第46卷　第7期　　哈　尔　滨　工　业　大　学　学　报　　Vol. 46　No. 7
2014年7月　　JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY　　Jul. 2014

极小 Cayley 图的确定性小世界网络模型

刘艳霞[1,2], 奚建清[1], 张　芩[2]

(1.华南理工大学 软件学院, 510006 广州; 2.华南理工大学 计算机科学与工程学院, 510006 广州)

摘　要: 小世界网络的确定性模型研究是复杂网络建模领域的重要分支,通过分析 Cayley 图的极小性与小世界特性的关联,提出一种基于极小 Cayley 图构造小世界网络的确定性模型.模型通过选择满足条件的极小 Cayley 图,恰当地扩展其生成集,构造出一类对称性强且结构规则的小世界网络.结果表明, 和现有模型不同,该模型可根据需求构造常数度或非常数度网络,且生成网络不仅具有较高的聚集系数和低的网络直径,而且是节点对称的,在通信网络、结构化 P2P 覆盖网络等实际领域的拓扑结构设计中具有重要应用.

关键词: 复杂网络;小世界网络;确定性模型;Cayley 图

中图分类号: TP393.0　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 0367-6234(2014)07-0107-05

Deterministic small-world network model based on minimal Cayley graph

LIU Yanxia[1,2], XI Jianqing[1], ZHANG Qin[2]

(1. School of Software Engineering, South China University of Technology, 510006 Guangzhou, China;
2. School of Computer Science and Engineering, South China University of Technology, 510006 Guangzhou, China)

Abstract: The research on deterministic small-world network model is an important branch of complex network modeling. This paper analyzes the small-world property of the minimal Cayley graph and proposes a deterministic small-world network model based on minimal Cayley graph. The model constructs a class of small-world networks with high symmetry by selecting a minimal Cayley graph, and appropriately expands its generating set. Compared with the existing models, this model can be used flexibly to get small-world networks with const degree or variable degree, which is adaptable for the disign and analysis of the real networks such as communication network and P2P overlay network.

Keywords: complex network; small-world network; deterministic model; Cayley graph

小世界网络在自然界和人类社会中普遍存在,如蛋白质网络、科学家协作网络、WWW 网络、通信网络等,都具有明显的小世界特性.通常一个稀疏网络,如果其直径(或是网络平均距离)随着网络规模的增大呈对数或小于对数形式增长,网络有相对较高的聚集系数,则该网络称为小世界网络.

为再现真实网络中存在的小世界特性,揭示小世界网络的内在生成机理,各种小世界模型不断涌现.这些模型主要分为:1)随机性模型. 通过概率分析技术和随机连边方法生成网络,如最初的 WS 模型[1]及其变体 NW 模型[2]、二维的 Kleinberg 模型[3]、动态演化的 OHO 模型[4];2)确定性模型. 网络节点和连边完全由确定的规则形成.随机性模型尽管符合大多数真实网络的生成特性,但无法直观、清晰地反映网络的形成机制以及解析计算网络特性,也不适合以确定方式构造的具有固定节点度的通信网络,因此确定性的小世界模型逐渐成为研究热点,基于各种构造方法的确定性模型相继被提出.

最早的确定性小世界模型由 Comellas 等[5]提出,采用基于循环图扩展的方法,通过降低直径或提高聚集系数,将高直径或低聚集的循环图转变为小世界网络.树通常具有低的对数级直径和小的节点度,因此基于树结构的推广或改造也可

收稿日期: 2013-09-17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61103037).
作者简介: 刘艳霞(1979—),女,讲师,博士生;
奚建清(1962—),男,教授,博士生导师.
通信作者: 刘艳霞,cslyx@scut.edu.cn.

生成小世界网络,如递归团树(recursive clique tree[6])是2-团树至K-团树的推广,二叉树可简单改造为小世界网络[7].经典的数学问题或数学理论同样可用于小世界网络的构造,如Corso[8]的自然数网络、Chandra 等[9]的素数网络源自于素因数分解理论和哥德巴赫猜想;Boettcher 等[10]提出的 Hanoi 网络源自经典的 Hanoi 塔问题.除了采用全新的构造方法,已有的网络模型也可以成为确定性小世界模型的基础,如 ZRG 模型[11]是随机性 OHO 模型的确定性版本,LG 模型[12]是确定性均匀递归树 DURT 的小世界版本.最近,GovorcIn 等[13]将线图作为确定性小世界模型,使用图论中的线图运算也获得了小世界网络.

Cayley 图是运用有限群构造高对称网络的图论模型,在互连网络设计中有重要应用,Xiao 等[14]曾于2006年首次提出 Cayley 图可作为确定性的小世界网络模型,并通过两个应用实例予以说明.本文在此基础上进行了形式化描述和扩展,引入了 Cayley 图的极小性概念,通过分析极小性和聚集系数的关联,建立了形式化的 Cayley 图扩展模型.该模型通过增加极小 Cayley 图的生成集,可灵活地构造出对称性强且结构规则的常数度和非常数度的小世界网络,在通信网络、P2P 覆盖网络等实际领域具有广泛应用.

1 极小 Cayley 图及其聚集系数

首先引入极小 Cayley 图的概念及其聚集性质,作为小世界网络模型的理论基础.为便于建模,只考虑无向图的情况,以下的 Cayley 图在不作特殊说明的情况下都为无向 Cayley 图.

定义 1(Cayley 图[15]) 设G是一个有限群,e为G的单位元,S是G的一个子集且满足以下条件:1)$e \notin S$;2) $g^{-1} \in S$当且仅当$g \in S$,则群G关于子集S的 Cayley 图$\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$定义为

$$V(\Gamma) = G, E(\Gamma) = \{(g,gs) \mid g \in G, s \in S\}.$$

定义 2(极小对称生成集[15]) 设G是一个有限群,S是G的子集且不含单位元,即$S \subseteq G \backslash \{e\}$,若$S$满足$\forall s \in S, Gr(S\backslash\{s,s^{-1}\})$为$G$的真子群,则$S$称为$G$的极小对称生成集.

定义 3(极小 Cayley 图[15]) 设Γ为 Cayley 图$\mathrm{Cay}(G,S)$,若子集S为极小对称生成集,则Γ被称为极小 Cayley 图.

聚集系数是小世界网络的重要度量指标.如果网络中某个节点v的度为$\deg(v)$,则节点v的聚集系数$cc(v) = \dfrac{2M_v}{\deg(v)(\deg(v)-1)}$.其中,$M_v$为$v$的所有邻节点之间实际存在的边数,也可理解为$v$连接的三角形个数.由于 Cayley 图具有点对称性,整个网络的聚集系数$CC(\Gamma)$即为任意节点v的聚集系数$CC(v)$,显然,$0 \leqslant CC(\Gamma) \leqslant 1$.由此,本文给出极小 Cayley 图的如下性质.

定理 1 如果$\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$是极小 Cayley 图,则$CC(\Gamma) \neq 0$当且仅当存在生成元$a,b \in S$,$a$与$b$互逆,且$a^3 = b^3 = e$.

证 明 首先,证明充分性.若存在生成元a,$b \in S, b = a^{-1}$且$a^3 = b^3 = e$,则$b = a^2$,对于任意的$g \in G$,有$(ga)a = gb \wedge (gb)b = ga$,即$g$的两个邻节点$ga$与$gb$之间存在一条连边,因此$CC(\Gamma) \neq 0$.

其次,证明必要性.若$CC(\Gamma) \neq 0$,则对于任意的节点$g \in G$,其邻居之间至少存在一条连边.由于 Cayley 图的点对称性,在此仅需考虑单位元e的聚集系数,其邻节点的集合为生成集S.假设与e形成三角形的两个邻居分别为a与b,$a,b \in S \wedge a \neq b$,则必定存在$h,h^{-1} \in S$,满足$ah = b$且$bh^{-1} = a$;由于$S$不含单位元,则有$h \neq b \wedge h \neq a^{-1}$.进一步,若$h \neq b^{-1} \wedge a \neq b^{-1}$,则$S\backslash\{b,b^{-1}\}$仍可生成$G$,同样的,若$h \neq a \wedge b \neq a^{-1}$,则$S\backslash\{a,a^{-1}\}$仍可生成$G$的所有元素,这与$\Gamma$是极小 Cayley 图相矛盾的,因此必有$a = b^{-1}$,即$a$与$b$互逆.接下来,考虑$h$的取值,若$h$是不同于$a$和$b$的第3个生成元,即$h \neq a \wedge h \neq b$,由于$ah = b$以及$a$与$b$互逆,则$h = a^{-1}b = b^2$,即$h$可由$b$生成;同样地,$h^{-1}$也可由$a$生成;也就是说$S\backslash\{h,h^{-1}\}$仍可生成$G$的所有元素,这也与$\Gamma$是极小 Cayley 图相矛盾的,因此必有$h = a$或$h = b$成立.又因为$ah = b$且$a$非单位元,自然有$h \neq b$.由此,可知$h = a = b^{-1}$成立,即$a$与$b$互逆且$a^3 = b^3 = e$,得证.

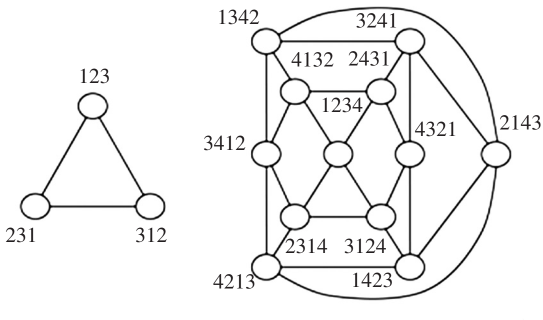
很多著名的互连网络都是 Cayley 图且具有极小性,如圈C_n、交错群图AG_n、超立方体Q_n、立方连通圈CCC_n等,定理1提供一种简单的方式判断这些 Cayley 图是否具有较高的聚集性.而且,从定理1的证明可知,若极小 Cayley 图的生成集中存在一对互逆的生成元,并且其3次幂为单位元,则该对生成元之间一定具有连边,形成且仅形成一个三角形;进一步,若生成集中存在n对互逆的生成元,其3次幂都为单位元,则形成的三角形个数为n,因此容易得到如下推论.

推论 1 如果$\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$是极小 Cayley 图,则$CC(\Gamma) = n/C_{|S|}^2$当且仅当生成集$S$中存在$n$对互逆且3次幂为$e$的生成元.

例 1 圈C_n是极小 Cayley 图$\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_n, \{-1, +1\})$,其中:"+"和"-"分别为模$n$的加

减运算；C_n 的度为 2.很明显，仅当 $n=3$ 时，满足 $1^3=(-1)^3=1$，圈 C_3 为三角形，其聚集系数为 1，其余情况圈 C_n 的聚集系数都为 0.

例 2　交错群图 $AG_n=\mathrm{Cay}(A_n,S)$[16] 是针对偶置换群 A_n 构造的一类 Cayley 图，设 $g_i^+=(12i)$，$g_i^-=(1i2)$，则生成集 $S=\{g_i^+ \mid i=3,4,\cdots,n\} \cup \{g_i^- \mid i=3,4,\cdots,n\}$.$AG_n$ 是度为 $2(n-2)$ 的极小 Cayley 图，所有生成元都是 3- 轮换并且两两互逆，对所有的 $i=3,4,\cdots,n$，$(12i)$ 与 $(1i2)$ 互逆，并且满足 $(12i)^3=(1i2)^3=e$.因此其聚集系数为 $(n-2)/C^2_{2(n-2)}$.如图 1 是交错群图 AG_3 和 AG_4，从图 1 中可看出，其具有较高的聚集系数.



(a) AG_3　　　　(b) AG_4

图 1　交错群图 AG_3 和 AG_4

2　极小 Cayley 图的小世界特性

在最早提出的 WS 小世界的基础上，Cont 等[17]用图论的语言描述了小世界网络模型的基本原则.

定义 4（小世界网络模型[17]）　一个网络模型 Ω 被称为小世界的，如果其生成图 Γ 满足以下条件，其中，$V(\Gamma)$ 和 $E(\Gamma)$ 分别为 Γ 的节点集和边集.

1）图 Γ 是稀疏的，即 $\deg(\Gamma) \in O(\log|V(\Gamma)|)$；

2）图 Γ 具有较小的直径，即 $D(\Gamma) \in O(\log|V(\Gamma)|)$；

3）图 Γ 具有较高的聚集系数，即存在大于 0 的常数 c，使得 $CC(\Gamma) \geqslant c$ 成立.

必须说明的是，该定义可以进行小的调整，如稀疏图中关于节点度的条件可以替换为 $E(\Gamma)$ 的条件，即 $|E(\Gamma)| \in O(|V(\Gamma)|\log|V(\Gamma)|)$，较小的直径可以替换为较小的平均距离，$\Gamma$ 的聚集系数也可表示为 $CC(\Gamma) \approx c(c>0)$，但由此可知，其本质是相同的.

针对极小 Cayley 图和小世界之间的关联，可得到如下结论.

定理 2　非常数度的极小 Cayley 图必定不是小世界的.

证　明　若有非常数度的极小 Cayley 图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$，从推论 1 可知，$CC(\Gamma)=n/C^2_{|s|}$ 其中，n 为 S 中 3 次幂为 e 的互逆生成元的对数，易知其最大取值为 $|S|/2$，则有 $CC(\Gamma)$ 的最大取值为 $1/(|S|-1)$.由于 $\deg(\Gamma)=|S|$ 不为常数，则图 Γ 无法满足条件 3)，图 Γ 不是小世界的，得证.

例如图 1 中交错群图 AG_n，属于非常数度的极小 Cayley 图，度为 $2(n-2)$，聚集系数为 $(n-2)/C^2_{2(n-2)}$，尽管其聚集系数较高，但随着节点规模的增大，聚集系数越来越小，按照定理 2 的证明可知，其不是小世界的.

根据定义 4 可以发现，极小 Cayley 图可作为候选的、确定性的小世界网络模型.遵循互连网络设计原则，很多性质良好的极小 Cayley 图都是可扩展的、稀疏的并具有低直径，即符合小世界网络模型定义的条件 1）和条件 2），为构造小世界网络提供了很好的模型基础.

进一步，从定理 2 可知，极小 Cayley 图若不是常数度网络，则其本身一定不是小世界的.因此若要构造小世界网络，则需要扩展生成集使其不具有极小性，并且通过恰当选择扩展的生成集，获得较高的聚集系数，将极小 Cayley 图转换为具有小世界特性的 Cayley 图.

3　极小 Cayley 图的扩展模型

本文详细介绍如何通过扩展极小 Cayley 图的生成集，构造小世界网络.为便于讨论，引入以下概念和符号.

定义 5（Cayley 扩展图）　设 Γ 为极小 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G,S)$，若 Γ 为扩展的生成集，使其增加新的生成元集 H，满足 $H \subseteq G \backslash (S \cup \{e\}) \wedge H=H^{-1}$，则形成新的 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G,S \cup H)$ 称为 Γ 基于 H 的扩展图，记为 $Ex(\Gamma,H)$；另外，Γ 也可称为 $Ex(\Gamma,H)$ 的 Cayley 基图.

很明显，Cayley 扩展图在其基图上增加了节点度，使节点之间存在更多的连边，降低了网络直径并且增加了聚集性.接下来，基于 Cayley 扩展图的概念以及定义 4 中小世界网络模型 3 个条件，定理 3 和定理 4 分别给出常数度和非常数度的小世界网络的构造方法，其中 $N=|V(\Gamma)|$.

定理 3　若极小 Cayley 图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 是常数度网络且满足定义 4 的条件 2），若有 $H \cap (S \cup H)^2 \neq \Phi$ 且 $|H|=c$（c 为常数），则 $Ex(\Gamma,H)$ 是常数度的小世界网络.

证　明

1) 由于 $|H|$ 为常数, $\deg(Ex(\Gamma,H)) = \deg(\Gamma) + |H| = c_d$ (c_d 为常数), 则有 $Ex(\Gamma,H)$ 满足定义 4 的条件 1), 且 $Ex(\Gamma,H)$ 是常数度网络;

2) 由于 Γ 满足定义 4 的条件 2), 即有 $D(\Gamma) \in O(\lg N)$, 又由于 $Ex(\Gamma,H) \leqslant D(\Gamma)$, 则 $Ex(\Gamma,H)$ 满足条件 2);

3) 由于 $H \cap (S \cup H)^2 \neq \Phi$, $|H|$ 为常数, 即任意节点 $g \in G$ 的邻节点的连边 M_g 为常数, 由于 $\deg(Ex(\Gamma,H))$ 也为常数, 则 $CC(Ex(\Gamma,H)) = M_g / C^2_{\deg(Ex(\Gamma,H))} = c_h$ (c_h 为常数).

由于 $Ex(\Gamma,H)$ 满足定义 4 的条件 1)、2)、3), $Ex(\Gamma,H)$ 是小世界的且是常数度的网络, 得证.

例 3　立方连通圈 $CCC_n (n \geqslant 3)$ 是度为 3 的极小 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G,S)$, 其中群 G 是 Z_2 与 Z_n 的圈积, 表示为 $G = Z_2 \otimes Z_n$, G 上的操作为 $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (Z_2^n, Z_n)$, $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 \otimes \sigma^{y_1}(x_2), y_1 + y_2)$, σ^{y_1} 是循环右移 y_1 位操作, $\otimes$ 是异或操作, 生成集 $S = \{(1\underbrace{0\cdots0}_{n-1}, 0), (\underbrace{0\cdots0}_{n}, \pm 1)\}$. 若令 $c_k \leqslant n/2$ 的任意正整数, 定义 $H = \{(\underbrace{0\cdots0}_{n}, \pm i) \mid 1 < i \leqslant c_k\}$, 易知 H 满足定理 3 的条件, Cayley 扩展图 $Ex(CCC_n, H)$ 是常数度的小世界网络, 若 $c_k = n/2$, 其节点度为 $2c_k$, 其聚集系数为 $3(c_k - 1)/2(2c_k - 1)$; 否则其节点度为 $1 + 2c_k$, 其聚集系数为 $3(c_k - 1)/2(2c_k + 1)$.

定理 4　若极小 Cayley 图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 满足定义 4 的条件 1) 和条件 2), 且 $H' \subseteq S$ 使得 $(H \cup H' \cup \{e\}) \leqslant G$ 成立, 并且有 $|H \cup H'| \in O(\lg N)$, 则 $Ex(\Gamma,H)$ 是小世界的.

证　明

1) 由于 Γ 满足条件 1), 即有 $\deg(\Gamma) \in O(\lg N)$, 又因为 $|H| \leqslant |H \cup H'| \in O(\lg N)$, 则 $\deg(Ex(\Gamma,H)) = \deg(\Gamma) + |H| = |S| + |H| \in O(\lg N)$, $Ex(\Gamma,H)$ 满足条件 1);

2) 由于 Γ 满足条件 2), 即有 $D(\Gamma) \in O(\lg N)$, 又由于 $Ex(\Gamma,H) \leqslant D(\Gamma)$, 则有 $Ex(\Gamma, H)$ 满足条件 2);

3) 由于 $|S| + |H| \in O(\lg N)$, 又因为存在 $H' \subseteq S$, 使得 $H \cup H' \cup \{e\}$ 是 G 的子群, 而且满足 $|H \cup H'| = |H'| + |H| \in O(\lg N)$, 则有

$$CC(Ex(\Gamma,H)) \geqslant \frac{C^2_{|H'|+|H|}}{C^2_{|S|+|H|}} = \frac{|H \cup H'|(|H \cup H'| - 1)}{(|S| + |H|)(|S| + |H| - 1)} \approx \frac{c_1 \lg N(c_1 \lg N - 1)}{c_2 \lg N(c_2 \lg N - 1)} = \frac{c_1^2(\lg N - 1/c_1)}{c_2^2(\lg N - 1/c_2)}.$$

当 $n \to \infty$ 时, $CC(Ex(\Gamma,H)) \geqslant c_1^2/c_2^2$ (其中, c_1、c_2 分别为常量, 则有 $CC(Ex(\Gamma,H))$ 满足条件 3);

综上所述, $Ex(\Gamma,H)$ 是小世界的, 得证.

例 4　超立方体 Q_n 为极小 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G, S)$, 其中: $G = Z_2^n$; $S = \{\underbrace{0\cdots0}_{i}1\underbrace{0\cdots0}_{n-i-1} \mid 0 \leqslant i \leqslant n - 1\}$. 若令 $t = \lceil \log_2 n \rceil$, $H' = \{(x_1, x_2, x_t 0^{n-t}) \mid x_1, x_2, \cdots, x_t$ 中仅一个为 $1\}$, $H = \{(x_1, x_2, x_t 0^{n-t}) \mid x_1, x_2, \cdots, x_t) \in Z_2^t\} \backslash (H' \cup \{e\})$, 其中单位元 e 为 $(0, 0, \cdots, 0)$, 易知 H 满足定理 4 的条件, Cayley 扩展图 $Ex(\Gamma,H)$ 是小世界的, 其节点数 $N = 2^n$, 度和直径都为 $O(\lg N)$, 聚集系数大于或等于 1/4.

从以上示例可知, 定理 3 和定理 4 提供了一种基于极小 Cayley 图构造小世界网络的方法, 该方法非常灵活, 只要选择满足条件的极小 Cayley 图, 恰当地扩展其生成集, 则可以生成一类具有小世界性质的 Cayley 图.

4　结　论

1) 极小 Cayley 图由于其构造简单和高对称性, 已经广泛应用于互连网络拓扑结构的设计中, 研究学者基于各种各样的群结构提出了很多性质良好的极小 Cayley 图, 根据互连网络的设计原则, 这些图大部分是可扩展的、稀疏的并具有低直径, 因此为构造小世界网络提供了很好的模型基础.

2) 深入分析了 Cayley 图的极小性和小世界性质的关联, 建立了形式化的极小 Cayley 图扩展模型, 通过恰当的扩展生成集, 构造出对称性强且结构规则的小世界网络.

3) 本文提出的构造方法可应用于通信网络、结构化 P2P 覆盖网络等实际互连网络的拓扑结构设计中, 这些网络在设计时一方面需要遵循对称性的设计原则, 因为节点对称可以简化拓扑维护及路由算法的设计, 并且有利于负载均衡, 而边对称性可以实现最优容错, 另一方面也可以引入小世界性质改进网络性能, 如具有小世界性质的通信网络可根据数据访问需求进行分组聚集, 并使远程通信也具有较快的通信效率, 而具有小世界性质的结构化 P2P 覆盖网络可提高网络的路由效率、查询和检索的命中率, 并且在突发高负载时保持良好性能.

参考文献

[1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.

[2] NEWMAN M E J, WATTS D J. Renormalization group analysis of the small-world network model[J]. Physics Letters A, 1999, 263(4/6): 341-346.

[3] KLEINBERG J M. Navigation in a small world[J]. Nature, 2000, 406(6798): 845.

[4] OZIK J, HUNT B R, OTT E. Growing networks with geographical attachment preference: emergence of small worlds[J]. Physical Review E, 2004, 69(2): 26108.

[5] COMELLAS F, OZON J, PETERS J G. Deterministic small-world communication networks[J]. Information Processing Letters, 2000, 76(1): 83-90.

[6] COMELLAS F, FERTIN G, RASPAUD A. Recursive graphs with small-world scale-free properties[J]. Physical Review E, 2004, 69(3): 037104.

[7] GUO Shize, LU Zheming, KANG Guangyu, et al. A tree-structured deterministic small-world network[J]. IEICE Transactions on Information and Systems, 2012, 95(5): 1536-1538.

[8] CORSO G. Families and clustering in a natural numbers network[J]. Physical Review E, 2004, 69(3): 36106.

[9] CHANDRA A K, DASGUPTA S. A small world network of prime numbers[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005, 357(3/4): 436-446.

[10] BOETTCHER S, GONCALVES B, AZARET J. Geometry and dynamics for hierarchical regular networks[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008, 41(33): 335003.

[11] ZHANG Zhongzhi, RONG Lili, GUO Chonghui. A deterministic small-world network created by edge iterations[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2006, 363(2): 567-572.

[12] LU Zheming, GUO Shize. A small-world network derived from the deterministic uniform recursive tree[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2012, 391(1/2): 87-92.

[13] GOVORCIN J, KNOR M, SKREKOVSKI R. Line graph operation and small worlds[J]. Information Processing Letters, 2013, 113(5/6): 196-200.

[14] XIAO Wenjun, PARHAMI B. Cayley graphs as models of deterministic small-world networks[J]. Information Processing Letters, 2006, 97(3): 115-117.

[15] BIGGS N. Algebraic graph theory[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993.

[16] JWO J S, LAKSHMIVARAHAN S, DHALL S K. A new class of interconnection networks based on the alternating group[J]. Networks, 1993, 23(4): 315-326.

[17] CONT R, TANIMURA E. Small-world graphs: characterization and alternative constructions[J]. Advances in Applied Probability, 2008, 40(4): 939-965.

（编辑　张　红）