第45卷 第7期
2013年7月

哈尔滨工业大学学报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Vol. 45 No. 7
July 2013

应用配点法的太阳帆 CRTBP 周期轨道设计

刘 刚，马广富，黄 静

（哈尔滨工业大学 航天学院，150001 哈尔滨）

摘 要：针对太阳帆航天器在圆形限制性三体问题(CRTBP)中人工拉格朗日点附近周期轨道的设计问题，首先分析了CRTBP中太阳帆人工拉格朗日点的存在条件和分布，然后针对大多数人工拉格朗日点附近周期轨道信息难以获取的特点，采用高阶全局配点法将原非线性方程求解问题转化为非线性规划问题，并最终得到周期轨道的近似解. 运算结果表明通过该方法可以得到三维空间中人工拉格朗日点附近周期轨道，且对初始猜测值依赖程度不高，为太阳帆在高精度模型中的周期轨道设计奠定了基础.

关键词：太阳帆；圆形限制性三体问题；周期轨道；配点法

中图分类号：V412.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0367-6234(2013)07-0007-06

Solar sail periodic orbit design using collocation in the circular restricted three-body problem

LIU Gang, MA Guangfu, HUANG Jing

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

Abstract: Considering the orbit design of a solar sail in the circular restricted three-body problem (CRTBP), the sail attitude and lightness parameter required for stationary solutions and the artificial libration surfaces are investigated. For there is very little intuition about the solution space of the periodic orbit near most artificial libration points, higher-order collocation is utilized to discretize the solution to the equations of motion. This approach converts the original problem to a finite-dimensional nonlinear programming problem with a finite set of variables. The calculation results demonstrate the availability of the approach in generating periodic orbits in solar sail CRTBP as well as its robustness to the initial guess.

Key words: solar sail; CRTBP; periodic orbit; collocation

太阳帆利用光压推进，是一类不需要消耗燃料的航天器，其理论比冲为无穷大，是未来非开普勒轨道和深空探测的理想载体[1]. 当太阳帆处于拉格朗日点附近时，必须同时考虑两个天体的引力，初步研究中多采用圆型限制性三体问题(CRTBP)的模型研究太阳帆的动力学问题[2]. 与传统的限制性三体问题不同，由于太阳光压力的存在，通过调整姿态和结构，太阳帆可在经典的5个拉格朗日点以外的三维空间中获得更多的平衡点，这些平衡点称为人工拉格朗日点.

周期轨道设计是研究CRTBP的核心问题之一，目前使用最多的CRTBP周期轨道寻找方法为摄动法配合微分校正. Richardson[3]首先利用Lindstedt-Poincaré法对线性周期运动引入微小摄动得到了CRTBP共线平动点附近Halo轨道的三阶展开式，该方法此后被应用于多种周期轨道的寻找. 随后Howell[4-5]在研究CRTBP的共线平动点附近Lissajous轨道时提出了一种多步微分修正法，该方法至今仍然被大量应用于Lissajous轨道的计算. Howell[6]还将该方法成功推广至更为复杂的星历表模型中，且从原来的三体问题扩展至多体问题，再一次表明该方法在解决不同问题方面具有较好的通用性.

近年来已有一些学者对考虑太阳帆的限制性

收稿日期：2012-07-08.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61174200).
作者简介：刘 刚(1985—)，男，博士研究生；
马广富(1963—)，男，教授，博士生导师.
通信作者：马广富，magf@hit.edu.cn.

三体问题(RTBP)进行了研究,所使用的周期轨道寻找方法也与传统 CRTBP 中的方法基本相同.人工拉格朗日点附近的周期轨道在动力学系统的研究中同样具有重要的意义,其位置和稳定性决定了相空间的拓扑结构[7]. McInnes[8-9]首先较完整的分析了太阳帆人工拉格朗日点分布的区域及其实现要求,此外他还研究了非理想太阳帆在日地系统中人工拉格朗日点的情况,并同理想太阳帆进行了比较. McInnes A. I. [10]利用 Lindstedt-Poincaré 法得到了共线人工拉格朗日点附近的周期轨道三阶近似解析解. Baoyin 和 McInnes[11-12]对太阳帆在地日系统拉格朗日点附近的轨道做了进一步的研究,同时考虑了椭圆限制性三体问题对太阳帆轨道的影响[13]. Waters[14]应用摄动法研究了人工拉格朗日点附近周期轨道的近似解.

上述周期轨道的求解方法原理基本相同,即在线性化方程的周期解基础上叠加小摄动以获得非线性方程的近似解,再通过微分校正获得闭合的轨道.该类方法存在很大局限性:太阳帆姿态角保持不变或始终与 $\boldsymbol{r}_1$ 方向平行,没有发挥太阳帆姿态可调的特点;微分校正能否收敛严重依赖初值的选取,初值选取稍有偏差就很可能造成无法得到闭合的轨道;所得到的轨道必须以线性系统的周期解为基础,但通过观察太阳帆在任意人工拉格朗日点附近的线性化方程可以发现,当人工拉格朗日点不位于 xz 平面内时,线性化后的方程一般不具有周期解,需施加一定的主动控制才能获得周期轨道,这也是传统摄动法很难解决的.

考虑到对于任意人工拉格朗日点附近周期轨道所能得到的信息十分有限,本文将脱离传统的 CRTBP 周期轨道设计思路,初步探讨采用数值最优规划方法设计周期轨道的可行性.设计思路为使用全局配点法将原非线性微分方程求解问题转化为非线性规划问题,通过求取满足离散化后各约束条件和最优性能指标的离散状态变量,并利用插值多项式得到最终的周期轨道.

1 动力学模型建立及平衡点分析

假设太阳帆表面为平面,且可拦截所有频率的光子,其反射为完全弹性碰撞,此时入射光子和反射光子作用在太阳帆上的力幅值相等,合力沿太阳帆法线方向,如图1所示.

光子作用于太阳帆上的合力可表示为

$$\boldsymbol{F}_s = \frac{2Pm}{\sigma}\left(\frac{d_{\mathrm{AU}}}{r_1}\right)^2\cos^2(\alpha)\boldsymbol{n}.$$

其中:P 为距离太阳 1 AU 处太阳光照射在太阳帆表面上的光压,d_{AU} 为太阳至地球的距离;r_1 为太阳帆至太阳的距离;m 为太阳帆的质量;σ 为太阳帆面密度;α 为太阳帆法线方向和 $\boldsymbol{r}_1$ 之间的夹角;$\boldsymbol{n}$ 为太阳帆法线方向的单位向量.

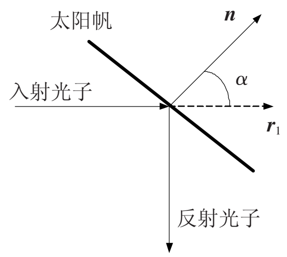

图1 理想太阳帆上所受的合力

定义β为作用于太阳帆上的光压力和引力的比值,即太阳帆轻巧度,则 $\boldsymbol{F}_s$ 可进一步表示为

$$\boldsymbol{F}_s = \beta\frac{\mu_1 m}{r_1^2}\cos^2(\alpha)\boldsymbol{n}.$$

其中 μ_1 为太阳引力常数.

以太阳和行星的公共质心为坐标原点建立旋转坐标系,如图2所示,太阳指向行星的方向为 x 轴,行星角速度方向为 z 轴,y 轴与 x 轴、z 轴组成右手坐标系,设行星引力常数为 μ_2,ω 为行星绕太阳的旋转角速度,此处假设 ω 为恒值,对其进行无量纲化,取行星和太阳之间的距离为单位长度,万有引力常数 $\mu_1+\mu_2=1$,行星公转周期为 2π,设 $\mu = M_2/(M_1+M_2)$,则太阳帆在旋转坐标系下的运动方程为[14]

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} = \nabla V + \boldsymbol{a}.$$

其中

$$V = \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + 0.5\,|\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\,|,$$

$$\boldsymbol{a} = \beta(1-\mu)\cdot r_1^{-4}(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n})^2\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r} = [x\quad y\quad z]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{r}_1 = [x+\mu\quad y\quad z]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{r}_2 = [x+\mu-1\quad y\quad z]^{\mathrm{T}},$$

$$r_1 = |\,\boldsymbol{r}_1\,|,\ r_2 = |\,\boldsymbol{r}_2\,|.$$

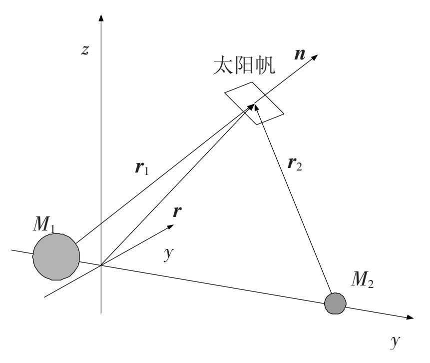

图2 太阳帆限制性三性体问题

为了适当简化方程,舍弃角 α,太阳帆法线单位向量改用两个姿态角 γ、ϕ 表示,如图3所示.

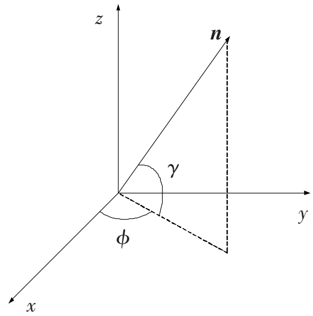

图 3　太阳帆姿态角

法线单位向量为

$$\boldsymbol{n} = [\cos\gamma\cos\phi\ \cos\gamma\sin\phi\ \sin\gamma]^{\mathrm{T}}.$$

旋转坐标系中的平衡点需同时满足$\ddot{\boldsymbol{r}} = 0$，$\dot{\boldsymbol{r}} = 0$，平衡点处有如下关系式成立：

$$\boldsymbol{a} = -\nabla V. \tag{1}$$

当太阳帆在旋转坐标系中的位置确定时，a 只与 β、γ 和 ϕ 的大小有关，通过求解式(1) 可以得到平衡点处轻巧度 β 和姿态角 γ、ϕ 需满足的条件分别为

$$\sin\gamma = \frac{-(1-\mu)z\cdot r_1^{-3} - \mu z\cdot r_2^{-3}}{|\nabla V|}, \tag{2}$$

$$\tan\phi = \frac{-(1-\mu)yr_2^3 - \mu y r_1^3 + r_1^3 r_2^3}{-(1-\mu)(x+\mu)r_2^3 - \mu(x+\mu-1)r_1^3 + r_1^3 r_2^3}, \tag{3}$$

$$\beta = -(1-\mu)^{-1}|\boldsymbol{r}_1|^4\frac{\nabla V\cdot\boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n})^2}. \tag{4}$$

由于β、γ、ϕ 可以人为设定，所以与传统的限制性三体问题只有 5 个平衡点不同，引入太阳帆后可在旋转坐标系内获得无数组平衡点，即人工拉格朗日点. 下面给出了当$\beta = 0.5$ 时日地系统三维空间中平衡点所构成的曲面图如图 4 ~5 所示.

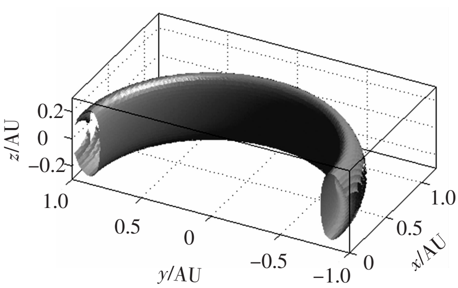

图 4　$\boldsymbol{\beta} = 0.5$ 时平衡点曲面($\boldsymbol{x} > 0$)

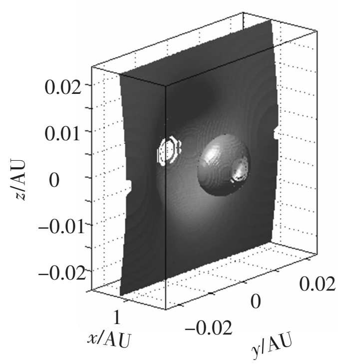

图 5　$\boldsymbol{\beta} = 0.5$ 时平衡点曲面局部放大图

2　基于配点法的周期轨道设计

太阳帆 CRTBP 模型具有极强的非线性，通常情况下无法得到解析解. 考虑到传统周期轨道寻找策略的种种不足，这里采用配点法将原非线性方的解离散化，通过对离散的变量进行非线性规划得到满足约束条件的周期解.

考虑非线性规划的一般形式，在如下约束条件下：

$$\boldsymbol{g}(z) = 0, \boldsymbol{h}(z) \leqslant 0, \tag{5}$$

寻找 $z \in \mathbf{R}^n$，使得性能指标 $J(z)$ 取得最小值. 为了将原来的周期轨道求解问题转化为非线性规划问题，这里采用一种全局配点法 - 伪光谱算法对原来的非线性方程进行离散化，结合周期轨道上各状态变量的不等式约束构成形如式(5) 的约束条件，其中不等式约束通过松弛变量统一转化为等式约束.

伪光谱算法使用全局正交多项式来重新构建系统状态和控制量. 考虑到初末状态变量要满足周期性的要求，这里采用 Legendre-Pseudospectral 方法，即 Legendre 伪光谱算法，使用的插值点为 LGL 点. 首先需确定 N 个离散时刻 $t_i \in [t_0, t_f]$，$i = 0, 1, \cdots, N-2, f$. 由于伪光谱算法的应用区间为 $\tau \in [-1, 1]$，需利用线性变换将 $\tau \in [-1, 1]$ 内的 LGL 点转换至时间区间 $t \in [t_0, t_f]$ 内. 通过求取 $K = N$ 阶 Legendre 正交多项式 $(1-\tau^2)\dot{P}_{K-1}(\tau)$ 的根可得到 K 个 LGL 点 $\tau_i \in [-1, 1]$，$i = 1, 2, \cdots, K$，再利用公式

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0},$$

即可获得各 LGL 点所对应的离散时间点. 对于求得的 LGL 点，其对应的拉格朗日插值多项式为

$$x(\tau) \approx X(\tau) = \sum_{i=1}^{K} L_i(\tau)x(\tau_i),$$

$$L_i(\tau) = \prod_{j=1, j\neq i}^{K}\frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}.$$

利用拉格朗日插值多项式，太阳帆位置和速度可写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}(\tau) \approx \boldsymbol{R}(\tau) = \sum_{i=1}^{K} L_i(\tau)\boldsymbol{r}(\tau_i), \\ \dot{\boldsymbol{r}}(\tau) = \boldsymbol{v}(\tau) \approx \boldsymbol{V}(\tau) = \sum_{i=1}^{K} L_i(\tau)\boldsymbol{v}(\tau_i). \end{cases} \tag{6}$$

式(6) 即为最优离散解的拟合公式，通过该式可将离散的最优解转化为连续的近似最优解.

离散点处微分可通过式(7) 表示：

$$\dot{x}(\tau_k) \approx \dot{X}(\tau_k) = \sum_{i=1}^{K} \dot{L}_i(\tau_k) x(\tau_i) = \sum_{i=1}^{K} D_{ki} x(\tau_i),\ k = 1,2,\cdots,K. \tag{7}$$

其中,

$$D_{ki} = \frac{\mathrm{d}L_i(\tau_k)}{\mathrm{d}\tau} = \begin{cases} \dfrac{P_{N-1}(\tau_k)}{P_{N-1}(\tau_i)} \dfrac{1}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i; \\ -\dfrac{(N-1)N}{4}, & k = i = 1; \\ \dfrac{(N-1)N}{4}, & k = i = N; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

太阳帆模型可离散化为

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{K} D_{ki} x(\tau_i) \boldsymbol{r}(\tau_k) = \boldsymbol{v}(\tau_k), \\ \sum\limits_{i=1}^{K} D_{ki} \boldsymbol{v}(\tau_k) = -2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}(\tau_k) + \nabla V|_{r(\tau_k)} + \boldsymbol{a}|_{r(\tau_k)}. \end{cases} \tag{8}$$

除了运动方程外,周期轨道上各点还需满足一些不等式约束条件,由于没有特定的任务要求,这里仅考虑太阳帆姿态角与 $\boldsymbol{r}_1$ 之间的不等式约束. 通常情况下太阳帆只有一面具有良好的反射特性,所以其法线方向需满足

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 \geqslant 0.$$

离散化后可得

$$\cos(\gamma(\tau_i))\cos(\phi(\tau_i))(x(\tau_i) + \mu) + \cos(\gamma(\tau_i))\sin(\phi(\tau_i))y(\tau_i) + \sin(\gamma(\tau_i))z(\tau_i) \geqslant 0.$$

为了便于计算,引入松弛变量 η_i,将不等式约束转换为等式约束,即

$$\cos(\gamma(\tau_i))\cos(\phi(\tau_i))(x(\tau_i) + \mu) + \cos(\gamma(\tau_i))\sin(\phi(\tau_i))y(\tau_i) + \sin(\gamma(\tau_i))z(\tau_i) - \eta_i^2 = 0. \tag{9}$$

为了保证轨道的周期性,初末时刻离散状态变量还需满足如下等式约束:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}(\tau_1) = \boldsymbol{r}(\tau_K), \\ \boldsymbol{v}(\tau_1) = \boldsymbol{v}(\tau_K), \\ \gamma(\tau_1) = \gamma(\tau_K), \\ \varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_K). \end{cases} \tag{10}$$

式(8)、(9) ~ (10)共同构成了式(5)中的等式约束条件 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) = 0$. 此外为了避免规划结果严重偏离期望结果,还可以考虑其他的不等式约束,如为了防止规划结果收敛至一点,约束终端时刻 t_f 不小于某一值等,这里不再赘述.

为了避免在周期轨道规划结果中太阳帆姿态出现多次大的角度机动,选取离散化的性能指标如下:

$$J(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\gamma,\varphi,t_0,t_f) = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=1}^{K} w_i [(\gamma(\tau_i) - \bar{\gamma})^2 + (\varphi(\tau_i) - \bar{\varphi})^2].$$

其中 w_i 为 Gauss 权系数,其定义为

$$w_i = \frac{2}{K(K-1)[P_{K-1}(\tau_i)]^2},\quad i = 1,2,\cdots,K.$$

至此,原来针对常微分方程的求解问题转化为一非线性规划问题,可采用梯度法中常用的 SQP 法(Sequential Quadratic Programming)求解[15],得到满足约束条件的离散值,再通过式(6)的插值得到最终的周期解,即太阳帆 CRTBP 中的周期轨道.

3 算 例

在日地系中选取 3 个不同位置的人工拉格朗日点分别求取其附近的周期轨道,人工拉格朗日点分别位于太阳 - 地球连线上,xz 平面内以及 $x > 0$、$y > 0$、$z > 0$ 象限内,周期轨道初始猜测值选取不需要足够精确,只需满足一定条件即可,具体过程可概括为:

1)确定人工拉格朗日点位置;

2)根据式(3) ~ 式(4)求得构成该人工拉格朗日点所需要的姿态角以及轻巧度系数,并作为相应离散变量的初值,姿态角也可用三角函数作为初始猜测值;

3)以所选人工拉格朗日点为圆心做圆,圆可位于 xy 平面或 yz 平面内,半径选择在 10^{-3} 到 10^{-4} 之间(无量纲化后),此时 $\boldsymbol{r}$、$\dot{\boldsymbol{r}}$ 的初值可选为(以 x 坐标为例)

$$\begin{cases} x(\tau_i) = A\cos\left(2\pi \dfrac{\tau_i + 1}{2}\right) + \xi, \\ \dot{x}(\tau_i) = -\lambda A\sin\left(2\pi \dfrac{\tau_i + 1}{2}\right). \end{cases}$$

式中 A 为所选圆的半径,ξ 为圆心的 x 轴坐标. 配点法对初值的选取具有一定的鲁棒性,所以初始猜测值的选取并不局限于上述方法. 虽然 SQP 法不能保证最终结果收敛至全局最优解,而是初始猜测值附近的某一局部最优解,但周期轨道的寻找对最优性的要求不高,只需满足约束条件即可,所以这里不需要去判断最终结果是否为全局最优解,但不同的初始猜测值会导致收敛结果存在一定偏差.

图 6 ~ 图 13 为三类人工拉格朗日点附近周期轨道的规划结果,所选初始猜测值为以人工拉格朗日点为圆心的圆,除图 10 的轨道采用与 yz 平面平行的圆外,其余均为与 xy 平面平行的圆,括

号内为所选取人工拉格朗日点的坐标. 图 14 为以摄动法所获得三阶近似结果作为初值时微分校正和伪谱法所得结果的对比.

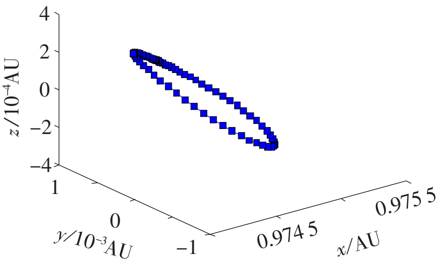

图 6　周期轨道([0.98　0　0]AU)

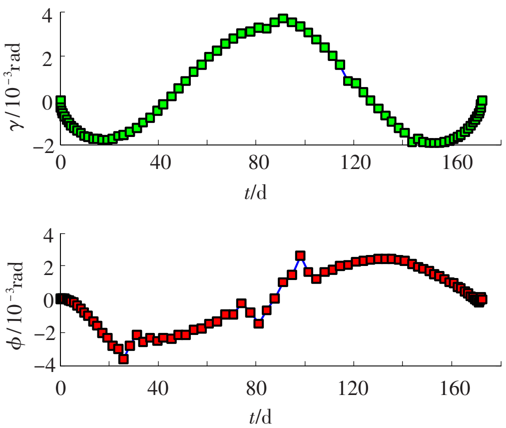

图 7　姿态角变化曲线([0.98　0　0]AU)

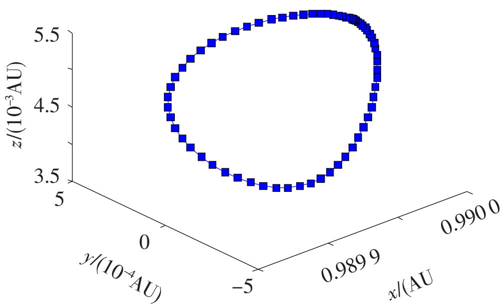

图 8　周期轨道([0.98　0　0.005]AU)

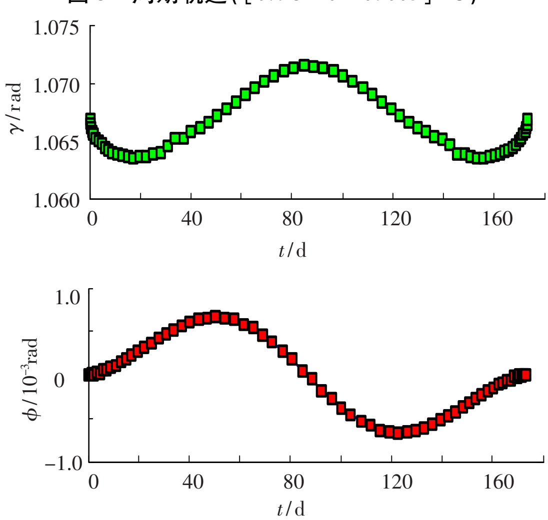

图 9　姿态角变化曲线([0.98　0　0.005]AU)

运算结果表明只要轻巧度系数选择合理,初始猜测值即可收敛至需要的周期轨道,且轨道位置不再仅仅局限于某一平面内的人工拉格朗日点附近,而是位于整个三维空间中通过观察规划所得轨道位置以及形状可以发现,虽然配点法对初值依赖程度远远小于微分校正方法,但由于猜测值的选择非常不精确,最终获得的周期轨道与初始猜测值有较大偏差,且可能与所选人工拉格朗日点距离较远,所以还需要在该方法中加入更多的约束条件对周期轨道的位置和形状进行限制. 此外,对比图 8 和图 10 还可以发现,虽然采用的太阳帆轻巧度系数、所选取的人工拉格朗日点位置以及姿态角初始值均相同,但不同的位置初值却有可能导致最终结果收敛至完全不同的轨道,比如图 8 为近似椭圆轨道,而图 10 却为 8 形轨道,类似于一般 CRTBP 中的垂直 Lyapunov 轨道. 图 14 表明,当初始猜测值足够精确时,配点法最终收敛的结果将位于猜测值附近,且与传统的微分校正所得结果差别较小,可视为同一轨道族内相邻的两条不同轨道. 此外,以 CRTBP 低精度模型所获得的周期轨道还可作为在星历表模型等高精度模型中求取拟周期轨道的初始猜测值.

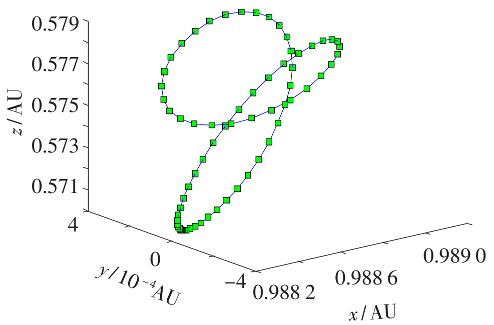

图 10　与 yz 平面平行的周期轨道([0.98　0　0.005]AU)

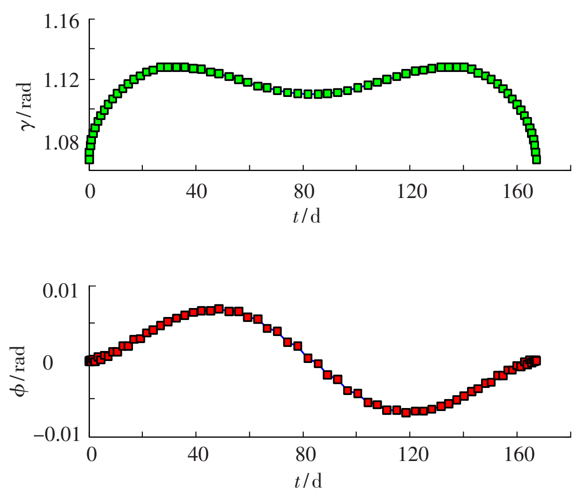

图 11　与 yz 平面平行的姿态角变化曲线([0.98　0　0.005]AU)

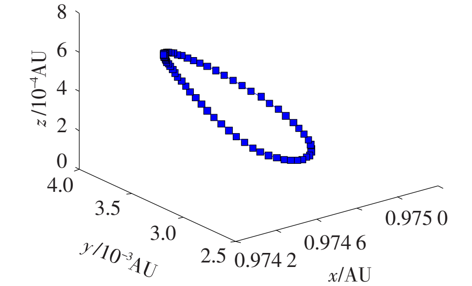

图 12　周期轨道([0.98　0.003　0.005]AU)

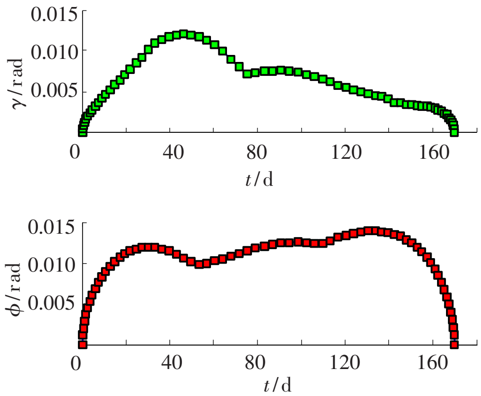

图 13　姿态角变化曲线([0.98　0.003　0.005]AU)

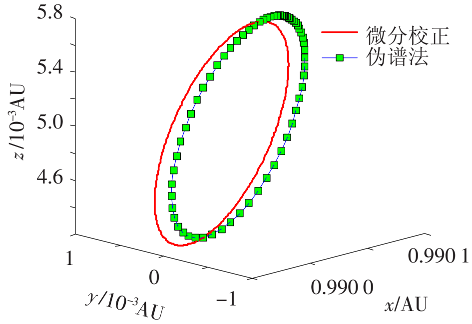

图 14　微分校正和伪谱法结果对比

这里仅仅是对使用全局配点法寻找太阳帆在 CRTBP 中的周期轨道的可行性做了初步验证,拟合后所得到的连续轨道只是 CRTBP 中周期轨道的近似值,可作为实际运行的参考轨道或目标轨道,为了保证太阳帆沿所设计的轨道运行,还需要附加一定的太阳帆姿态主动控制策略实现对轨道的跟踪控制.

4　结　论

本文分析了 CRTBP 中太阳帆人工拉格朗日点的存在条件和分布,针对大多数人工拉格朗日点附近周期轨道难以使用经典的摄动法求得的问题,采用一种全局配点法,即 Legendre 伪光谱算法,将非线性方程求解问题转化为非线性规划问题,并最终得到了周期轨道的近似解. 规划结果表明该方法可以实现近似最优解的收敛,且对初始猜测值依赖程度不高,为今后太阳帆限制性三体问题中的周期轨道设计奠定了基础.

参考文献

[1] MCLNNES C R. Solar sailing: technology, dynamics and mission applications [M]. London: Dpringer-Praxis, 1999.

[2] 龚胜平. 太阳帆航天器动力学与控制研究[D]. 北京:清华大学, 2009.

[3] RICHARDSON D L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points [J]. Celestial Mechanics, 1980, 22(3): 241 –253.

[4] HOWELL K C, BREAKWELL J V. Almost rectilinear Halo orbits[J]. Celestial Mechanics, 1984, 32(1): 29 –52.

[5] HOWELL K C, PERNICKA H J. Numerical determination of Lissajous trajectories in the restricted three-body problem[J]. Celestial Mechanics, 1988, 41(1/2/3/4): 107 –124.

[6] MARCHAND B, HOWELL K, WILSON R. An improved corrections process for constrained trajectory design in the n-body problem[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2007: 44(4): 884 –897.

[7]孙义燧, 周济林. 现代天体力学导论[M].北京:高等教育出版社, 2008: 122 –123.

[8] MCLNNES C R. Solar sail parking in restricted three-body systems[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics,1994,17(2): 399 –406.

[9] MCLNNES C R. Artificial Lagrange points for a partially reflecting solar sail[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1999, 22(1): 185 –187.

[10]MCLNNES A I. Strategies for solar sail mission design in the circular restricted three-body problem [D]. West Lafayette:Purdue University, 2000.

[11]BAOYIN H, MCLNNES C R. Solar sail orbits at artificial sun-earth Lagrange points [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005,28(6):1328 –1331.

[12]BAOYIN H, MCLNNES C R. Solar sail Halo orbits at the sun-earth artificial L_1 point[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2006, 94(2):155 –171.

[13]BAOYIN, H, MCLNNES C R. Solar sail equilibria in the elliptical restricted three-body problem [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics,2006, 29(3): 538 –543.

[14]WATERS T J, MCLNNES C R. Periodic orbits above the elliptic in the solar-sail restricted three body problem [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(3): 687 –693.

[15] GILL P, MURRAY W, SAUNDERS M. SNOPT: an SQP algorithm for large scale constrained optimization [J]. SIAM Review, 2005,47(1):99 –131.

(编辑　张　宏)