

单轴有限推力下卫星轨道快速机动控制

胡庆雷, 姜成平, 晋小伟, 霍 星

(哈尔滨工业大学 航天学院, 150001 哈尔滨)

摘要: 针对仅能提供单轴推力的卫星轨道机动的快速性问题, 提出了一种利用高斯伪谱法来求解最优控制问题的方法. 通过引入“虚拟卫星”的概念, 将卫星轨道机动问题转化为实际卫星与虚拟卫星的软交会问题. 建立了相对运动方程, 以机动时间为性能指标, 利用高斯伪谱法将最优控制问题转化为非线性规划问题, 避开了求解两点边值问题的困难. 通过使用 MATLAB 优化工具箱求解得到最优轨迹. 结果表明, 高斯伪谱法针对多约束、非线性强耦合方程, 求解速度快, 精度高, 对初值选取不十分敏感, 寻优能力强, 且具有一定的鲁棒性.

关键词: 高斯伪谱法; 虚拟卫星; 轨道机动; 时间最优

中图分类号: V448.2

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2013)07-0013-05

Rapid orbital maneuver control of satellite using finite single axis thruster

HU Qinglei, JIANG Chengping, JIN Xiaowei, HUO Xing

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

Abstract: A Gauss pseudo-spectral method is proposed to solve optimal control problem for satellite rapid orbital maneuver, in which only one axis thruster is provided under the finite thrust. The concept of "virtual satellite" transforms the orbital maneuver of satellite into the soft rendezvous of the satellite and virtual satellite. The relative motion equations are then formulated and the maneuver time is selected as cost function for the optimal control problem, which is transformed to a nonlinear programming problem by using the Gauss pseudo-spectral method. This approach avoids the difficulties in solving boundary value problem. Finally, the optimal trajectory is solved by using MATLAB optimization toolbox. The results show that the Gauss pseudo-spectral method is very effective for solving the multiple constrained nonlinear strongly coupled equations, and it isn't very sensitive to initial data and has certain robustness.

Key words: Gauss pseudo-spectral method; virtual satellite; orbital maneuver; time optimal

航天器轨道的机动方式包括脉冲式变轨和有限推力变轨等, 早期学者针对脉冲模型的轨道转移优化问题作了大量的研究工作^[1-5]. Prussing^[1]将 Lawden 基矢量优化理论应用到燃料最省、多脉冲、时间固定的近圆轨道交会中, 取得了很好的效果. Wang^[2]延续 Prussing 的工作, 将 Lawden 基向量理论的应用拓展到任意偏心率椭圆轨道交会的轨迹优化问题中, 基于椭圆轨道的相对运动方程

(TH 方程), 利用基向量来解决共面的同轴任意大偏心率的椭圆轨道之间时间固定的多脉冲最优交会问题. 脉冲式变轨要求速度变化在瞬间完成, 这在发动机推力不受限制的假设下是成立的. 然而, 在实际工程中, 发动机无法实现在很短时间内产生很大的推力, 即发动机的推力用脉冲来近似是不成立的, 因此, 近几十年来, 基于有限推力的航天器轨道优化日益引起人们的关注^[6-12]. Enright^[6]利用直接配置法和非线性规划方法很好地求解了有限推力下的航天器轨迹优化. Hall^[7]通过使用 Kustaanheimo - Stiefel 变换研究了圆轨道之间的时间最短连续推力轨道转移问题. Ranieri^[9]通过间接法研究了有限推力下时间固

收稿日期: 2012-07-06.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61004072, 61273175);
教育部新世纪优秀人才计划资助项目(NCET-11-0801); 黑龙江省青年基金资助项目(QC2012C024).

作者简介: 胡庆雷(1979—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 胡庆雷, huqinglei@hit.edu.cn.

定,燃料最省的优化轨迹.通常来说,解决轨迹优化问题的数值方法,常用有两种:直接法和间接法^[10].

直接法又可分为两种:仅离散控制变量的直接打靶法和同时离散控制变量和状态变量的直接配点法.伪谱法是近年来一种新型的求解最优问题的解法,属于直接优化配点法中的一种,能够用较少的配置点获得很高的近似精度.因此,伪谱法一经提出,就被广泛应用到各领域^[11-15].符俊^[12]利用高斯伪谱法得到了一条利用气动力辅助平面实现变轨燃料消耗最省的优化轨迹.彭祺攀^[13]研究了月球定点着陆的燃料最省问题,通过将该最优控制问题中的控制变量和终端时间作为优化变量,利用高斯伪谱法得到了一条最优轨迹.Huntington^[14]针对 4 个航天器编队问题,利用高斯伪谱法设计了一条 4 个航天器从初始队形转移到期望队形的燃料最省的轨迹.Liu^[15]将高斯伪谱法应用到求解一个多阶段的防空导弹的优化轨迹问题中,针对防空导弹的状态方程,在不同阶段是不一样的,用高斯伪谱法在每个阶段对轨迹进行优化,得到最优解实现了导弹到达预定的拦截点时,速度达到最大值.

为此,本文在上述研究结果的基础上,针对实际工程实践中由于某种原因导致卫星只能提供单轴推力的情况,利用高斯伪光谱方法进行了卫星有限推力的轨道转移优化设计.首先,在“虚拟卫星”的定义下,建立了相对运动方程,将卫星轨道机动问题转化为与虚拟卫星实现软交会问题;其次分别给出了轨道转移优化问题的性能指标,终端约束和控制变量约束等;在此基础上,用高斯伪光谱方法将有限推力轨道转移最优控制问题转化为非线性规划问题,应用 MATLAB 优化工具箱 SNOPT 软件包对非线性规划问题进行求解;最后,对基于伪光谱方法的有限推力轨道转移进行了仿真实验.

1 问题描述

1.1 相对运动方程的建立

本文假设虚拟卫星运行于小偏心率($0 \leq e \leq$

$$\mathbf{f}_c = \begin{bmatrix} f_{cx} \\ f_{cy} \\ f_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_4q_3 + q_1q_2) & 2(-q_4q_2 + q_1q_3) \\ -2(q_4q_3 - q_1q_2) & q_4^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_4q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_4q_2 + q_1q_3) & 2(-q_4q_1 + q_2q_3) & q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

这里 $\bar{\mathbf{q}} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [\mathbf{q} \ q_4]^T$ 表示卫星姿态四元数.

1) 的近圆轨道上,且卫星轨道的机动范围相对于地球的半径很小,因此可以通过在虚拟星的体坐标系下建立卫星相对运动方程,即 CW 方程来描述卫星轨道机动^[16]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega_0\dot{y} - 3\omega_0^2x = f_x, \\ \ddot{y} + 2\omega_0\dot{x} = f_y, \\ \ddot{z} + \omega_0^2z = f_z. \end{cases}$$

式中: f_x, f_y, f_z 分别为卫星在轨道坐标系 3 个轴方向的单位质量控制力加速度; $\omega_0 = 0.001 \text{ rad/s}$ 为虚拟卫星的轨道角速度.为了便于最优分析,将上述模型转化为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{z} = v_z, \\ \dot{v}_x = 2\omega_0v_y + 3\omega_0^2x + f_x, \\ \dot{v}_y = -2\omega_0v_x + f_y, \\ \dot{v}_z = -\omega_0^2z + f_z. \end{cases}$$

假设卫星能够提供的最大推力加速度为 0.004 m/s^2 .为了节省空间或者由于某些原因导致卫星只能提供某一个轴的推力,如何在该种情况下完成轨道的快速机动同样成为研究的重点之一.本文在假设卫星只能提供单轴推力的情况下分析卫星小范围轨道的快速机动问题.卫星在体坐标系下只能提供单一方向的推力,因此为了完成轨道快速机动,需要通过不断调整卫星姿态来产生所需要的推力矢量.

假设卫星只能提供单一方向的推力(只能提供体坐标系下 x 轴方向),则 $[u \ 0 \ 0]^T$ 将该体坐标系下的向量投影到虚拟卫星的体坐标系中,

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{z} = v_z, \\ \dot{v}_x = 2\omega_0v_y + 3\omega_0^2x + f_{cx}, \\ \dot{v}_y = -2\omega_0v_x + f_{cy}, \\ \dot{v}_z = -\omega_0^2z + f_{cz}. \end{cases}$$

其中:

由此,通过上式可以看出卫星轨道机动所需要的推力需要通过不断调整卫星的姿态来满足要

求,而卫星姿态动力学和运动学方程可写为^[16]

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}_c, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = 0.5(\mathbf{q}^\times + q_4 \mathbf{I}_3) \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

$$\dot{q}_4 = -0.5\mathbf{q}^T \boldsymbol{\omega}. \quad (3)$$

式中: \mathbf{I} 为转动惯量; $\boldsymbol{\omega}$ 为卫星姿态角速度; \mathbf{T}_c 为卫星的控制力矩; \mathbf{I}_3 表示3维的单位矩阵.将式(2)~(3)展开可得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_4 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_4 \\ q_4 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

1.2 性能指标的选取与约束条件

考虑卫星轨道机动的快速性,在卫星所携带燃料充足的情况下,性能指标取时间最短:

$$\min J = \int_0^{t_f} 1 dt, \quad (4)$$

且满足如下约束:

$$|u| \leq 0.004 \text{ m/s}^2, \quad (5)$$

$$\begin{cases} |T_{cx}| \leq T_{\max}; \\ |T_{cy}| \leq T_{\max}; \\ |T_{cz}| \leq T_{\max}; \\ T_{\max} = 0.06 \text{ N} \cdot \text{m}, \end{cases} \quad (6)$$

以及

$$\begin{cases} |\omega_x| \leq 0.1 \text{ rad/s}; \\ |\omega_y| \leq 0.1 \text{ rad/s}; \\ |\omega_z| \leq 0.1 \text{ rad/s}. \end{cases} \quad (7)$$

2 高斯伪谱法求解最优控制问题

Gauss 伪谱法将状态变量和控制量在一系列的 Gauss 点上离散,并以这些离散点为节点构造插值多项式来逼近状态和控制变量.通过高斯伪谱法的离散化将最优控制问题转化为非线性规划问题^[11].

通过式(4)~(7)可以看出,所定义的最优问题是终端时刻可动的最优问题,为求解方便,首先将优化问题的时间域 $t \in [t_0, t_f]$ 映射到区间 $\tau \in [-1, 1]$,映射函数为

$$\tau = -1 + \frac{2(t - t_0)}{t_f - t_0}.$$

取 $t_0 = 0$,则式(12)可以简化为

$$\tau = \frac{2t}{t_f} - 1.$$

然后利用拉格朗日插值多项式对系统状态和

控制量进行逼近.状态用一个 $N+1$ 次的 Lagrange 插值多项式 L 逼近,如下:

$$x(t(\tau)) \approx X(\tau) = \sum_{i=0}^N X(\tau_i) L_i(\tau). \quad (8)$$

其中 $L_i(\tau)$ ($i = 0, 1, \dots, N$), 定义为

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}.$$

此外,控制量用 1 个 N 次 Lagrange 插值多项式 L^* 逼近,如下:

$$u(t(\tau)) \approx U(\tau) = \sum_{i=1}^N U(\tau_i) L_i^*(\tau).$$

式中:

$$L_i^*(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}.$$

通过观察上式,可以得出

$$L_i(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$L_i^*(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

对式(8)求导可得

$$\dot{x}(\tau) \approx \dot{X}(\tau) = \sum_{i=0}^N \dot{x}(\tau_i) \dot{L}_i(\tau).$$

每一个拉格朗日多项式在 LG 离散点的导数可以用一个微分近似矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{N \times N+1}$ 来表示,矩阵中的元素由下式决定:

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \sum_{l=0}^N \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^N (\tau_k - \tau_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (\tau_i - \tau_j)}.$$

其中, $k = 1, 2, \dots, N, i = 0, 1, \dots, N$. 动态约束通过微分近似矩阵转化为代数约束:

$$\sum_{i=0}^N D_{ki} X_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k, t_0, t_f) = 0.$$

式中: $X_k \equiv X(\tau_k) \in \mathbf{R}^n; U_k \equiv U(\tau_k) \in \mathbf{R}^m, k = 1, 2, \dots, N$. 注意到该动态约束条件式仅在 LG 离散点成立,而在边界点并不满足条件,为此通过引入高斯积分解决该边界值问题.

$$\begin{cases} X_0 \equiv X(-1), \\ X_f \equiv X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f). \end{cases}$$

应用高斯积分逼近目标函数:

$$J = \Phi(X_0, t_0, X_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k g(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f).$$

其中 w_k 为高斯权值.至此,轨道机动的时间最优问题被转化为了 1 个多约束的参数优化问题.上述优化过程如图 1 所示.

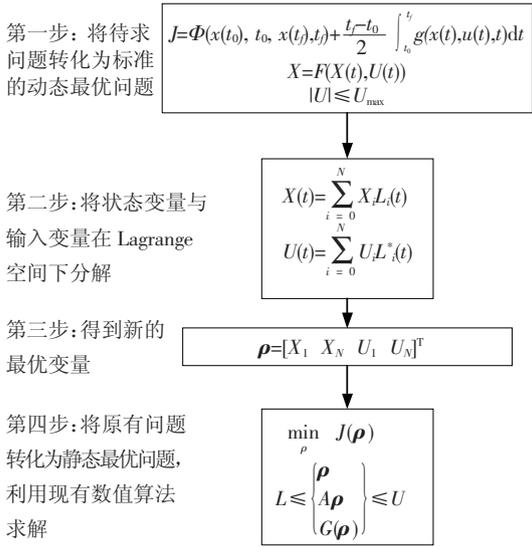


图 1 高斯伪谱法的优化过程

3 仿真结果与分析

采用 Gauss 伪谱法和 MATLAB 优化工具箱 SNOPT 软件包对轨道机动优化问题进行仿真研究, 选择如表 1 所示的仿真参数. 假定整个转移过程中对卫星的姿态不加约束, 因为卫星在仅能提

供单轴推力的情况下, 要完成轨道的快速机动需要通过不断调整卫星姿态以便产生所需的推力矢量. 仿真结果如图 2~7 所示, 并且利用 SNOPT 软件得到的可以提供任意方向推力的小范围轨道机动最短时间为: $t_f = 959.814\ 780\ 346\ 062\ s$.

在仿真研究中, 图 2~3 分别表示相对位置和相对速度误差, 通过仿真图可以看出仅能提供单一方向推力卫星实现了与虚拟卫星的软交会. 图 4~5 为最优姿态四元数和姿态角速度. 在整个控制过程中, 对卫星的姿态无约束, 无需给出姿态控制误差. 通过观察卫星姿态角速度变化曲线, 可以看出在卫星轨道快速机动过程中, 卫星姿态角的变化满足幅值约束条件. 从图 6~7 所示的最优推力加速度和最优姿态控制力矩曲线可以看出, 最大推力加速度为 $0.004\ m/s^2$, 最大姿态控制力矩为 $0.06\ N \cdot m$, 均满足控制幅值约束. 同时, 从上图可以看出, 仅能提供单轴 (x 轴) 推力的卫星依然可以实现轨道的快速机动, 只是要通过不断的调整卫星的姿态来满足轨道快速机动所需要的各轴的推力.

表 1 仿真参数

转动惯量/ ($kg \cdot m^2$)	卫星轨道角速度/ ($rad \cdot s^{-1}$)	地球引力常数/ ($km^3 \cdot s^{-2}$)	卫星初始相对位置/m
$I = \text{diag}[(30, 20, 40)]$	$\omega = 0.001$	$GM = 398\ 600$	$r_0 = [-655.285\ 4 \quad 115.23 \quad -75.45]$
卫星初始相对速度/ ($m \cdot s^{-1}$)	卫星末端 相对位置/m	卫星初始姿态 四元数	卫星初始姿态角速度/ ($rad \cdot s^{-1}$)
$v_0 = [0.06 \quad 1.07 \quad 0.14]$	$r_f = [0 \quad 0 \quad 0]^T$	$q_0 = [0 \quad -0.816\ 5 \quad -0.408\ 2 \quad 0.408\ 2]^T$	$\omega_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

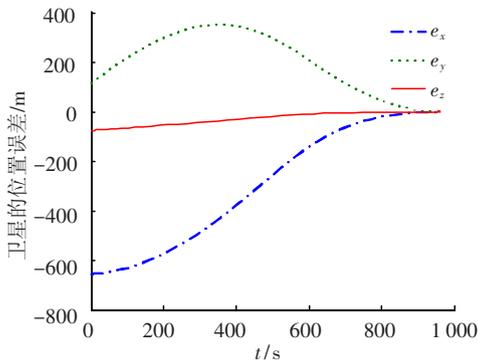


图 2 卫星的相对位置误差

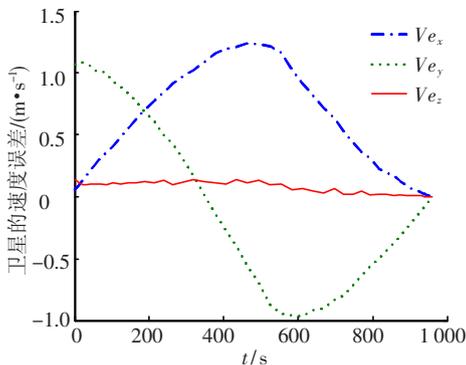


图 3 卫星的相对速度误差

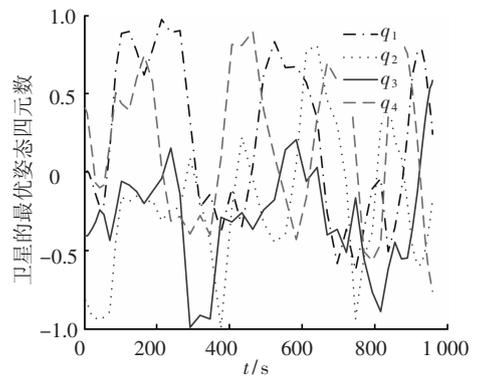


图 4 卫星的最优姿态四元数

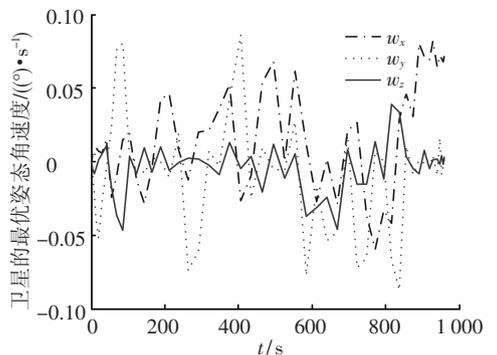


图 5 卫星的最优姿态角速度

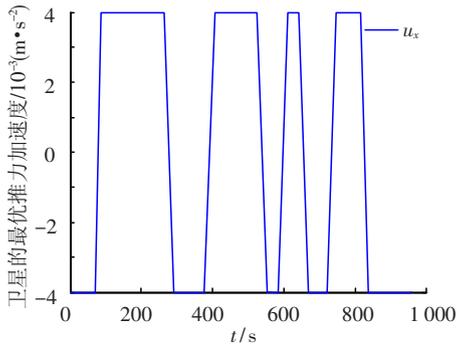


图6 施加在卫星上的最优推力加速度

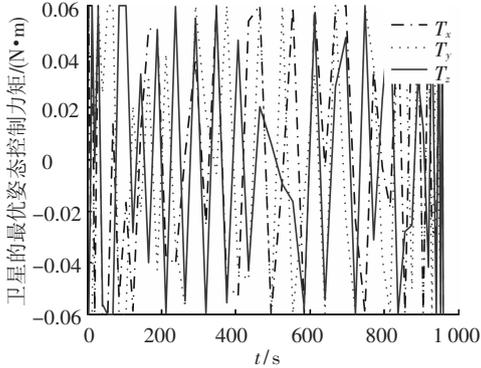


图7 施加在卫星上的最优姿态控制力矩

4 结 论

本文针对由于某种原因导致卫星仅能提供单轴推力的情况下实现轨道的快速机动问题,将其转化为一类多约束、强非线性耦合的时间最优控制问题,利用高斯伪谱法将该最优控制问题离散化为非线性规划问题,使用 MATLAB 的优化工具箱 SNOPT 进行求解,通过仿真结果可以得出,高斯伪谱法求解多约束、非线性强耦合方程,求解速度快,对初值的选取不敏感,且高斯伪谱法离散化的非线性规划问题的 KKT 条件与最优一阶必要条件的离散形式一致,因此,高斯伪谱法克服了其他直接法求解精度不高的缺点。

参考文献

- [1] PRUSSING J E. Optimal two and three-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2003, 40(6): 1221-1228.
- [2] WANG J X, BAO Y, HE X, et al. Optimal four-impulse rendezvous between coplanar elliptical orbits[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2011, 54(4): 792-802.
- [3] 王翔, 龚胜平, 宝音贺西. 多冲量近圆轨道交会的快速打靶法[J]. 空间控制技术与应用, 2010, 36(5): 1-6.

- [4] PONTANI M, CONWAY B A. Particle swarm optimization applied to impulsive orbital transfers[J]. Acta Astronautica, 2012, 74(3): 141-152.
- [5] SANTOS D P S, COLASURDO G. Four-impulsive rendezvous maneuvers for spacecrafts in circular orbits using genetic algorithms[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 2012: 1-16.
- [6] EERIGHT P J, CONWAY B A. Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using collocation and nonlinear programming[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1991, 14(5): 981-985.
- [7] THORNE J D, HALL C D. Minimum-time continuous-thrust orbit transfers using the kustaanheimo-stiefel transformation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1997, 20(4): 836-838.
- [8] OCAMPO C. Finite burn maneuver modeling for a generalized spacecraft trajectory design and optimization system[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 2004, 1017(1): 210-233.
- [9] RANIERI C L, OCAMPO C A. Optimization of roundtrip, time-constrained, finite burn trajectories via an indirect method[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28(2): 306-314.
- [10] BETTS J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 193-207.
- [11] BENSON D A. A Gauss pseudo-spectral transcription for optimal control[D]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 2005: 45-62.
- [12] 符俊, 蔡洪, 李安梁. 基于 Gauss 伪谱法的航天器气动力辅助平面变轨问题研究[J]. 国防科技大学学报, 2012, 33(6): 95-99.
- [13] 彭祺攀, 李海阳, 沈红新. 基于高斯-伪谱法的月球定点着陆轨道快速优化设计[J]. 宇航学报, 2010, 31(4): 1012-1016.
- [14] HUNTINGTON G T, RAO A V. Optimal configuration of spacecraft formations via a gauss pseudospectral method[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2005, 120(1): 33-50.
- [15] LIU Z, DONG C H. Multi-stage air defense missile trajectory optimization using Gauss pseudospectral method[C]//Proceeding of Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2010(1/2): 690-693.
- [16] SIDI M J. Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 106-112.