离散时间 H_∞ 性能下界研究方法

王宏霞[1], 张焕水[2], 俞 立[1], 陈 欣[1]

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 310023 杭州; 2. 山东大学 控制科学与工程学院,250061 济南)

摘 要: 为了缩小二分法求解最优 H_∞ 性能的搜索范围,降低搜索代价,采用状态空间分析法,提出了一种获取 H_∞ 性能下界的方法.与一般方法不同,根据此方法所得的下界仅跟 H_2 Riccati 方程的解有关,而不被卷入该 Riccati 方程的计算.因此,下界的获取简单.不仅如此,该方法还能揭示最优性能与 H_∞ 性能(包括最优控制与 H_∞ 控制,最优估计与 H_∞ 估计)间的区别和联系、分析多扰动通道对 H_∞ 性能的影响以及可预演扰动的有效利用对 H_∞ 性能的改善.

关键词: H_2 控制;H_∞ 控制;Riccati 方程; 线性二次

中图分类号: TP13 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2014)06-0123-06

Lower bound for discrete-time H_∞ performance

WANG Hongxia[1], ZHANG Huanshui[2], YU Li[1], CHEN Xin[1]

(1.School of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, 310023 Hangzhou, China;
2. School of Control Science and Engineering, Shandong University, 250061 Jinan, China)

Abstract: The paper aims to provide an approach to obtain a lower bound of H_∞ control performance in state space. It is not involved in algebraic manipulation of Riccati equation and only concerned with the solution to the standard H_2 Riccati equation. As a consequence, the approach can help one to narrow the optimal H_∞ performance search via bisection method to a smaller range and considerably reduce the search cost. In addition, the approach enables us to have an insight into not only the link and difference between the optimal performance and the H_∞ performance including the optimal control and H_∞ control performance, the optimal estimation and the H_∞ estimation, but also the impact of the multiple-channel disturbances or previewable disturbance on the H_∞ control performance.

Keywords: H_2 control; H_∞ control; riccati equation; LQ

最优 LQ 控制(即 H_2 控制)与 H_∞ 控制是控制理论的两种最基本的控制方式.它们具有不同的控制目标与性能.从频域来讲,这两种控制性能都是对传递函数范数的刻画.最优控制期望通过控制器的设计使闭环系统传递函数的 H_2-范数最小(最优); H_∞ 控制则期望通过控制器的调节使闭环系统传递函数的 H_∞ 范数(最小)被限定在给定的范围内[1].简单来讲, H_∞ 控制器的设计旨在使系统的跟踪误差或者干扰对系统的影响尽可能小.因此,H_∞ 控制理论具有广泛的应用背景,如船舶、鱼雷、轧机控制等[2-4].1989 年,Doyle 等人将最优控制与 H_∞ 控制的频域理论推广到了时域[5].这套理论的优势在于:首先,将问题的可解性及控制结果最终归结为 Riccati 方程的可解性(因为 Riccati 理论已相当成熟[6]);不仅如此,该理论还有许多其它优点,如可以研究相应的时变问题、有限时域问题等,因而大大拓展了控制理论的研究范围.时域最优 H_2、H_∞ 的控制目的等价于分别最小化被调节信号的 $\mathbf{l}_2$ 范数、最小化一个 $\mathbf{l}_2$ 诱导范数,次优 H_∞ 控制则期望找到一个控制器使得某 $\mathbf{l}_2$ 诱导范数被限制在给定的范围内.与频域法一样,在最优 H_∞ 控制性能的量化问题上,由于控制器

收稿日期: 2014-01-09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61203045); 浙江省自然科学基金资助项目(LQ14F030004).
作者简介: 王宏霞(1980—),女,博士,助理研究员;
张焕水(1963—),男,教授,博士生导师;
俞 立(1961—),男,教授,博士生导师.
通信作者: 王宏霞, whx1123@126.com.

设计与控制性能相互耦合,时域法至今没能像 H_2 控制一样显式地定量刻画出最优 H_∞ 控制性能.尽管如此,将已有的许多 H_∞ 控制方法如对策论[7-9]、不变嵌入[10]、不变空间的投影[11]等方法[12]与二分法相结合则可以简单有效地解决最优 H_∞ 控制问题.通常情况下,最优 H_∞ 性能的搜索区间为 $(0,\gamma_u]$,其中,γ_u 是一个足以保证相应次优 H_∞ 控制问题可解的正实数.

由于需要求解 H_∞ 型 Riccati 方程,单纯解决次优 H_∞ 控制问题的代价已不小,二分法又意味着次优 H_∞ 控制问题的多次求解.因此,有必要尽量缩小搜索范围.尝试提出一种刻画 H_∞ 性能下界的时域方法,定量刻画 H_∞ 性能的下界.该下界获取简单与 H_∞ Riccati 方程及惯性条件无关.它不仅能帮助我们快速锚定有效的搜索范围,还有助于揭示最优控制与 H_∞ 控制之间的区别、研究多通道扰动对 H_∞ 控制性能的影响以及可预演扰动对 H_∞ 控制性能的影响.此外,还提出了一个次优 H_∞ 控制理论的等价理论.

对于任意的矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}'$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的转置,$\rho(\boldsymbol{M})$ 为 M 的谱半径, $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\}$ 为主对角线元素是 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 的块对角阵.$\boldsymbol{I}$ 为维数相容的单位阵.$\mathbf{l}_2$ 为由所有平方可加的序列 $x=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 所组成的空间.对于任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{l}_2$, $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的 $\mathbf{l}_2$ - 范数.对于任意的向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_n$, $|\boldsymbol{x}|_2$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的 2 - 范数.对于希尔伯特空间中的任意元素 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 表示 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的内积.对于任意的列向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, $\mathrm{col}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$ 表示由 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 堆叠成的维数为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 维数之和的列向量.此外,还假设本文中所有变量、矩阵都是维数相容的.

1 问题描述

考虑确定性系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}_k+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_k, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_k. \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{x}$ 为系统状态,$\boldsymbol{u}$ 为控制输入,$\boldsymbol{w}$ 为扰动输入,$\boldsymbol{z}$ 为待调节输出,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是已知的矩阵.

为了保证所研究的问题有意义,下面是标准假设.

假设 1 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_2)$ 是可镇定的;

假设 2 系统 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]$ 在单位圆上无不变零点且左可逆;

注意假设 2 保证了 $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}$ 的可逆性.

不失一般性,为了简化问题的后续推导过程会涉及到的符号,还将假设.

假设 3 $\boldsymbol{D}'[\boldsymbol{C}\quad\boldsymbol{D}]=[\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{I}]$.

标准的全息最优 H_∞ 控制问题可叙述为:寻找全息控制器使得闭环映射 $\boldsymbol{T}_{wz}:\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{z}$ 的 $\mathbf{l}_2$ 诱导范数最小,即

$$\inf\sup_w\frac{\|\boldsymbol{z}\|_2}{\|\boldsymbol{w}\|_2},$$

为方便下文的叙述记

$$\gamma_o=\inf\sup_w\frac{\|\boldsymbol{z}\|_2}{\|\boldsymbol{w}\|_2}.$$

如前所述,最优性能与控制器的耦合导致人们很难直接求解最优 H_∞ 控制问题.而利用二分法求解最优 H_∞ 控制问题的本质在于解决次优 H_∞ 控制问题.因此,有必要给出次优 H_∞ 控制问题的描述.

全息次优 H_∞ 控制问题可叙述如下:对于给定的 $\gamma>0$,(判断是否存在,若存在)寻找全息控制器 $\boldsymbol{u}_k$ 使得在它的调节下,对于任意的非零能量有界扰动,闭环映射 $\boldsymbol{T}_{wz}$: $\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{z}$ 的 $\mathbf{l}_2$ 诱导范数均小于 γ,即

$$\sup_w\frac{\|\boldsymbol{z}\|_2}{\|\boldsymbol{w}\|_2}<\gamma.$$

由于次优 H_∞ 控制问题的可解性等价于两个条件:其一,相应的 H_∞ Riccati 方程存在半正定的可镇定解;其二,某惯性条件成立.相对精确的二分法搜索范围则意味着以相对小的代价来解决最优 H_∞ 控制.因此,本文的目的在于找到 γ_0 的下界,缩小搜索范围,降低求解最优 H_∞ 控制问题的代价.

2 最优 H_∞ 控制问题的下界

作为陈述主要结论的准备,首先定义一些符号.引入下面的 H_2 Riccati 方程

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}'_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}'_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2$.

由于假设 1、2 的成立, H_2 Riccati 方程存在半正定的可镇定的解且 $\boldsymbol{Y}>0$. 根据 Riccati 方程的解 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$, 定义下面的符号:

$$[\boldsymbol{A}_x\quad\boldsymbol{B}_x]=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}'_2\boldsymbol{X})[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}_1],$$

$$[\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{Q}]=\boldsymbol{B}'_x\boldsymbol{X}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}_1],$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{Q}-\gamma^2\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{\Psi}=[\boldsymbol{B}_x\quad\boldsymbol{B}_2],$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{Y}\},$$

$$\boldsymbol{A}_\gamma=\boldsymbol{A}_x-\boldsymbol{B}_x\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{E}.$$

其次,引入下面的引理,它本质上是不定空间的投影定理,是给出本文主要结论的关键依据.

引理 1[13]　已知 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 是希尔伯特空间，$\boldsymbol{S}: \boldsymbol{U} \mapsto \boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{J}: \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{V}$ 是有界线性算子. 若对某个 $\varepsilon > 0$，$\boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}\boldsymbol{S} > \varepsilon \boldsymbol{I}$，则对于任意的 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$，最优化问题

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \| \boldsymbol{S}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{J}}^2 = \min_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \langle (\boldsymbol{S}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}), \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \rangle ,$$

存在唯一解且最优解

$$\boldsymbol{u}^* = (\boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}\boldsymbol{v} ,$$

等价刻画为

$$\boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = 0 .$$

上式意味着对于 $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$，总有 $\langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{v}) \rangle = 0$ 成立.

由于所涉及到的变量都属于希尔伯特空间，所以 $\langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{v}) \rangle = 0$ 意味着最优轨道 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{v}$ 与形如 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}$ 的这类轨道正交.

为了分解 H_∞ 下界理论的复杂推导，给出次优 H_∞ 控制理论的一个等价结论.

定理 1　对于给定的 $\gamma > 0$ 和系统(1)－(2)，$\gamma > \gamma_o$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\Lambda} < 0$、Riccati 方程

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}'_\gamma \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{A}_\gamma - \boldsymbol{E}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{E}. \quad (3)$$

存在半正定、可镇定解，且使 $\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Psi}$ 与 $\mathrm{diag}\{-\boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}\}$ 有相同的惯性指数.

证明　必要性的证明基于引理 1 与下面的差分对策问题[9,13]

$$\max_{w} \{ \min_{u} \| \boldsymbol{z} \|_2^2 - \gamma^2 \| \boldsymbol{w} \|_2^2 \} . \quad (4)$$

上式的内层优化是一个 LQ 优化. 根据引理 1，假设 1、2 能够保证 $\min_u \| \boldsymbol{z} \|_2^2$ 存在唯一的解. 具体来讲，记 $\boldsymbol{K}$ 是系统(1)的一个可镇定状态增益，则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{u} \in \mathbf{l}_2$ 参数化了所有的容许控制. 对于系统 $[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}, \boldsymbol{D}]$，不难证明，与假设 1、2 类似，$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}_2)$ 可镇，$[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}, \boldsymbol{D}]$ 在单位圆上无不变零点且左可逆. 此时，根据引理 1，作如下定义，分别取 $\tilde{\boldsymbol{u}}, \mathbf{l}_2$ 为引理 1 中的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{U}$，算子 $\boldsymbol{S}: \tilde{\boldsymbol{u}} \mapsto \boldsymbol{z}: \mathbf{l}_2 \mapsto \mathbf{l}_2$，是零初始状态时系统 $[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}, \boldsymbol{D}]$ 的输入输出映射. 记 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 是初始状态和外部扰动分别为 $\boldsymbol{x}_0$ 和 w 时系统 $[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}, 0]$ 的输出响应，分别取 $-\tilde{\boldsymbol{z}}, \mathbf{l}_2$ 为引理 1 中的 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S} > 0$，(根据假设 3，$\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S} \geqslant \boldsymbol{I}$). 此时根据引理 1，内层优化存在唯一的最优解 $\tilde{\boldsymbol{u}}^\#$(这同时意味着存在唯一的最优解 $\boldsymbol{u}^\# = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{u}}^\#$)，且最优解可被刻画为 $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{u}}^\# + \tilde{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{z}^\# = 0$，这里，$\boldsymbol{z}^\# = \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{u}}^\# + \tilde{\boldsymbol{z}}$ 是给定初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，最优控制 $\boldsymbol{u}^\#$ 及扰动 $\boldsymbol{w}$ 时，系统(1)－(2)的输出响应. 为方便将来叙述，记 $\boldsymbol{x}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{u}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w})$ 均为 $\mathbf{R}_n \times \mathbf{l}_2$ 到 $\mathbf{l}_2$ 的有界线性算子，这些算子由最优控制问题 $\min_u \| \boldsymbol{z} \|_2^2$ 的解所决定.

$\boldsymbol{S}'\boldsymbol{z}^\# = 0$ 可等价描述为非因果系统的输出响应

$$\boldsymbol{p}_k = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})'\boldsymbol{p}_{k+1} + (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K})'\boldsymbol{z}_{k+1}^\#, \quad (5)$$

$$0 = \boldsymbol{B}'_2\boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{D}'\boldsymbol{z}_k^\#. \quad (6)$$

$\boldsymbol{u}^\#$ 的最优性意味着由式(1)、(2)、(5)、(6)决定的 $\mathbf{l}_2$ 轨道 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}$ 的最优性. $\boldsymbol{u}^\#$ 的唯一性则意味着初值 $\boldsymbol{x}_0$ 和扰动 $\boldsymbol{w}$ 给定时式(1)、(2)、(5)、(6)所决定的 $\mathbf{l}_2$ 轨道 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}$ 的唯一性.

现在考虑基于内层优化的外层优化. 实际上，$\gamma > \gamma_o$ 意味着：对于任意的 $\delta > 0$，总存在容许的全息控制器，使得在它的调节下，对于零初始状态和任意的扰动 $\boldsymbol{w} \in \mathbf{l}_2$，闭环系统的输出响应总能满足下面的关系

$$\gamma^2 \| \boldsymbol{w} \|_2^2 - \| \boldsymbol{z} \|_2^2 > \delta \| \boldsymbol{w} \|_2^2. \quad (7)$$

取闭环输出 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w})$，则

$$\gamma^2 \| \boldsymbol{w} \|_2^2 - \| \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}) \|_2^2 > \delta \| \boldsymbol{w} \|_2^2. \quad (8)$$

分别取 $\boldsymbol{w}, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_2$ 为引理 1 中的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$，显然 $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w})) \in \boldsymbol{V}$，再取 $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}))$ 为引理 1 中的 $-\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{S}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}))$，$\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\{\gamma^2\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{I}\}$. 根据这些定义，式(8)可表示成

$$\langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}))) \rangle = \gamma^2 \| \boldsymbol{w} \|_2^2 - \| \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}) \|_2^2.$$

再根据引理 1，内层优化完成后的外层优化存在唯一最优解 $\boldsymbol{w}^*$，最优 $\boldsymbol{w}^*$ 满足 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{z}^*) = \boldsymbol{0}$，即

$$0 = \langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{z}^*) \rangle, \quad (9)$$

$$\langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{z}^*) \rangle = \gamma^2 \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^* \rangle - \langle \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}^*) \rangle. \quad (10)$$

由于 $\boldsymbol{S}'$ 很难直接计算，令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 是一个可镇定的反馈控制，$\tilde{\boldsymbol{z}}$ 是在该反馈下、系统(1)－(2)对于零初始状态和给定扰动 $\boldsymbol{w}$ 的输出响应. 记 $\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}) - \tilde{\boldsymbol{z}}$，则式(10)等价于

$$0 = \gamma^2 \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^* \rangle - \langle \Delta \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}^*) \rangle - \langle \tilde{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}^*) \rangle = \gamma^2 \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^* \rangle - \langle \tilde{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}^*) \rangle . \quad (11)$$

式(11)中的第 2 个等式成立是因为 $\boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w})$ 是初始状态为 $\boldsymbol{x}_0$、外部扰动为 $\boldsymbol{w}$ 时，内层优化的最优轨道，它正交于系统 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}]$ 在零初始状态和任意容许控制驱动下的输出响应. 令 $\gamma^2 \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^* \rangle - \langle \tilde{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}^*) \rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{z}^\#(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}^*) \rangle$，即 $\tilde{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{z}})$. 根据式(11)，可以给出最优 $\boldsymbol{w}^*$ 的另一种等价刻画 $\tilde{\boldsymbol{S}}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{z}^*) = \boldsymbol{0}$. 它进一步意味着反因果系统(5)与下式的成立.

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{B}'_1\boldsymbol{p}_k - \gamma^2 \boldsymbol{w}_k. \quad (12)$$

总之，式(1)、(2)、(5)、(6)、(12)是最优轨道 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ 的唯一刻画. 记 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}^\#(\boldsymbol{x}_0,$

$\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x}_0))$, $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}^{\#}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x}_0))$, $z^*(\boldsymbol{x}_0)=z^{\#}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x}_0))$.

根据式(1)、(2)、(5)、(6)、(12),

$$\langle \boldsymbol{x}_k^*,\boldsymbol{p}_{k-1}^*\rangle-\langle \boldsymbol{x}_{k+1}^*,\boldsymbol{p}_k^*\rangle=|z_k^*|_2^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}_k^*|_2^2. \tag{13}$$

对式(13)的两边关于 k 从 0 到 ∞ 求和,则

$$\|z^*\|_2^2-\gamma^2\|\boldsymbol{w}^*\|_2^2=\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_{-1}^*\rangle. \tag{14}$$

为了分离最优 $\boldsymbol{w}$ 与最优 $\boldsymbol{u}$ 对最优对策值的贡献,引入下面的线性变化,

$$\boldsymbol{\zeta}_k=\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_{k+1}. \tag{15}$$

分离变换式(15)中的 $\boldsymbol{w}$ 尚未优化.把式(15)带入式(1)、(5)、(6),可得

$$\boldsymbol{\zeta}_{k-1}=\boldsymbol{A}'_x\boldsymbol{\zeta}_k+\boldsymbol{E}'\boldsymbol{w}_k, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}'_2\boldsymbol{\xi}_k+\boldsymbol{B}_x\boldsymbol{w}_k. \tag{17}$$

观察式(16)发现,$\boldsymbol{\zeta}_k$ 完全由 $\boldsymbol{w}_s$, $s\geqslant k+1$ 所决定,特别地 $\boldsymbol{\zeta}_{-1}$ 包含且仅包含所有的 $\boldsymbol{w}_k$, $k\geqslant 0$. 注意,式(15) ~ (17) 对任意的 $\boldsymbol{w}$ 均成立.

现在取 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^*$ 且将式(15) 带入式(14),则有

$$\|z^*\|_2^2-\gamma^2\|\boldsymbol{w}^*\|_2^2=\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_0\rangle+\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\zeta}_{-1}^*\rangle. \tag{18}$$

在式(18)中,最优对策值分成了两部分,$\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_0\rangle$ 等于标准 LQ 的最优性能值,可粗略看成是 $\boldsymbol{u}^*$ 对对策值的贡献,$\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\zeta}_{-1}^*\rangle$ 则完全捕捉了 $\boldsymbol{w}^*$ 对最优对策值的贡献.

发现,当 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 时,最优扰动 $\boldsymbol{w}^*$ 对最优对策值的贡献为0,而 $\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{0}$, $k\geqslant 0$ 对最优对策值的贡献也为0.结合最优解 $\boldsymbol{w}^*$ 的唯一性,可知 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 时,最优 $\boldsymbol{w}_k^*=\boldsymbol{0}$, $k\geqslant 0$, 进一步有,$\boldsymbol{\zeta}_{-1}^*=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u}_k^*=\boldsymbol{0}$, $k\geqslant 0$.

由于 $\boldsymbol{\zeta}_{-1}^*$ 与任意给定的 $\boldsymbol{x}_0$ 总是形成一个线性流形,而 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{\zeta}_{-1}^*=\boldsymbol{0}$ 则说明了它们之间是严格的线性关系.

如果将对策问题限制在区间 $[k,\infty)$ 上,前面所有关于必要性的分析都成立,当然,$\boldsymbol{\zeta}_{k-1}^*$ 与 $\boldsymbol{x}_k^*$ 之间的线性关系依然成立.

相似地,可以结合式(1)、(6)、(12) 推导 $\mathbf{l}_2$ 最优轨道 $\boldsymbol{x}_k^*$、最优控制 $\boldsymbol{u}_k^*$ 及最优扰动 $\boldsymbol{w}_k^*$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 之间的线性关系.根据式(12)、(15)、(17) (为简化符号,以下推导去掉了最优轨道的标志符号 *),

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_x\boldsymbol{\zeta}_k.$$

由于最优轨道的唯一性,$\boldsymbol{\Lambda}$ 必然可逆.

因此,

$$\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_x\boldsymbol{\zeta}_k). \tag{19}$$

将式(19)带入式(16)、(17),得到

$$\boldsymbol{\zeta}_{k-1}=\boldsymbol{E}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{A}_\gamma\boldsymbol{\zeta}_k, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_\gamma\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{\zeta}_k, \tag{21}$$

令

$$\boldsymbol{\zeta}_{s-1}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_s. \tag{22}$$

其中:$s=0,1,\cdots$,并将之带入式(20)、(31),则可推得式(3).$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}'$ 的可逆性仍然缘于最优轨道的唯一性.根据最优对策值的表达式(18)、(22),可得最优对策值必然大于等于 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时的对策值

$$\|z^*\|_2^2-\gamma^2\|\boldsymbol{w}^*\|_2^2=\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_0\rangle+\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_0\rangle,$$

换句话说,

$$\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_0\rangle+\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_0\rangle\geqslant\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_0\rangle\geqslant 0,$$

因此,

$$\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_0\rangle\geqslant 0.$$

从 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性,$\boldsymbol{Z}\geqslant\boldsymbol{0}$ 显然成立.式(3)的可镇定性源于最优轨道属于 $\mathbf{l}_2$ 空间.

证明 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的负定性.考虑初始状态为零时的对策问题式(4),根据式(8),$\gamma>\gamma_o$ 意味着其唯一最优解是 $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{w}^*=\boldsymbol{0}$.因此,零初始状态时,$\boldsymbol{w}$ 取0外的任意值,只能导致一个严格小于0的对策值.取 $\boldsymbol{w}_0\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{0}$,$k\geqslant 1$,$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{\#}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w})$,参考式(13)、(15)、(21) 可得

$$\|z\|_2^2-\|\boldsymbol{w}\|_2^2=\langle \boldsymbol{w}_0,\boldsymbol{B}'_x\boldsymbol{\zeta}_0+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}_0\rangle<\boldsymbol{0}. \tag{23}$$

由于 $\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{0}$,$k\geqslant 1$,$\boldsymbol{\zeta}_0=\sum_{i=1}^{\infty}(\boldsymbol{A}_x^{i-1})'\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{0}$, 从式(23) 立即可导出 $\boldsymbol{\Lambda}<\boldsymbol{0}$.

证明惯性条件.众所周知,由式(1)、(5)、(6)、(12)定义的齐次 HJB 方程有唯一 $\mathbf{l}_2$ 解意味着状态与伴随状态之间存在线性关系,则

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}. \tag{24}$$

该线性关系完全被 Riccati 方程的半正定、稳定、及满足 $\boldsymbol{\Pi}$ 与 $\mathrm{diag}\{-\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$ 有相同的惯性指数的解所刻画,其中 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2]$, $\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}+\mathrm{diag}\{-\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$.根据式(14),最优对策值可通过 $\boldsymbol{P}$ 表示为 $\langle \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0\rangle$,这意味着 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z}$.复杂但直接的代数运算表明,

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}'_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Psi})\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}'_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}. \tag{25}$$

由此,惯性条件显然成立.

充分性的证明是一个构造式的证明记.

$$\boldsymbol{u}_k=-\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}'_2(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}_k). \tag{26}$$

该证明实际上是在式(3)具有给定性质解的前提下,说明式(26)是一个次优 H_∞ 全息可镇定反馈控制.

假设 $\boldsymbol{Z}$ 是式(3) 的解,满足定理 1 中给定的条件.定义 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z}$,但此时并不知道 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z}$

满足什么样的关系式，具有怎样的性质. 因此，接下来需要证明 $\boldsymbol{P}$ 是某个 Riccati 方程满足某些性质、条件的解. 由于 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}$ 均是半正定矩阵，所以 $\boldsymbol{P}$ 也是半正定矩阵. 给定初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，定义 $\boldsymbol{\zeta}_{-1}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_0$. 根据式(3) 与 HJB 式(20)、(21)，可推得 $\boldsymbol{x}_{k+1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}')^{-1}\boldsymbol{A}_\gamma\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\zeta}_{k-1}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_k,k>0$. 接着据此定义 $\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{\zeta}_k,k>0$，再根据 $\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_{k+1}+\boldsymbol{\zeta}_k$ 定义 $\boldsymbol{p}_k,k\geqslant 0$，考虑 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的可逆性，可根据

$$\boldsymbol{u}_k=-\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}'_2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}_k+\boldsymbol{\zeta}_k)\ . \quad (27)$$

及式(21)定义 $\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_k,k\geqslant 0$，最终根据式(2) 定义 $z_k,k\geqslant 0$.

上面的构造如此定义的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$ 是式(1)、(5)、(6)、(12) 的 $\mathbf{l}_2$ 解. 同时，对于这样构造的 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$，还将有下面的等式成立

$$\|z\|_2^2-\gamma^2\|\boldsymbol{w}\|_2^2=\langle\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0\rangle.$$

此时并未作最优性或者唯一性的任何说明. 将基于上面的构造及结论建立 $\boldsymbol{P}$ 所满足的关系.

根据 $\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_k$ 的定义式(27)、(19) 及 $\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_{k+1}+\boldsymbol{\zeta}_k$，作直接的运算可得

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\Pi}\mathrm{col}\{\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_k\}.$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}$ 如式(25)所示.

因此，

$$\mathrm{col}\{\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_k\}=\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k.$$

说明当控制输入与外部扰动分别取上面所构造的控制输入与外部扰动时，系统(1)实际上等价于 $\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_F\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{A}_F=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}')^{-1}\boldsymbol{A}_\gamma$. 有了上面的准备，下面可推导 $\boldsymbol{P}$ 实际上满足式(24). 记 $\boldsymbol{J}_2=\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|_2^2-\gamma^2\sum_{k=1}^{\infty}|\boldsymbol{w}_k|_2^2$，则对于任意的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0\rangle=&\ \|z\|_2^2-\gamma^2\|\boldsymbol{w}\|_2^2=|z_0|_2^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}_0|_2^2+\\&\boldsymbol{J}_2=|z_0|_2^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}_0|_2^2+\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_1\rangle=\\&|(\boldsymbol{C}-[\boldsymbol{D},\boldsymbol{0}])\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0|_2^2-\\&|\mathrm{diag}\{\gamma^2\boldsymbol{I},\boldsymbol{0}\}\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0|_2^2+\\&\langle\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A}'_F\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_F\boldsymbol{x}_0\rangle.\end{aligned}\quad(28)$$

由于 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性，左端的核矩阵 $\boldsymbol{P}$ 必然等于最后一个等号右端的核. 直接的代数推导表明，式(28) 右端的核矩阵即式(24) 的右端.

需要强调的是，$\boldsymbol{A}_F$ 的稳定性源自构造的解 $\boldsymbol{x}$ 属于 $\mathbf{l}_2$. 根据式(25)，$\boldsymbol{\Pi}$ 的惯性条件是显然的. 至此，整个定理的证明完成.

不同于已有的 H_∞ 控制理论的推导，引入了一个可逆线性变换来分解 $\boldsymbol{u}^*$ 与 $\boldsymbol{w}^*$ 对对策值的贡献，进而推导出等价的 H_∞ 控制理论.

将以定理的方式给出本文的主要结果.

定理 2　对于系统(1)-(2)，考虑最优 H_∞ 控制问题，则有

$$\gamma_o\geqslant\sqrt{\rho(\boldsymbol{Q})}.\quad(29)$$

证明　根据定理 1，对于任意的 $\gamma>\gamma_o$，总成立 $\boldsymbol{\Lambda}<\boldsymbol{0}$，即

$$\gamma^2\boldsymbol{I}>\boldsymbol{Q}\ .$$

两边关于 γ 取下确界，则

$$\gamma_o^2\boldsymbol{I}\geqslant\boldsymbol{Q}\ .$$

则结论式(29)是显然的.

尽管定理 2 仅提供了最优性能的下界而非下确界，但由于仅依赖于 H_2 Riccati 方程的半正定稳定解，所提供的下确界求解简单方便. 因此，二分法的搜索区域缩至 $[\sqrt{\rho(\boldsymbol{Q})},\gamma]$.

当扰动通道增加时，最优 H_∞ 性能不减. 即当另一扰动通道通过系统参数 $\boldsymbol{B}_3$ 进入系统时，$\rho(\boldsymbol{Q})=\rho([\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_3]'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}'_2\boldsymbol{X})[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_3])\geqslant\rho(\boldsymbol{B}'_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_x)$，不等号右端实际上即单扰动通道相应的 H_∞ 性能下界.

当部分扰动可以提前获取时，因为需保证 $\gamma^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}'$ 正定，所以 $\sqrt{\rho(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}')}$ 必然为最优 H_∞ 性能的下界，其中 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}'_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_x$，$\boldsymbol{G}>\boldsymbol{0}$. 因此，与标准 H_∞ 性能下界 $\rho(\boldsymbol{B}'_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_x)$ 相比，部分扰动可提前获取时，最优 H_∞ 性能可能被改进.

3　数值例子

考虑系统(1)-(2)，其中，系统参数为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-0.2\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. 使用两种方法计算系统的最优 H_∞ 性能. 第一种方法，直接用二分法计算 H_∞ 性能，由于没有相应的参考，只能尽可能保守地选取二分法的搜索区域[0,10]，结果搜索了 24 次才找到最优 H_∞ 性能 1.869 6；第二种方法，计算 H_2Riccati 方程的解 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}6.809\,4&8.000\,9\\8.000\,9&14.062\,9\end{bmatrix}$，可得 $\boldsymbol{Q}=3.481\,3$，再计算 H_∞ 性能的下界 $\sqrt{\rho(\boldsymbol{Q})}=1.865\,8$，此时可锚定最优 H_∞ 性能的搜索区间[1.865 8,5]，此时，由于缩小了搜索区间，搜索了 13 次就找到了最优 H_∞ 性能 1.869 6. 由于每一次搜索都要计算一个 H_∞ Riccati 方程，搜索次数每减少一次都意味着少计算一个 H_∞ Riccati 方程. 因而，对于高维的系统，使用方法降低的搜索代价尤为明显.

4　结　语

本文基于状态空间提出了一种研究离散 H_∞

控制性能下界的方法.因为辛矩阵与 Hanmilton 矩阵可以相互转化,所以该方法也适用于连续 H_∞ 控制性能下界的研究[6].此外,该方法不仅提供了 H_∞ 控制的等价理论,也能够被用于研究复杂的 H_∞ 预演控制问题.

参考文献

[1] ZHOU Kemin, DOYLE J C. Essentials of robust control [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1998.

[2] 王益群,曹栋理,陈星,等.热连轧卷取机踏步系统鲁棒 H_∞ 控制研究[J].机械工程学报, 2002,38(10): 62-64.

[3] 段富海,彦卫国,何长安.一种非线性优化控制方法及其在鱼雷控制中的应用[J]. 控制理论与应用,2000, 7(1):65-68.

[4] 张显库.船舶运动简捷鲁棒控制[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[5] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P, *et al.* State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(8): 831-847.

[6] BITTANTI S, LAUB A, WILLEMS J C. The riccati equation[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[7] TADMOR G. Worst-case design in the time domain: the maximum principle and the standard H_∞ problem[J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 1990, 3 (4): 301-324.

[8] YAESH I, SHAKED U. Minimum H_∞-norm regulation of linear discrete-time systems and its relation to linear quadratic discrete games [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(9): 1061-1064.

[9] BASAR T, BERNHARD P. H_∞-optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach[M]. Boston: Birkhauser, 1995.

[10] BENSOUSSAN A, DA PRATO G, DELFOUR M, *et al.* Representation and control of infinite dimensional systems[M]. Boston: Birkhauser, 2007.

[11] HASSIBI B, SAYED A, KAILATH T. Indefinite-quadratic estimation and control: a unified approach to H_2 and H_∞ theories [M]. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1999.

[12] ZHOU Kemin, DOYLE J, GLOVER C. Robust and optimal control[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

[13] TADMOR G, MIRKIN L. H_∞ control and estimation with preview-part I: matrix ARE solutions in continuous time [J]. IEEE Trnsactions on Automatic Control, 2005, 50(1): 19-28.

(编辑 苗秀芝)