3种确定性采样非线性滤波算法的复杂度分析

张召友，郝燕玲，吴　旭

（哈尔滨工程大学 自动化学院，150001 哈尔滨）

摘　要：为考察非线性卡尔曼滤波在SINS/GPS组合导航中的实时性问题，对无迹卡尔曼滤波（UKF）、中心差分卡尔曼滤波（CDKF）和容积卡尔曼滤波（CKF）3种常用确定性采样非线性算法的实现复杂度进行了理论分析，并总结了实时性选择的依据.根据确定性采样卡尔曼滤波的统一迭代步骤，以等效浮点操作数作为评价准则对3种算法进行了复杂度分析，导出了精确计算复杂度的表达式，并进一步对三者之间的差异进行了推导.将上述算法应用于SINS/GPS紧耦合导航中，并进行了蒙特卡罗仿真.结果表明：3种算法的精度一致，UKF复杂度最高，在状态维数高于量测维数的系统中CKF复杂度最低，但在高维量测系统中CDKF可望获得最小的硬件开销.

关键词：确定性采样；非线性；卡尔曼滤波；复杂度；组合导航

中图分类号：TN967.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0367-6234(2013)12-0111-05

Complexity analysis of three deterministic sampling nonlinear filtering algorithms

ZHANG Zhaoyou, HAO Yanling, WU Xu

(College of Automation, Harbin Engineering University, 150001 Harbin, China)

Abstract: To study the real time problem of nonlinear Kalman filter in SINS/GPS integrated navigation system, the complexity of three usual deterministic sampling nonlinear Kalman filters (UKF, CDKF and CKF) is analyzed and a selection basis is summarized. Numbers of floating-point operations (flops) of the three algorithms are counted according to unified filtering steps, so the accurate expressions of computing complexity are gotten. And a further derivation of the complexity differences among three algorithms is carried out. The aforementioned algorithms are applied in SINS/GPS tightly coupled navigation. Monte Carlo simulation results indicate that three algorithms have similar precision, UKF has the biggest complexity and the complexity of CKF is lower than that of CDKF when the dimension of system states is larger than measurement, and CDKF can get the lowest complexity in some high-dimensional measurement systems.

Key words: deterministic sampling; nonlinear; Kalman filter; complexity; integrated navigation

卡尔曼滤波是实现捷联惯性导航系统（strapdown inertial navigation system, SINS）和全球定位系统（global positioning system, GPS）组合导航数据融合的首选方法[1-2].低精度传感器构成的组合系统在复杂应用环境中易产生大的误差，导致系统非线性度增加，此时线性卡尔曼滤波已不再适用，而扩展卡尔曼滤波（extended Kalman filter, EKF）也难以保证系统性能.随着近年非线性滤波的快速发展，较EKF精度更高的确定性采样卡尔曼滤波被用于处理组合导航中的非线性融合问题.确定性采样卡尔曼滤波是一类利用有限固定采样点对高斯系统中状态的一二阶矩进行近似，并经过非线性函数传播后进行加权求和估计的滤波算法.最为常用的3种确定性采样算法为[3]无迹卡尔曼滤波（unscented Kalman filter, UKF）、中心差分卡尔曼滤波（central difference Kalman filter, CDKF）、容积卡尔曼滤波（cubature

收稿日期：2013-01-06.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60834005）.
作者简介：张召友（1983—），男，博士研究生；
郝燕玲（1944—），女，教授，博士生导师.
通信作者：张召友，zhangzhaoyou1983@163.com.

Kalman filter, CKF)算法.

精度是表征滤波性能的重要指标,大量文献已证实 UKF、CDKF、CKF 的精度相当,均至少可达二阶[4-5].但在导航系统中,滤波多是在嵌入式计算机中实现,因此复杂度是影响其应用的另一个重要参数.先前对于非线性滤波复杂度的研究多是对单一算法的改进与分析[6-8],对于形式相近的确定性采样算法之间缺乏系统的分析与比较.因此,本文将对 3 种典型确定性采样算法进行等效复杂度的理论分析,导出定量的计算表达式,并进行横向比较,得出算法实时性选择的依据.最后,将确定性采样算法应用于 SINS/GPS 的紧耦合组合导航,对其精度和复杂度进行仿真,验证分析的正确性.

1 确定性采样滤波的等效复杂度分析

滤波的精度是保证系统性能的前提,但当精度满足要求后滤波的易实现性与否是另一个制约因素,复杂度是表征易实现性的主要参数.本节将对 UKF、CDKF、CKF 的复杂度及差异进行分析,力图得出一个精确的、定量的表述.

1.1 确定性采样滤波中数值运算的复杂度

分析算法复杂度最为有效的方法是对其浮点操作数(flops)的准确统计.一次 flops 定义为两个浮点数进行一次加、减、乘或除法运算.但滤波中的很多运算难以用加、减、乘、除来简单描述,如开方、数值分解、指数运算等,因此只能将其等效为相同运行时间的 flops,故称为等效复杂度分析.本文给出滤波中基本代数运算的 flops 次数[1]:1) 矩阵加减法. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times m}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$,计算 $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$ 需 nm 次 flops.2) 矩阵相乘. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{m\times l}$,计算$\boldsymbol{AB}$的 flops 为$2mnl - nl$次.3) 矩阵求逆. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的 flops 数为 n^3.4)Cholesky 分解. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, 则 chol$(A)$ 需要进行$\dfrac{1}{3}n^3$ 次 flops.

利用上述诸元素即可对确定性采样卡尔曼滤波进行复杂度的分析.

1.2 确定性采样滤波的等效复杂度分析

3 种确定性采样算法的滤波形式相近,均包括样本点产生、基于状态方程与量测方程的均值与方差预测以及状态与方差的后验估计等步骤.算法实现形式均为加性噪声形式,UKF 与 CDKF 的详细公式参见文献[4],CKF 的公式参见文献[5].按照滤波过程可对相应算法进行分析.由于具体的分析过程较为繁琐,在此只给出 CKF 算法的分析过程如下.

产生 CT 样本点,如下式,需要$\dfrac{1}{3}n^3 + 3n^2$ 次 flops.

$$\boldsymbol{\chi}_{k-1} = \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + (\sqrt{n\boldsymbol{P}_{k-1}})_i \quad \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} - (\sqrt{n\boldsymbol{P}_{k-1}})_i\right].$$

状态方程预测, 如下式, 获得样本点预测 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}$ 需要$4n^3 - 2n^2$ 次 flops(3 种算法均以线性矩阵形式代换), 获得状态预测值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 需要 $2n^2$ 次 flops,预测协方差 $\boldsymbol{P}_{k|k-1}$ 需要 $2n^3 + 4n^2$ 次 flops.

$$\begin{cases}\boldsymbol{\chi}_{k|k-1} = \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{\chi}_{k-1}),\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = w\sum\limits_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1},\\ \boldsymbol{P}_{k|k-1} = w\sum\limits_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{k-1}.\end{cases}$$

产生量测样本点,如下式,需要$\dfrac{1}{3}n^3 + 3n^2$ 次 flops.

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}_{k-1} = \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + (\sqrt{n\boldsymbol{P}_{k|k-1}})_i \quad \hat{x}_{k|k-1} - (\sqrt{n\boldsymbol{P}_{k|k-1}})_i\right].$$

量测方程预测, 如下式, 获得样本点预测 $\boldsymbol{\gamma}_{k|k-1}$ 需要 $4n^2l - 2nl$ 次 flops, 获得量测预测值 $\hat{y}_{k|k-1}$ 需要 $2nl$ 次 flops,预测量测协方差 $\boldsymbol{P}_{y_k}$ 需要 $4nl^2 + 3l^2$ 次 flops,互协方差$\boldsymbol{P}_{x_ky_k}$ 需要$4n^2l + 2nl$ 次 flops.

$$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_{k|k-1} = \boldsymbol{h}_k(\tilde{\boldsymbol{\chi}}_{k-1}),\\ \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = w\sum\limits_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\gamma}_{i,k|k-1},\\ \boldsymbol{P}_{y_k} = w\sum\limits_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\gamma}_{i,k|k-1}\boldsymbol{\gamma}_{i,k|k-1}^{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k,\\ \boldsymbol{P}_{x_ky_k} = w\sum\limits_{i=1}^{2n}\tilde{\boldsymbol{\chi}}_{i,k|k-1}\boldsymbol{\gamma}_{i,k|k-1}^{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}.\end{cases}$$

计算后验估计,如下式,增益$\boldsymbol{K}_k$ 需 $l^3 + (2nl^2 - nl)$ 次 flops,协方差更新 $\boldsymbol{P}_k$ 需要 $2nl^2 - nl + 2n^2l$ 次 flops,状态更新 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 需要 $2nl + l$ 次 flops.

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{x_ky_k}\boldsymbol{P}_{y_k}^{-1},\\ \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - K_k\boldsymbol{P}_{y_k}K_k^{\mathrm{T}},\\ \hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}).\end{cases}$$

总结以上分析,CKF 的复杂度 f_{CKF} 总计为

$$\frac{20}{3}n^3 + 10n^2 + 10n^2l + 8nl^2 + 2nl + l^3 + 3l^2 + l.$$

同理,可对 UKF 和 CDKF 进行分析,滤波参数的具体分析结果如表 1 所示.由表中数据可计算得到 UKF 的复杂度 f_{UKF} 总计为

$$\frac{26}{3}n^3 + 15n^2 + 10n^2l + 5n + 8nl^2 + 6nl + l^3 + 3l^2 + 4l.$$

CDKF 的复杂度 f_{CDKF} 总计为

$$\frac{26}{3}n^3 + 13n^2 + 8n^2l + 2n + 8nl^2 + 5nl + l^3 + 2l^2 + 3l.$$

表 1　确定性采样卡尔曼滤波复杂度分析结果

滤波参数	CDKF	UKF	CKF
$\boldsymbol{\chi}_{k-1}$	$\frac{1}{3}n^3 + 3n^2$	$\frac{1}{3}n^3 + 3n^2$	$\frac{1}{3}n^3 + 3n^2$
$\boldsymbol{\chi}_{k\|k-1}$	$4n^3 - n$	$4n^3 - n$	$4n^3 - 2n^2$
$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\|k-1}$	$2n^2 + 2n$	$2n^2 + 2n$	$2n^2$
$\boldsymbol{P}_{k\|k-1}$	$4n^3 + 5n^2 + n$	$4n^3 + 5n^2 + 2n$	$2n^3 + 4n^2$
$\tilde{\boldsymbol{\chi}}_{k-1}$	$\frac{1}{3}n^3 + 3n^2$	$\frac{1}{3}n^3 + 3n^2$	$\frac{1}{3}n^3 + 3n^2$
$\boldsymbol{\gamma}_{k\|k-1}$	$4n^2l - l$	$4n^2l - l$	$4n^2l - 2nl$
$\hat{\boldsymbol{y}}_{k\|k-1}$	$2nl + 2l$	$2nl + 2l$	$2nl$
$\boldsymbol{P}_{y_k}$	$4nl^2 + 3nl + 2l^2 + l$	$4nl^2 + 2nl + 3l^2 + 2l$	$4nl^2 + 3l^2$
$\boldsymbol{P}_{x_k y_k}$	$2n^2l$	$4n^2l + 2n^2 + 2nl + 2n$	$4n^2l + 2nl$
$\boldsymbol{K}_k$	$l^3 + (2nl^2 - nl)$	$l^3 + (2nl^2 - nl)$	$l^3 + (2nl^2 - nl)$
$\hat{\boldsymbol{x}}_k$	$2nl + l$	$2nl + l$	$2nl + l$
$\boldsymbol{P}_k$	$2nl^2 - nl + 2n^2l$	$2nl^2 - nl + 2n^2l$	$2nl^2 - nl + 2n^2l$

由 3 个表达式可看出，CDKF、UKF、CKF 3 种算法的复杂度均为 $O(n^3)$ 和 $O(l^3)$ 量级，即与状态维数和量测维数均呈三次方关系.

通过对 3 种算法总体复杂度系数项的直观比较可知：$f_{\mathrm{UKF}} > f_{\mathrm{CDKF}}$ 和 $f_{\mathrm{UKF}} > f_{\mathrm{CKF}}$ 恒成立，即 UKF 的复杂度始终最高.而 CDKF 和 CKF 的复杂度难以通过系数项直接看出，所以将两者求差得

$$\Delta\mathrm{flops} = f_{\mathrm{CDKF}} - f_{\mathrm{CKF}} = 2n^3 + 3n^2 - 2n^2l + 2n + 3nl - l^2 + 2l. \quad (1)$$

式(1)仍为状态维数 n 的三次方形式，不便于分析. 假设状态维数 n 和量测维数 l 存在 $n - l = k$ 的关系，其中 k 为整数，则式(1) 可分别整理为关于 n 和 l 的二次项形式，即

$$\Delta\mathrm{flops} = 5n^2 + 2n^2k + 4n - nk - k^2 - 2k = (5 + 2k)n^2 + (4 - k)n - (k^2 + 2k), \quad (2)$$

$$\Delta\mathrm{flops} = -k^2 - (2 + n - 2n^2)k + (4n + 5n^2). \quad (3)$$

当 $0 \leqslant k < n$ 时，状态维数大于量测维数，由式(2) 可知 Δflops 为关于 n 的开口向上的抛物线，且 $n = 1$ 时 $\Delta\mathrm{flops} > 0$，所以 Δflops 为状态维数 n 的单增函数，即状态维数大于量测维数时，$f_{\mathrm{CDKF}} > f_{\mathrm{CKF}}$ 恒成立，且随着状态维数增大，CDKF 与 CKF 的差异也增大.

当 $k \leqslant 0$ 时，量测维数大于状态维数，由式(3) 知 Δflops 为关于 k 的开口向下的抛物线，所以随着 k 的不断减小，会出现 $\Delta\mathrm{flops} < 0$ 的情况，即量测维数与状态维数差异的不断加大，CKF 的复杂度会高于 CDKF，即 $f_{\mathrm{CKF}} > f_{\mathrm{CDKF}}$.具体差异可根据实际系统的维数及前面的复杂度计算式进行计算得出.

为更为直观的揭示三者之间的差异，根据复杂度计算式绘出了图 1、2 所示的状态和量测维数分别变化时 3 种算法复杂度的变化曲线.

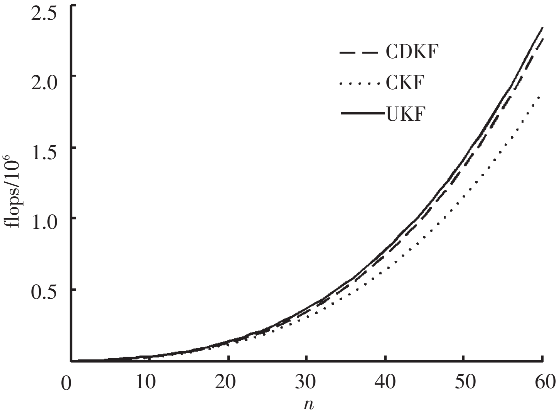

图 1　确定性采样卡尔曼滤波复杂度(l=10)

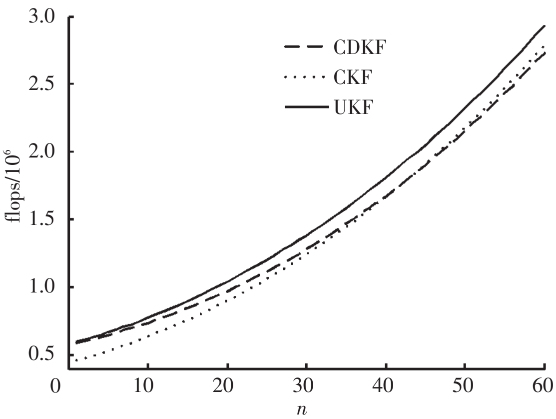

图 2　确定性采样卡尔曼滤波复杂度(n=40)

2　仿真实验与分析

为验证 UKF、CDKF 和 CKF 算法复杂度分析的正确性及在精度上的一致性，分别将其应用于 SINS/GPS 的紧耦合导航中.

状态方程选取大方位失准欧拉角非线性模型，具体见文献[9]，状态量为：$\boldsymbol{x} = [\delta\psi, \delta\theta, \delta\gamma, \delta V_E, \delta V_N, \delta V_U, \delta L, \delta\lambda, \delta h, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z, b_t, d_t]^{\mathrm{T}}$. 其中，$(\delta\psi, \delta\theta, \delta\gamma)$ 为姿态误差，$(\delta V_E, \delta V_N, \delta V_U)$ 为速度误差，$(\delta L, \delta\lambda, \delta h)$ 为位置误差，ε 和 ∇ 分别为陀螺和加速度计常值漂移，b_t 和 d_t 分别为时钟偏置和漂移.

利用 4 颗卫星的伪距与伪距率作为观测量，则卫星 i 的量测值为 $\boldsymbol{y}_{i,k} = [\rho_{i,k}, \dot{\rho}_{i,k}]$，$\rho_{i,k}$ 为伪距，$\dot{\rho}_{i,k}$ 为伪距率.具体非线性量测方程参见文献[10].

综上可知，状态维数为 $n = 17$，量测维数为 $l = 8$. 根据前面对复杂度的分析，$l = 8$ 时有 $f_{\mathrm{UKF}} > f_{\mathrm{CDKF}} > f_{\mathrm{CKF}}$.

仿真中载体分别经过静止、加速、爬升等阶段.初始位置为(126.67°，45.78°，100 m).初始失准角为(5°，5°，20°).SINS 传感器各参数为：陀螺常值漂移 100°/h，随机漂移 $0.3°/\sqrt{\mathrm{h}}$；加速度计零偏 0.001 g(g = 9.780 3 m/s^2)，随机噪声 $0.001g/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. GPS 伪距率量测噪声为 0.1 m/s；伪距量测噪声为 10 m；时钟偏差为 100 m；时钟漂移噪声为 0.1 m/s.

随机产生 20 组数据进行蒙特卡罗仿真.图 3、4 分别给出了紧耦合的姿态和位置估计误差曲线(20 次仿真平均值).表 2 给出了确定性采样滤波在 SINS/GPS 紧耦合导航中的估计精度(20 组均方跟误差的平均值).由图 3、4 可知，基于确定性采样原理的 UKF、CDKF、CKF 3 种算法均可使姿态和位置快速收敛，并且精度相近，只有可忽略的轻微不同.UKF、CDKF、CKF 3 种算法的单次导航迭代耗时(20 次仿真平均值)分别为 7.23、6.92、6.74 ms.可见，UKF 的复杂度最高，CDKF 次之，CKF 最低，与理论分析结果一致.

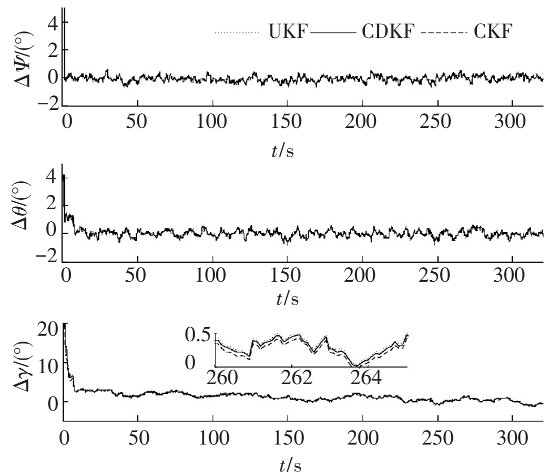

图 3　载体姿态误差

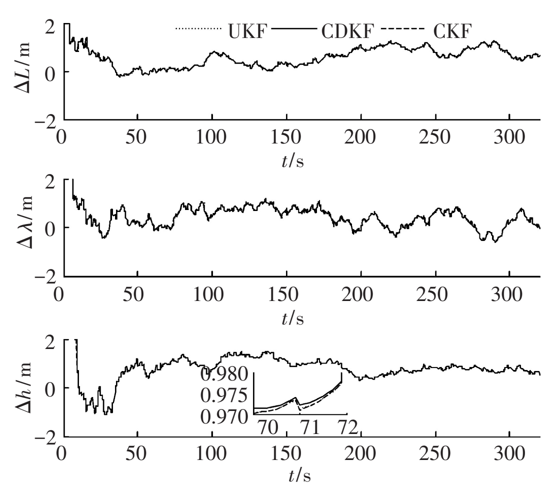

图 4　载体位置误差

表 2　SINS/GPS 紧耦合导航估计性能

算法	Δψ/(°)	Δθ/(°)	Δγ/(°)	ΔL/m	Δλ/m	Δh/m
UKF	0.208	0.308	2.670	0.590	1.014	1.387
CDKF	0.208	0.305	2.646	0.590	1.014	1.388
CKF	0.210	0.299	2.432	0.592	1.013	1.387

3 结　论

1)针对确定性采样非线性滤波的实时性问题,对 UKF、CDKF 和 CKF 3 种常用算法进行了复杂度分析,导出了复杂度计算的表达式.

2)通过进一步的差异性比较,表明 3 种算法中 UKF 复杂度最高;当状态维数高于量测维数时,CDKF 的复杂度低于 UKF 的复杂度,CKF 的复杂度最低;量测维数相对状态维数较高时,CDKF 的复杂度会低于 CKF 的复杂度,在诸如雷达测距[11]等高维量测系统中选取 CDKF 可获得最小的硬件开销.

3)将 3 种算法应用于 SINS/GPS 的紧耦合导航中,仿真结果表明了分析结果的正确性.

参考文献

[1] GREWAL M S, ANDREW A P. Kalman filtering, theory and practice using Matlab [M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2008: 225-289.

[2] 姬晓琴, 高晓颖. 低轨卫星紧组合导航 UKF 方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2012: 44(7): 135-138.

[3] 王小旭,潘泉,黄鹤,等. 非线性系统确定采样型滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 801-812.

[4] MERWE R V D. Sigma-point Kalman filter for probabilistic inference in dynamic state-space models [D]. Portland: Oregon Health & Science University, 2004: 108-110.

[5] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.

[6] 赵恒, 苏永清, 叶萍. 快速传递对准滤波器设计及其计算复杂度分析[J]. 弹箭与制导学报, 2011, 31 (3): 31-34.

[7] HOLMES S A, KLEIN G, MURRAY D W. An O(N^2) square root unscented Kalman filter for visual simultaneous localization and mapping [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31 (7): 1251-1263.

[8] KARLSSON R, SCHON T, GUSTAFSSON F. Complexity analysis of the marginalized particle filter [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(11): 4408-4411.

[9] ALI J, MIRZA M. Performance comparison among some nonlinear filters for a low cost SINS/GPS integrated solution [J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 61 (3): 491-502.

[10] LI Y, RIZOS C, WANG J, *et al*. Sigma-point Kalman filtering for tightly coupled GPS/INS integration [J]. Journal of the Institute of Navigation, 2008, 55 (3): 167-177.

[11] MCMANUS C, BARFOOT T. A serial approach to handling high-dimensional measurements in the sigma-point Kalman filter [C]//Proceedings of Robotics Science and Systems. Los Angeles, CA: MIT Press, 2011.

(**编辑**　魏希柱)