第46卷 第7期
2014年7月
哈 尔 滨 工 业 大 学 学 报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 46 No. 7
Jul. 2014

三维各向异性功能梯度材料的有限体积法

宣领宽[1,2], 明平剑[1], 龚京风[1], 张文平[1], 韩春旭[1]

(1.哈尔滨工程大学 动力与能源工程学院, 150001 哈尔滨; 2.中国舰船研究设计中心, 430064 武汉)

摘 要: 为了研究三维各向异性功能梯度材料的线弹性问题,发展一种弹性结构的有限体积方法,该方法采用四面体网格,对不规则形状问题的适用性强.空间上采用交错非结构有限体积法进行离散,位移、速度、加速度定义在节点上,应力、材料属性定义在单元中心上且在单元内均匀分布,时间上采用欧拉格式进行离散.数值结果表明, 本方法计算结果与其他数值方法结果吻合良好,计算速度快且内存消耗少,可以有效模拟三维各向异性功能梯度材料的弹性问题.

关键词: 各向异性; 功能梯度; 有限体积法; 弹性分析

中图分类号: O343.7 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2014)07-0095-07

Finite volume method for three-dimensional anisotropic functionally graded materials

XUAN Lingkuan[1,2], MING Pingjian[1], GONG Jingfeng[1], ZHANG Wenping[1], HAN Chunxu[1]

(1.College of Power and Energy Engineering, Harbin Engineering University, 150001 Harbin, China;
2.China Ship Development and Design Center, 430064 Wuhan, China)

Abstract: A finite volume method (FVM) is developed for elastic analysis of three-dimensional (3D) anisotropic linear elastic solids with continuously variable material properties. The method employs tetrahedral elements so that it owns adaptability to problems with irregular domain. A staggered unstructured FVM is used for spatial terms. The displacement, velocity and acceleration are defined on the cell vertex while the stress and material properties which are uniform in the cell are defined on the cell center. An Euler scheme is employed for time dependent terms. The numerical results of the FVM agree well with the results of other numerical methods, and the FVM consumes much less computational time and memory, which is able to predict the 3D anisotropic linear elastic problems accurately and efficiently.

Keywords: anisotropic; functionally graded; finite volume method; elastic analysis

功能梯度材料(FGM)一般是由两种或两种以上材料复合而成,各组分材料的体积分数在空间位置上是连续变化的,其宏观材料特性表现出梯度(逐渐变化)的性质[1].FGM 拥有高强度、耐热性、耐磨性等优势,文献[2-3]对 FGM 的发展进行了详细介绍.由于实际工程的需要,FGM 可能是各向同性的也有可能是各向异性的.2000 年以后,国内外学者围绕各向异性 FGM 的力学问题开展了相关研究.常用计算方法有解析法与数值法.李翔宇[4]给出了轴对称的横观各向同性 FGM 圆板和环板的静力学问题解析解,黄德进等[5-6]推导出各向异性 FGM 平面梁的弹性静力学解析解;虽然解析法能够给出精确解,并且能够灵活分析规律性的内在联系,但难以处理工程上的复杂结构问题,因此在工程实际中经常采用数值法.

目前,有限元法(FEM)是计算力学领域发展最成熟、应用最广泛的数值方法,近年来发展较为缓慢,与此同时,学者们仍然不停地发展新的数值方法.边界元法(BEM)曾在各向同性线弹性问题中获得了成功,因此有学者试图将 BEM 应用于各向异性、非均匀材料的线弹性问题.BEM 需要求

收稿日期: 2013-07-01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(E060503);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(HEUCF130302).
作者简介: 宣领宽(1987—), 男, 博士研究生;
张文平(1956—), 男, 教授, 博士生导师.
通信作者: 明平剑, pingjianming@hrbeu.edu.cn.

解格林函数,而材料的各向异性会使弹性矩阵中的系数增加,导致构造格林函数变得更加复杂,而且材料的非均性更会加剧这一问题.Albuquerque 等[7]将 BEM 应用于二维各向异性材料的动力学问题,Criado 等[8-9]导出指数形式的 FGM 线弹性体的格林函数,并基于 BEM 求解指数形式 FGM 的各向同性线弹性问题.然而到目前为止,尚未看到有学者将 BEM 应用于各向异性 FGM 的线弹性问题.此外,无网格法由于良好的适应性及避免划分网格等优势得到了广泛关注,Sladek 等[10-11]将无网格伽辽金法(MLPG)应用于求解二维、三维各向异性 FGM 的线弹性问题,然而,MLPG 法对于复杂工程问题也存在计算量大、效率低等缺点.

另一方面,在流体动力学(CFD)领域内十分流行的有限体积法(FVM),也逐渐被应用于结构问题的求解,这么做的最终目标是采用统一方法求解多物理场(如流固耦合)问题,避免混合方法带来的一系列问题(如收敛困难)[12-13].一般认为 FEM 对传统的结构自伴问题具有更高的精度,然而对于偏微分方程二者精度区别并不大[13],而且在许多应用中二者是等价的[14].事实上结构与流体控制方程相同,不同的只是本构方程[15].FVM 已被成功应用于结构问题,Wheel[16-17]在分析应力集中问题时,基于相同网格类型 FVM 获得结果的精度比 FEM 高,并且基于 FVM 解决了 FEM 难以解决的弹性力学中的“闭锁”现象;Fallah[18]、Demirdžić等[19]也将 FVM 应用于求解结构问题,但到目前,尚未看到将 FVM 应用于各向异性 FGM 线弹性问题的报道.本文采用非结构有限体积法研究正交各向异性立方体结构的静态特性,将计算结果与其他数值方法结果对比,验证本文方法的正确性;模拟横观各向同性 FGM 转盘结构从启动到稳定过程中的动态特性,研究密度、弹性模量沿径向变化对其力学性能的影响.

1 数学模型

1.1 控制方程

各向异性线弹性体的平衡方程[20]可表示为

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + F. \tag{1}$$

式中:ρ 为介质密度;$\ddot{\boldsymbol{u}} = (\ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_z)$ 为加速度矢量;$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量; F 为体积力.

各向异性线弹性体的本构方程[21]的张量形式可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}. \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{C}_{ijkl}$ 为弹性张量,共 81 个分量;$\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}$ 为应变张量.式(2) 的矩阵形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

式中: $\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵;$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变向量.

正交各向异性材料的弹性矩阵为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

弹性轴与 z 轴一致的横观各向同性材料弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可表示为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}.$$

边界条件可表示为

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}, \text{在 } \Gamma_d \text{ 上};$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{t}}, \text{在 } \Gamma_t \text{ 上}.$$

式中:Γ_d 为给定位移 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 的边界; Γ_t 为给定牵引力 $\tilde{t}$ 的边界. $\boldsymbol{T}$ 可表示为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}.$$

式中 $\boldsymbol{n} = (n_x,\ n_y,\ n_z)$ 为边界的单位外法线矢量.

1.2 数值离散

三维计算域采用四面体网格划分,如图 1 所示为任意的四面体网格单元 C_{1234},O 为 C_{1234} 的重心,E_{12}、E_{13}、E_{14} 分别为边 12、13、14 的中点,O_2、O_3、O_4 分别为 134、124、123 的中点,空间多边形 $E_{12}O_4OO_3$、$E_{13}O_2OO_4$、$E_{14}O_3OO_2$ 为围绕节点 1 的控制体积在 C_{1234} 中的边界,在围绕节点 1 的控制体上对式(1) 进行体积分可得

$$\int_\Omega \rho\ddot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega F\mathrm{d}\Omega. \tag{4}$$

加速度 $\ddot{\boldsymbol{u}}$、速度 $\dot{\boldsymbol{u}}$、位移 $\boldsymbol{u}$ 均定义在节点 1、2、3、4 上,并且认为其在控制体积内是均匀的,因此,式(4) 的左端可表示为

$$\int_\Omega \rho\ddot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}\Omega = \rho\ddot{\boldsymbol{u}}V.$$

式中:V 为控制体的体积,$V = \sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{V_i}{4}\right)$; V_i 为节点 1 周围的第 i 个四面体单元的体积; N 为节点 1 周

围四面体单元数目.

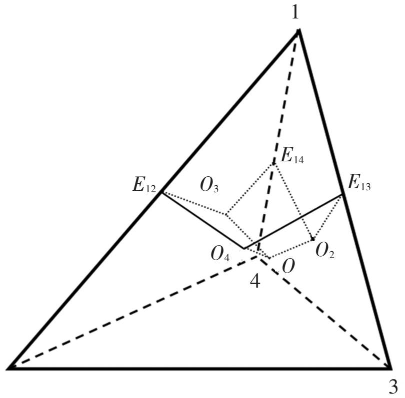


图 1　三维非结构网格

应力与材料属性均定义在单元中心上，并且认为其在单元 C_{1234} 内部是均匀的，对式(4) 的右端第 1 项应用高斯定理可得

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}V = \oint_s \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{A}_i.$$

式中：四面体单元 1234 对节点 1 的贡献可以表示为 $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{A}_1$，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为空间多边形 $E_{12}O_4E_{13}O_2E_{14}O_3E_{12}$(由 3 个四边形组成) 的面积矢量.因此有

$$\boldsymbol{A}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j} + c_1\boldsymbol{k}.$$

对四面体单元 C_{1234} 的其他节点 2, 3, 4,同理可得

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{i} + \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{j} + \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{k},\ i = 2,3,4.$$

每个单元内的应力可由应变通过式(3)求得，在任意单元 C_{1234} 中,应变为[22]

$$\partial\varphi/\partial x = \left(\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{a}_i\varphi_i\right)/V_c, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{b}_i\varphi_i\right)}{V_c}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{c}_i\varphi_i\right)}{V_c}. \tag{7}$$

式中：φ 为 u_x、u_y、u_z；$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$；$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}$；$\boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$；$(x_2, y_2, z_2)$、$(x_3, y_3, z_3)$、$(x_4, y_4, z_4)$ 分别为节点2、3、4的空间坐标；V_c 为四面体 C_{1234} 的体积.式(5) ~ (7) 不仅可以用来计算 $\boldsymbol{A}_i$，而且其相当于得到应变向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$，可以利用式(3) 计算单元内的应力，因此可以将 $\boldsymbol{a}_i$、$\boldsymbol{b}_i$、$\boldsymbol{c}_i$ 一次计算并储存起来，这样不仅使用起来方便，而且能够减少计算量、提高计算速度.

若考虑动力学问题，则加速度 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ 可得

$$\rho_S \ddot{\boldsymbol{u}} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4}V_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{A}_i + F \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4}V_i. \tag{8}$$

由式(8)求得加速度后，速度 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 与位移 $\boldsymbol{u}$ 可得

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{t+\Delta t/2} = \dot{\boldsymbol{u}}^{t-\Delta t/2} + \ddot{\boldsymbol{u}}^{t} \cdot \Delta t,$$

$$\boldsymbol{u}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{u}^{t} + \dot{\boldsymbol{u}}^{t+\Delta t/2} \cdot \Delta t.$$

式中初始位移、加速度以及 $\dot{\boldsymbol{u}}^{-\Delta t/2}$ 均为 0.

若考虑力边界 Γ_t，则式(8) 可写为

$$\rho_S \ddot{\boldsymbol{u}} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4}V_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{A}_i + F \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4}V_i + \oint_{\Gamma_t} \tilde{\boldsymbol{t}} \mathrm{d}\Gamma.$$

对于位移边界 Γ_d 可将边界节点的位移直接等于给定位移 $\tilde{\boldsymbol{u}}$，对于固支边界则有 $\tilde{\boldsymbol{u}} = 0$.

若考虑静力学问题，则式(8)的左端为 0.将式(8)整理为以位移为求解变量的线性方程组，可以直接求解或迭代求解，这里采用 INTEL IMSL 的 LSARG 求解器直接求解.

由于本文计算得到的应力均位于单元上，若想知道某一节点(如图 1 的节点 1)上的应力，可由下式获得

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\sigma}_i V_i}{4}\right)/V.$$

2　数值应用

2.1　立方体结构

静态分析如图 2 所示，正交各向异性 FGM、边长为 10 m 的立方体结构，来验证本文方法的正确性.边界条件为：$x = 0$ m、$y = 0$ m 与 $z = 0$ m 平面均为法向简支，$z = 10$ m 平面受到法向均布拉力 $\sigma = 1\ \mathrm{N/m^2}$，其他各面自由.立方体为正交各向异性 FGM 材料，材料对应的弹性矩阵中元素为：$c_{11} = 236.4 \times 10^2$ MPa，$c_{12} = 63.64$ MPa，$c_{13} = 18.18$ MPa；$c_{22} = 119.7$ MPa，$c_{23} = 15.15$ MPa；$c_{33} = 42.42\times(1 + z/10)$ MPa；$c_{44} = 80$ MPa；$c_{55} = c_{66} = 16$ MPa.计算域采用四面体网格划分，表 1 给出本文采用的 4 种网格的相关信息.图 3 为 AB 边上的位移 u_x 与 u_y，FVM、FEM 结果由本文方法、ANSYS 12.0 采用相同网格 Grid 4 得到，可以看出本文 FVM 结果与 FEM 及文献[11]中的 MLPG 结果吻合良好.以 Grid 4 的计算结果作为参考，将基于 4 种网格所得的边 AB 上的节点位移 u_y 列于表 2，可以看出随着网格数的增加，Grid3、Grid4 的计算结果基本吻合；采用相同网格时，从表 2 可以看出 FVM 与 FEM 的计算结果几乎完全一致.

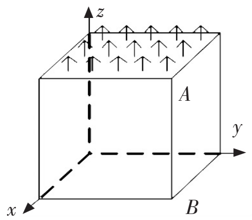


图 2 边长为 10 m 的立方体

表 1 计算网格信息

网格信息	网格数	节点数
Grid 1	86	39
Grid 2	802	239
Grid 3	7 548	1 629
Grid 4	11 696	2 644

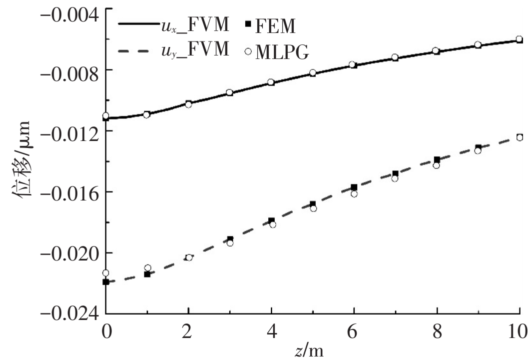


图 3 边 *AB* 上的位移

表 2 不同网格时位移 u_y 计算结果对比 (10^{-8} m)

z/ m	Grid 4		Grid 3		Grid 2		Grid 1	
	FVM	FEM	FVM	FEM	FVM	FEM	FVM	FEM
0	−2. 188 4	−2. 188 4	−2. 187 4	−2. 187 4	−2. 141 8	−2. 141 9	−2. 078 7	−2. 078 7
1	−2. 139 0	−2. 139 1	−2. 135 9	−2. 135 9				
2	−2. 031 8	−2. 031 8	−2. 032 1	−2. 032 1	−2. 022 2	−2. 022 2		
3	−1. 913 2	−1. 913 2	−1. 912 1	−1. 912 1				
4	−1. 791 7	−1. 791 7	−1. 790 9	−1. 790 9	−1. 777 5	−1. 777 5		
5	−1. 677 7	−1. 677 7	−1. 677 0	−1. 677 0			−1. 682 4	−1. 682 4
6	−1. 571 7	−1. 571 6	−1. 572 5	−1. 572 5	−1. 593 6	−1. 593 6		
7	−1. 475 2	−1. 475 2	−1. 476 4	−1. 476 4				
8	−1. 391 0	−1. 391 0	−1. 390 4	−1. 390 4	−1. 400 7	−1. 400 8		
9	−1. 313 6	−1. 313 7	−1. 314 0	−1. 314 0				
10	−1. 241 4	−1. 241 5	−1. 244 0	−1. 244 0	−1. 258 5	−1. 258 4	−1. 292 5	−1. 292 5

2.2 转盘结构

研究如图 4 所示围绕 z 轴以角速度 ω 旋转的转盘,几何尺寸为:内径 r_{in} = 0.1 m,外径 r_{out} = 0.24 m,厚度 h = 0.06 m,模拟转盘从启动到稳定过程中的动态特性,角速度按照式(9)规律变化.转盘内侧固支,其他自由,采用 16 461 个四面体网格划分,节点数为 3 872,最短边长 ΔL_{min} = 8.711 mm,时间步长可依据 CFL 条件[21] $\Delta t \leqslant \Delta L_{min}/(c_p)_{max}$ 选取.

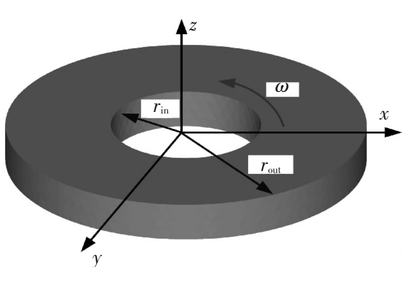


图 4 转盘结构

$$\omega(t)=\begin{cases}10\,000t,\ t\leqslant 0.01;\\100,\ t>0.01.\end{cases}\tag{9}$$

考虑以下 3 种均匀横观各向同性材料的转盘,其材料属性分别为

M1: $E_x = E_y$ = 200 GPa, E_z = 210 GPa, $(c_p)_{max}$ = 5 896 m/s, $\Delta t \leqslant 1.477$ μs;

M2: $E_x = E_y$ = 200 GPa, E_z = 100 GPa, $(c_p)_{max}$ = 6 810 m/s, $\Delta t \leqslant 1.279$ μs;

M3: $E_x = E_y$ = 100 GPa, E_z = 200 GPa, $(c_p)_{max}$ = 5 356 m/s, $\Delta t \leqslant 1.626$ μs.

以下计算中如无特殊说明,时间步长均采用 Δt = 1.5 μs. 3 种材料的其他属性均相同,泊松比 $v_{xy} = v_{yz} = v_{zx} = 0.3$,密度 ρ = 8 000 kg/m³,对应的剪切模量可计算出:

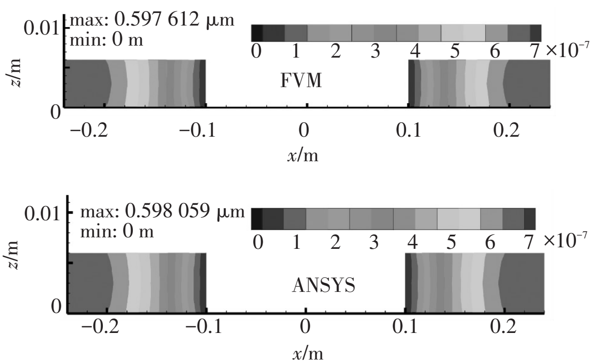
$$G_{xy}=\frac{E_x}{2(1+v_{xy})},\quad G_{yz}=G_{zx}=\frac{E_z}{2(1+v_{yz})}.$$

由旋转产生的单位质量体力可表示为

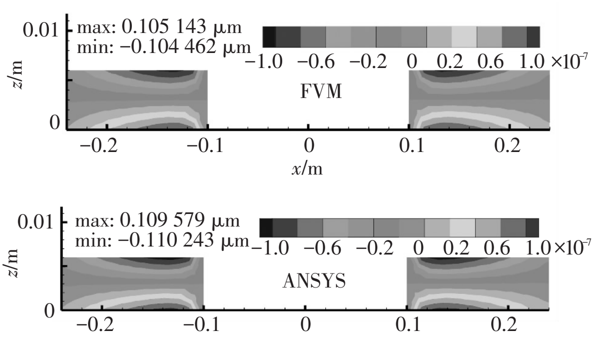
$$F_x=\rho x\omega^2,F_y=\rho y\omega^2.$$

验证本文方法计算动态问题时的正确性.图 5

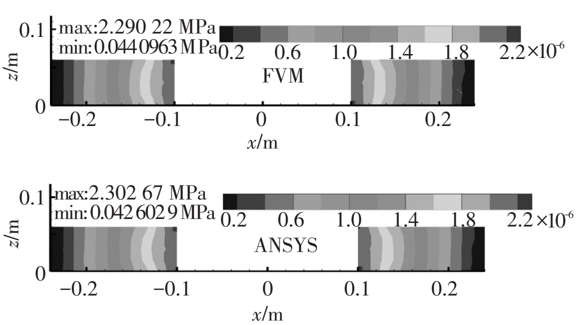
为转盘材料为 M1 时、$t=0.015$ s 时，FVM 计算结果与 ANSYS 计算结果的对比，可看出本文方法与 ANSYS 计算结果吻合良好，转盘的径向位移 u_r、轴向位移 u_z 与径向应力 σ_r 均关于其中位面 $z=0.03$ m 对称，径向最大位移位于转盘的外径（$r=0.24$ m），轴向的最大位移大概位于 $r=0.131$ m 处的上、下表面上，径向最大应力位于转盘的内径 $r=0.1$ m.图 6 为中位面上各监测点径向应力 σ_r 随时间的变化，计算结果均与 FEM 吻合良好，随着速度的均匀增加，应力增加的越来越快，当速度保持不变后，各点的应力也保持不变.



（a）径向位移 u_r



（b）轴向位移 u_z



（c）径向应力 σ_r

图 5　$t=0.015$ s 时 FVM 计算结果与 FEM（ANSYS）计算结果对比

图 7 为 3 种均匀横观各向同性材料不同点的时间响应，本文 FVM 计算结果与 ANSYS 计算结果吻合良好.从图 7 可以看出弹性模量的减少均会造成对应方向上的位移增大.

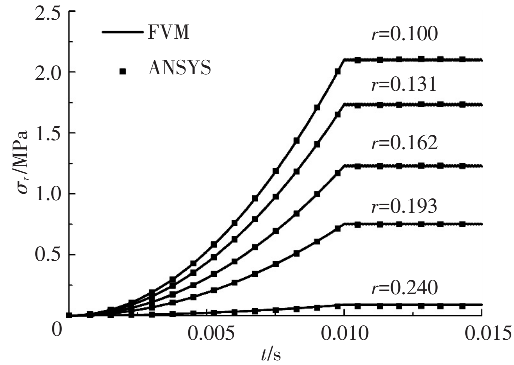
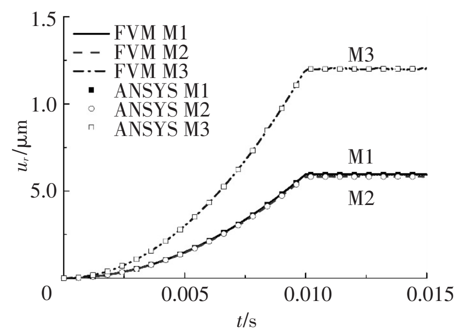
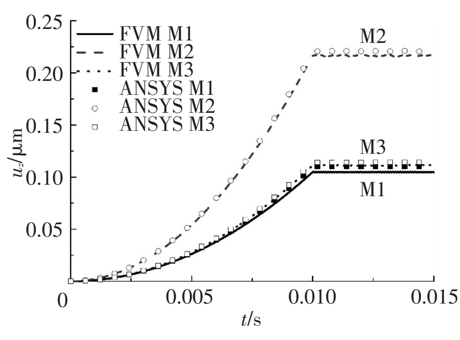


图 6　中位面上各监测点径向应力 σ_r 随时间的变化



（a）中位面上 $r=0.24$ m 处的径向位移



（b）$z=0$ m 平面上，$r=0.131$ m 处的轴向位移

图 7　3 种材料不同点的时间响应

对比 FVM 与 ANSYS 计算消耗，以转盘材料 M3 为例，由 ANSYS 模态计算可得转盘的最小固有频率为 1 665 Hz，则其 ANSYS 所采用时间步长应满足 $\Delta t \leqslant 1/(20f) \approx 30$ μs.表 3 为 FVM 与 ANSYS 计算消耗对比.在网格与时间步长均相同的前提下，FVM 消耗较小的内存并获得较快的计算速度，其主要原因是 FVM 采用显格式推进求解且不需要求解大型线性方程组，而 ANSYS 在每一个时间内都需要建立存储刚度矩阵并求解大型线性方程组，这将会占用大量的内存及计算时间.在该算例中，虽然显格式推进求解限制 FVM 采用较小的时间步长，但与 ANSYS 采用较大的时间步长相比，FVM 仍然消耗较少的内存及计算时间.

表 3 计算消耗对比

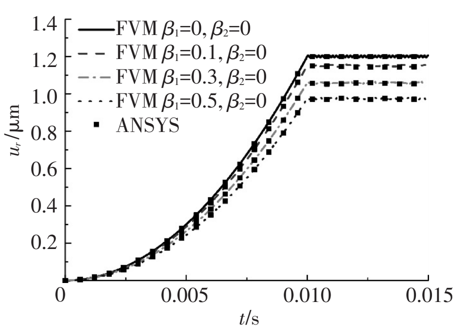
对比方法	时间步长/μs	内存/MB	CPU/s
FVM	1. 5	63	466
ANSYS	1. 5	230	36 722
ANSYS	30	223	1834

最后,考虑材料属性沿径向变化对转盘的影响,材料属性的变化规律可表示为

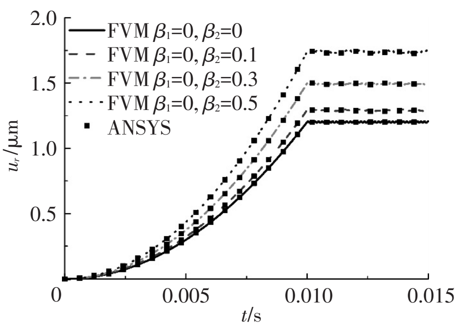
$$E(r)=E_x=E_y=E_0\exp\left[\frac{\beta_1(r-r_{in})}{(r_{out}-r_{in})}\right],$$

$$\rho(r)=\rho_0\exp\left[\frac{\beta_2(r-r_{in})}{(r_{out}-r_{in})}\right].$$

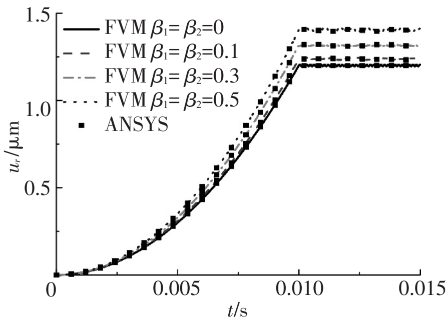
式中:β_1、β_2 分别为梯度常数;ρ_0 = 8 000 kg/m^3;E_0 = 100 GPa;E_z = 200 GPa,其他属性保持不变.考虑 4 个不同梯度常数即 0. 0, 0. 1, 0. 3, 0. 5,当 $\beta_1=\beta_2=0.0$ 对应均匀横观各向同性材料 M3.如图 8 为中位面上 r = 0. 24 m 处的径向位移,本文 FVM 计算结果与 ANSYS 计算结果吻合良好.当 β_2 保持不变,可以看出随着径向弹性模量或梯度常数 β_1 的增大,转盘的径向位移减小(图 8(a));当 β_1 保持不变,随着径向密度或梯度常数 β_2 的增大,转盘的径向位移增大(图 8(b));当径向密度与弹性模量按相同趋势增大时,转盘的径向位移增大(图 8(c));与弹性模量变化相比,密度沿径向变化对转盘径向位移变化有更大的影响.



(a)弹性模量变化、密度不变



(b)密度变化、弹性模量不变



(c)弹性模量、密度均变化

图 8 中位面上 r = 0.24 m 处的径向位移

3 结 论

1)计算结果与其他数值计算结果吻合良好,表明本文 FVM 的正确性.

2)与 ANSYS 相比,本文方法需要较小的时间步长,但占用较小内存且具有较快的计算速度.

3)研究材料属性沿径向变化对转盘的影响.结果表明:随着径向弹性模量的增大,转盘的径向位移减小;随着径向密度的增大,转盘的径向位移增大;当径向密度与弹性模量按相同趋势增大时,转盘的径向位移增大;与弹性模量相比,密度沿径向变化对转盘径向位移变化有更大的影响.

参考文献

[1] 王保林, 韩杰才, 张幸红. 非均匀材料力学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[2] MARKWORTH A J, RAMESH K S, PARKS W P. Review: modeling studies applied to functionally graded materials [J]. Journal of Materials Science, 1995, 30(9): 2183-2193.

[3] BIRMAN V, BYRD L W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures [J]. Applied Mechanics Reviews, 2007, 60(5):83-96.

[4] 李翔宇. 横观各向同性功能梯度圆板和环板的轴对称问题[D]. 杭州:浙江大学, 2007.

[5] 黄德进, 丁皓江, 陈伟球. 线性分布载荷作用下功能梯度各向异性悬臂梁的解析解[J]. 应用数学和力学, 2007, 28: 763-768.

[6] 黄德进. 各向异性功能梯度平面梁的弹性力学解[D]. 杭州:浙江大学, 2009.

[7] ALBUQUERQUE E L, SOLLERO P, ALIABADI M H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(5):1405-1422.

(下转第 106 页)