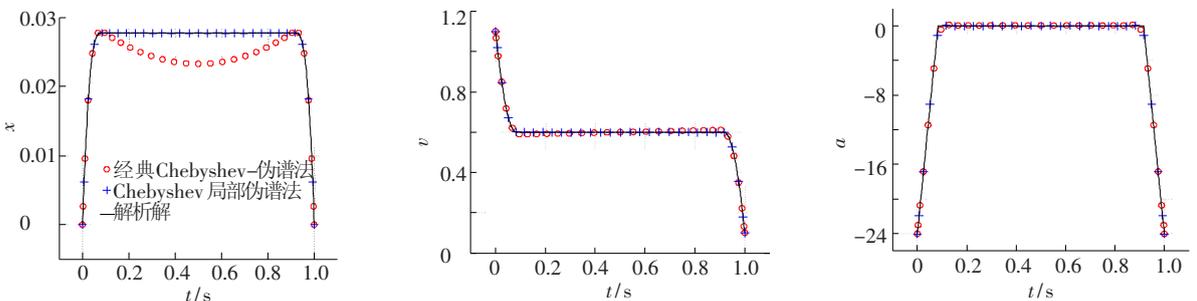


图5 3种方法求得 x, v, a 的结果

由表 3、4 可知,相同数量的节点, Chebyshev 局部配点法的计算精度比经典 Chebyshev 伪谱法高,在相同计算量的情况下耗费的 CPU 时间也比经典 Chebyshev 伪谱法少. 由于 Chebyshev 局部配点法是在整个几分区里面分段的,所以微分矩阵 D 维数要比 Chebyshev 局部配点法小很多,这是导致两种方法计算结果精度和速度不同的主要原因.

5 结 论

1) Chebyshev 局部配点法是一种有效的求解轨迹优化问题的方法,求解得出的结果能和解析解相吻合.

2) 不仅相比于一般的插值方法(如 Hermite-Simpson 插值), Chebyshev 局部伪谱法计算精度高,计算时间短,和经典 Chebyshev 伪谱法相比也有优势.

参 考 文 献

[1] 雍恩米, 陈磊, 唐国全. 飞行器轨迹优化数值方法综述[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 397 - 405.

[2] BETTS J T. Trajectory optimization in the presence of uncertainty [J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2006, 54(2): 227 - 243.

[3] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, *et al.* Spectral Methods in Fluid Dynamics [M]. New York: Springer-Verlag, 1988: 135 - 179.

[4] VILLADSEN J, MICHELSEN M L. Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation

[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1978: 152 - 163.

[5] ELNAGAR G, KAZEMI M A, RAZZAGHI M. The pseudospectral legendre method for discretizing optimal control problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(10): 1793 - 1796.

[6] VLASSENBROECK J, Van DOREEN R. A chebyshev technique for solving nonlinear optimal control problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33(4): 333 - 340.

[7] 程国采. 航天飞行器最优控制理论与方法[M]. 长沙: 国防工业出版社, 1999: 37 - 48.

[8] FORNBERG B. A Practical Guide To Pseudospectral Methods[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996: 168 - 174.

[9] BETTS J T. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming [M]. 1st Edition. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001: 89 - 121.

[10] KOKOTOVIC P, KHALIL H K, O' Reilly J. Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design [M]. San Diego: Academic Press, 1986: 372 - 395.

[11] RAO A V, MEASE K D. Eigenvector approximate dichotomic basis method for solving hyper-sensitive optimal control problems [J]. Optimal Control Applications and Methods, 1999, 20(2): 59 - 77.

[12] BRYSON A E, HO Y C. Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control [M]. Washington, DC: Taylor & Francis, 1975: 312 - 355.

(编辑 张 红)