二阶系统包容控制算法及其收敛速度分析

张安慧[1], 陈 健[1,2], 孔宪仁[1], 王 峰[1,2]

(1.哈尔滨工业大学 卫星技术研究所,150080 哈尔滨; 2. 小卫星技术国家地方联合工程研究中心, 130033 长春)

摘 要: 针对具有多领航者的二阶系统分布式协同控制问题,提出了一种一般性的包容控制算法,并基于控制增益系数和系统信息拓扑拉普拉斯矩阵的特征值给出了系统收敛的充分必要条件.在此基础上,进一步研究了控制增益系数和系统信息拓扑对系统收敛速度的影响,给出了取得极大收敛速度的控制增益系数解析表达式,并利用 Weyl 定理证明了增加系统中的信息链路可以提高系统收敛速度.最后,系统仿真验证了所得结论的正确性.

关键词: 分布式协同控制;代数图论;多领航者;包容控制;收敛速度

中图分类号: TP13 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2014)09-0001-08

Containment control protocol and its convergence speed analysis for double-integrator dynamics systems

ZHANG Anhui[1], CHEN Jian[1,2], KONG Xianren[1], WANG Feng[1,2]

(1. Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China;
2. National and Local United Engineering Research Center of Small Satellite Technology, 130033 Changchun, China)

Abstract: A general containment control algorithm is proposed for distributed coordinated control of double-integrator dynamics system with multiple leaders. Necessary and sufficient conditions on convergence are presented based on the control gains and system Laplacian eigenvalues. Furthermore, the influences of control gains and the information topology on system convergence rate are investigated. Specifically, the control gains which achieve maximal convergence rate are given, and it is proved by using Weyl theorem that the system convergence rate can be improved by adding information links. Finally, numerical simulations are given to illustrate the main results.

Keywords: distributed coordinated control; algebraic graph theory; multiple leaders; containment control; convergence speed

近年来,多智能体系统分布式协同控制问题得到众多研究者的广泛关注.与集中式的控制策略不同,在分布式系统中个体只利用部分系统成员的相对信息生成控制决策,因此具有较强的容错性和鲁棒性.

一致性问题是分布式协同控制的一个重要研究方向[1-3],系统能够实现一致性即系统能够通过局部信息交互在关键信息量上达成一致.通过设置所要达成一致的状态量,一致性算法可以实现姿态对准、编队构型生成和保持等多种编队控制功能[4-6];然而,在某些任务中对各系统成员的最终状态并没有精确的要求,例如,在分离式模块航天器编队中,成员间相对位置和相对姿态只要能满足无线能量和信息传输要求即可.可以考虑利用某几颗模块航天器对编队成员的位置和姿态限定一个范围,其他编队成员的位置或姿态只要始终处于该范围内即可.与上述编队任务密切相关的是包容控制问题,包容控制是一种具有多领航者的类一致性问题,其目的是将跟随者控制到领航者围成的某一目标区域内(领航者围成的凸包内),具有单领航者的包容控制实际上是一致性跟踪问题[7-9].包容

收稿日期: 2013-07-20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60904051).
作者简介: 张安慧(1980—),女,博士;
孔宪仁(1961—),男,教授,博士生导师;
王 峰(1980—),男,副教授,博士生导师.
通信作者: 陈 健, chinjian@163.com.

控制具有广泛的潜在应用,包括:移动危险物品[10]、深空探测和地面监测[11]等.

目前,分布式包容控制算法的研究工作主要包括一阶系统[10,12-13]、二阶系统[14]和非线性系统[15-18].文献[10]首先研究了无向一阶系统的包容控制问题,并利用偏差分方程法证明了所提算法的有效性.文献[12]则研究了有向固定信息拓扑和有向切换信息拓扑两种情况下的一阶包容控制问题.然而,其关于切换系统的结论只适用于个体状态向量为一维的情形.针对这一问题,文献[13]利用切换系统拉塞尔不变集原理提出一种对任意有限维状态向量均适用的一阶切换系统包容控制算法.对于由刚体组成的多智能体系统,文献[11]提出一种静态领航者的姿态包容控制算法.考虑到外界干扰和参数不确定性等因素,文献[15-16]分别研究了有限时间收敛和参数不确定性有向系统的姿态包容控制问题.文献[14]研究了一种二阶包容算法,所提算法要求系统成员能够同时获取自身的绝对速度信息、邻居集合的相对位置以及相对速度信息.然而,在某些实际应用中,受测量装置性能影响,同时获取这些信息可能存在困难,因此,需要研究一种更为一般性的包容算法以满足不同任务需要.

收敛速度是衡量系统性能的一个重要指标,有众多学者对一致性算法的收敛速度进行了研究[19-24].系统内信息交互关系是影响系统收敛速度的重要因素,对无向一阶积分系统,系统拉普拉斯矩阵第二小特征值是系统收敛速度的刻画指标[1].基于此,有学者提出了加边法[19]和多跳法[20]来提高一致性收敛速度.这两种方法的本质都是通过增加系统中的信息链路来实现更多的信息共享,从而系统能够较快的达到一致.而对具有有向平衡信息拓扑的一阶系统,系统收敛速度与信息拓扑对称图的第二小特征值相关[1],文献[23]则通过状态变换将二阶系统转化为一阶系统,然后采用与一阶有向系统相似的方法将二阶一致性收敛速度与某无向图的第二小特征根联系起来.控制增益系数也是影响系统收敛速度的一个重要因素,对于二阶积分系统,文献[24]给出了系统取得极大收敛速度的控制增益系数表达式.然而,对于包容控制算法,目前还未见有文献从控制增益系数以及系统信息拓扑的角度对系统收敛速度展开研究.

本文研究二阶积分系统包容控制问题,给出一种一般性的包容控制算法,并对其收敛性和收敛速度问题进行研究.

1 代数图论

将系统中的成员视为顶点,用边来表示个体间的信息交互情况,则整个系统的信息交互关系可以用图 G 来表示,称之为系统信息拓扑.

设 $G = (V,E)$ 为有向图,其中 $V(G) = \{1,2,\cdots,N\}$ 为顶点集, $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ 为边集.用 (i,j) 来表示从顶点 j 指向顶点 i 的有向边,其中 j 称为 i 的邻居,i 的邻居集合定义为 $N_i = \{j \in V(G) \mid (i,j) \in E(G)\}$.若 $(i,j) \in E(G) \Leftrightarrow (j,i) \in E(G)$,则称 G 为无向图.点边交错序列 $i_0(i_0,i_1)i_1(i_1,i_2)\cdots(i_{k-1},i_k)i_k$ 表示从顶点 i_k 到顶点 i_0 的一条有向路径,其中各顶点 $i_g(g = 0,1,\cdots,k)$ 互异,且 $(i_g,i_{g+1}) \in E(G)$ $(g = 0,1,\cdots,k)$.用符号 $i \mapsto j$ 来表示从顶点 i 到顶点 j 存在一条有向路径.G 的邻接矩阵定义为 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N\times N}$, $a_{ij} \geqslant 0, a_{ij} > 0 \Leftrightarrow (i,j) \in E(G)$,$G$ 的拉普拉斯矩阵定义为 $\boldsymbol{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{N\times N}$, $l_{ii} = \sum_{(i,j)\in E(G)} a_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}$, $(i \neq j)$.

在系统信息拓扑 G 中,有向边 (i,j) 表示智能体 i 能够获取 j 的信息,智能体 i 的邻居集合则包含了所有处于 i 的敏感或通信范围内的其他系统成员.

2 问题描述

考虑如下二阶系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{v}_i,\ \dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{u}_i,\quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^p$, $\boldsymbol{v}_i \in \mathbf{R}^p$, $\boldsymbol{u}_i \in \mathbf{R}^p$ 分别为第 i 个智能体的位置、速度和控制输入.

注1 为了便于描述,只考虑 $p = 1$ 的情形,对于维数大于1的情况可以用克罗尔内积进行拓展,本文的结论对其他任意有限维的情况均成立.

在实际的应用中可以利用凸多面体对目标区域进行近似,通常选取的顶点越多近似精度越高.首先给出凸包的定义.

定义1[12] 设集合 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为实向量空间 $V \subseteq \mathbf{R}^p$ 的子集,X 的凸包定义为

$$CO(X) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{x}_i \in X, \alpha_i \in \mathbf{R}, \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\right\}.$$

设目标区域(运动的或静止的)可以由 m 个顶点围成的凸包近似表示,将这 m 个顶点视为领航者,而将系统成员视为跟随者,领航者集合与跟随者集合分别记为 $L = \{n+1,\cdots,n+m\}$ 和 $F = \{1,2,\cdots,n\}$.

注2 目标区域顶点信息可以是由外界提供的,也可以是由系统中能力较强的个体自主生成

的，这些个体通常具有较强的敏感、通信和信息处理能力，在探测到目标或障碍物时能自动生成目标或安全区域.

本文考虑静态领航者的情况，即 $v_i = 0,\ i \in L$. 设计跟随者的控制器为

$$\boldsymbol{u}_i(t) = -\alpha \boldsymbol{v}_i - \sum_{j \in N_i} a_{ij}[\gamma_0(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) + \gamma_1(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)],\quad i \in F. \tag{2}$$

其中 $\alpha, \gamma_0, \gamma_1$ 为常值.

设跟随者以及跟随者之间的信息交互关系做成的图为 G_F，本文将研究跟随者之间为双向信息交互的情况，即 G_F 为无向图. 所有跟随者以及领航者之间的信息交互关系做成的图记为 G，称为系统信息拓扑. 由于领航者只是用来界定目标区域的，其运动不受任何其他系统成员的影响，根据领航者与跟随者的分化，系统拉普拉斯矩阵可以写成如下形式：

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_F & \boldsymbol{L}_{FL} \\ 0_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{L}_F$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{L}_{FL}$ 为 $n \times m$ 阶矩阵.

为了实现包容控制目标，必须保证任意一个跟随者至少受一个领航者的影响，否则系统中将存在某些跟随者，其运动不受任何领航者影响，也就无法进入领航者围成的目标区域内. 因此，首先给出包容控制的一个必要条件.

假设 1　对任意一个跟随者 i，至少存在一个领航者 j，使得 G 满足从 j 到 i 存在一条路径.

引理 1[15]　若假设 1 成立且跟随者之间为双向信息交互，则 $\boldsymbol{L}_F$ 为正定阵，$-\boldsymbol{L}_F^{-1}\boldsymbol{L}_{FL}$ 为非负矩阵且每行元素和为 1.

令 $\boldsymbol{x}_L = [x_{n+1} \ \cdots \ x_{n+m}]^{\mathrm{T}}$，由定义 1 和引理 1，$-\boldsymbol{L}_F^{-1}\boldsymbol{L}_{FL}x_L$ 位于领航者围成的凸包内. 下面给出包容控制的定义.

定义 2　令 $\boldsymbol{x}_F = [x_1 \ \cdots \ x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_F = [v_1 \ \cdots \ v_n]^{\mathrm{T}}$，若在控制器(2) 的作用下有 $\boldsymbol{x}_F \to -\boldsymbol{L}_F^{-1}\boldsymbol{L}_{FL}\boldsymbol{x}_L$，$\boldsymbol{v}_F \to 0$，则称控制器(2) 可以实现包容控制.

3　收敛性分析

由式(1)～(2)得

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_F \\ \dot{\boldsymbol{v}}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_n \\ -\gamma_0 \boldsymbol{L}_F & -\alpha I_n - \gamma_1 \boldsymbol{L}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_F \\ \boldsymbol{v}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & 0_{n\times m} \\ -\gamma_0 \boldsymbol{L}_{FL} & -\gamma_1 \boldsymbol{L}_{FL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_L \\ 0_{m\times 1} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

令

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_n \\ -\gamma_0 \boldsymbol{L}_F & -\alpha I_n - \gamma_1 \boldsymbol{L}_F \end{bmatrix},$$

设跟随者的位置初值和速度初值分别为 $\boldsymbol{x}_F(0)$ 和 $\boldsymbol{v}_F(0)$，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_F(t) \\ \boldsymbol{v}_F(t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\Gamma t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_F(0) \\ \boldsymbol{v}_F(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \mathrm{e}^{\Gamma(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & 0_{n\times m} \\ -\gamma_0 \boldsymbol{L}_{FL} & -\gamma_1 \boldsymbol{L}_{FL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_L \\ 0_{m\times 1} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\Gamma t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_F(0) \\ \boldsymbol{v}_F(0) \end{bmatrix} + (\mathrm{e}^{\Gamma t}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} - \boldsymbol{\Gamma}^{-1})\begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ -\gamma_0 \boldsymbol{L}_{FL}\boldsymbol{x}_L \end{bmatrix}.$$

经计算

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha}{\gamma_0}\boldsymbol{L}_F^{-1} - \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} I_n & -(\gamma_0 \boldsymbol{L}_F)^{-1} \\ I_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix},$$

$$-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ -\gamma_0 \boldsymbol{L}_{FL}\boldsymbol{x}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{L}_F^{-1}\boldsymbol{L}_{FL}\boldsymbol{x}_L \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的所有特征根均具有负实部当且仅当 $\mathrm{e}^{\Gamma t} \to 0$，进而得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_F(t) \\ \boldsymbol{v}_F(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\boldsymbol{L}_F^{-1}\boldsymbol{L}_{FL}\boldsymbol{x}_L \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix},$$

当且仅当 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的所有特征根均具有负实部.

由以上分析可得如下定理成立.

定理 1　若假设 1 成立，则控制器(2) 能够实现渐近包容控制当且仅当 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的所有特征根均具有负实部.

在系统信息拓扑确定的情况下，$\boldsymbol{\Gamma}$ 的特征根分布由控制增益系数 $\alpha,\ \gamma_0,\ \gamma_1$ 决定，那么该如何选取控制增益系数使得控制器(2) 能够实现包容控制呢？由于跟随者之间为双向信息交互，由引理 1 得，$-\boldsymbol{L}_F$ 的特征根均为负实数，不妨设为 $0 > \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$. 进一步，设 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的特征根为 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $(\lambda_i)^2 + (\alpha - \gamma_1\mu_i)\lambda_i - \gamma_0\mu_i$，由于控制协议(2) 中不含绝对位置反馈项，因此由引理 2[3] 可得，$\boldsymbol{\Gamma}$ 的特征根均具有负实部的充要条件为 $\alpha > \max\limits_i(\mu_i\gamma_1)$ 且 $\gamma_0 > 0$. 于是得到以下结论.

定理 2　控制器(2)能够实现渐近包容控制当且仅当

$$\begin{cases} \alpha > \max\limits_i(\mu_i\gamma_1), \\ \gamma_0 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

注 3　事实上，定理 2 隐含了假设 1 的条件，因为若 $\boldsymbol{L}$ 的 0 特征根的重数大于 m，则 $\boldsymbol{L}_F$ 含有零特征根，与式(5) 中第二个不等式矛盾.

注 4　由定理 2 中第二个不等式可知 $\gamma_0 \neq 0$. 此外，由于 $\mu_i < 0$，由第一个不等式得：γ_1 与 α 中可以有一个为 0 另一个为正. 因此，控制器(2) 中

必须含有邻居间相对位置信息,而个体的绝对速度信息与邻居间的相对速度信息可以根据实际情况进行选择.

4 收敛速度分析

由式(4)系统收敛速度与$\boldsymbol{\Gamma}$的特征根分布有关.经计算,$\boldsymbol{\Gamma}$的特征根为

$$\begin{cases}\lambda_{i1}=\dfrac{-(\alpha-\gamma_1\mu_i)+\sqrt{(\alpha-\gamma_1\mu_i)^2+4\gamma_0\mu_i}}{2},\\ \lambda_{i2}=\dfrac{-(\alpha-\gamma_1\mu_i)-\sqrt{(\alpha-\gamma_1\mu_i)^2+4\gamma_0\mu_i}}{2}.\end{cases}\tag{6}$$

式中$i=1,2\cdots,n$.设系统指数收敛速度为a,则

$$a=-\max\{\mathrm{Re}\lambda_{ij}\mid i=1,2,\cdots,n;j=1,2\}.\tag{7}$$

由式(6)和(7)可知,系统收敛速度由控制增益系数以及系统信息拓扑结构G共同决定.

4.1 控制增益系数对系统收敛速度的影响

首先研究控制增益系数对系统收敛速度的影响,并给出取得极大收敛速度的控制增益系数表达式.

4.1.1 $\alpha=0$的情况

当$\alpha=0$时,由定理2,包容控制的充分必要条件为$\gamma_0>0,\ \gamma_1>0$.

由于$\mathrm{Re}\{\lambda_{i1}\}\geqslant\mathrm{Re}\{\lambda_{i2}\}$,所以

$$a=\max\{\mathrm{Re}\lambda_{i1}\mid i=1,\cdots,n\}.$$

首先固定γ_1,对γ_0分3种情况进行讨论:

1)当$\gamma_0\geqslant-\dfrac{\gamma_1^2\mu_n}{4}$时,$a=\dfrac{\gamma_1\mu_1}{2}$.$\gamma_0$的变化对系统收敛速度没有影响.

2)当$-\dfrac{\gamma_1^2\mu_1}{4}<\gamma_0<-\dfrac{\gamma_1^2\mu_n}{4}$时,

$$a=\max\left\{\frac{\gamma_1\mu_n+\sqrt{(\gamma_1\mu_n)^2+4\gamma_0\mu_n}}{2},\frac{\gamma_1\mu_1}{2}\right\}.$$

经计算:

若$-\dfrac{\gamma_1^2\mu_1}{4}<\gamma_0\leqslant\dfrac{(-\mu_1^2+2\mu_1\mu_n)\gamma_1^2}{-4\mu_n}$,则

$$a=\frac{\gamma_1\mu_n+\sqrt{(\gamma_1\mu_n)^2+4\gamma_0\mu_n}}{2};$$

若$\dfrac{(-\mu_1^2+2\mu_1\mu_n)\gamma_1^2}{-4\mu_n}<\gamma_0<-\dfrac{\gamma_1^2\mu_n}{4}$,则

$$a=\frac{\gamma_1\mu_1}{2}.$$

3)当$0<\gamma_0<-\dfrac{\gamma_1^2\mu_1}{4}$时,

$$a=\frac{\gamma_1\mu_n+\sqrt{(\gamma_1\mu_n)^2+4\gamma_0\mu_n}}{2}.$$

由以上分析得:对固定的γ_1,当$\gamma_0=\dfrac{(-\mu_1^2+2\mu_1\mu_n)\gamma_1^2}{-4\mu_n}$时系统取得极大收敛速度,所对应的指数收敛速率为$a=-\dfrac{\gamma_1\mu_1}{2}$.

同样,对γ_0固定的情况进行类似讨论有:当$0<\gamma_1\leqslant\dfrac{2\sqrt{-\gamma_0\mu_n}}{\sqrt{-\mu_1(\mu_1-2\mu_n)}}$时,系统指数收敛速率为$-\dfrac{\gamma_1\mu_1}{2}$,增大$\gamma_1$可以提高系统收敛速度;当$\dfrac{2\sqrt{-\gamma_0\mu_n}}{\sqrt{-\mu_1(\mu_1-2\mu_n)}}<\gamma_1$时,系统指数收敛速率为$-\dfrac{\gamma_1\mu_n+\sqrt{(\gamma_1\mu_n)^2+4\gamma_0\mu_n}}{2}$,此时$-\dfrac{\gamma_1\mu_n+\sqrt{(\gamma_1\mu_n)^2+4\gamma_0\mu_n}}{2}$为$\gamma_1$的减函数,增大$\gamma_1$反而会减慢系统收敛速度.由于当$\gamma_1=\dfrac{2\sqrt{-\gamma_0\mu_n}}{\sqrt{-\mu_1(\mu_1-2\mu_n)}}$时,$\dfrac{\gamma_1\mu_n+\sqrt{(\gamma_1\mu_n)^2+4\gamma_0\mu_n}}{2}=\dfrac{\gamma_1\mu_1}{2}$,因此,对固定的信息拓扑$G$和$\gamma_0>0$,渐近包容控制在$\gamma_1=\dfrac{2\sqrt{-\gamma_0\mu_n}}{\sqrt{-\mu_1(\mu_1-2\mu_n)}}$处取得极大收敛速度,所对应的指数收敛速率为$a=\dfrac{\sqrt{\gamma_0\mu_1\mu_n}}{\sqrt{\mu_1-2\mu_n}}$,这与定理1[24]的结论相类似,不同的是,此处$\mu_i$为$-L_F$的特征值.

4.1.2 $\gamma_1=0$的情况

当$\gamma_1=0$时,由定理2,包容控制的充分必要条件为$\alpha>0,\ \gamma_0>0$.

对固定的$\gamma_0>0$有:

1)若$0<\alpha\leqslant2\sqrt{-\gamma_0\mu_1}$,则系统指数收敛速率为$a=\dfrac{\alpha}{2}$.因此,增大$\alpha$可以提高系统收敛速度;

2)若$\alpha>2\sqrt{-\gamma_0\mu_1}$,则系统指数收敛速率$a=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\gamma_0\mu_1}}{2}$,增大$\alpha$反而会减小系统收敛速度;

3)当$\alpha=2\sqrt{-\gamma_0\mu_1}$时系统取得极大收敛速度,对应指数收敛速率为$a=\sqrt{-\gamma_0\mu_1}$.

同样,对固定的 $\alpha > 0$ 有:

1) 若 $\gamma_0 > \dfrac{\alpha^2}{-4\mu_1}$,则系统指数收敛速率为 $a = \dfrac{\alpha}{2}$,γ_0 的变化对收敛速度没有影响;

2) 若 $\gamma_0 \leqslant \dfrac{\alpha^2}{-4\mu_1}$,则系统指数收敛速率为 $a = \dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma_0\mu_1}}{2}$, 增大 γ_0 可以提高系统收敛速度;

3) 当 $\gamma_0 = \dfrac{\alpha^2}{-4\mu_1}$ 时系统取得极大收敛速度,对应指数收敛速率为 $a = \dfrac{\alpha}{2}$.

以上分析结果表明:若 $\alpha = 0$,则对固定的 γ_1,当 $\gamma_0 = \dfrac{(-\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_n)\gamma_1^2}{-4\mu_n}$ 时系统极大指数收敛速率为 $a = -\dfrac{\gamma_1\mu_1}{2}$;若 $\gamma_1 = 0$,则对固定的 γ_0,当 $\alpha = 2\sqrt{-\gamma_0\mu_1}$ 时系统极大指数收敛速率为 $a = \sqrt{-\gamma_0\mu_1}$.在这两种情况中,系统极大收敛速度均与 L_F 的最小特征根 $-\mu_1$ 密切相关, $-\mu_1$ 越大系统极大收敛速度越快.而 $-\mu_1$ 是由系统信息拓扑结构决定的,那么该如何设计跟随者之间以及跟随者与领航者之间的信息交互关系使得系统具有较快的收敛速度呢?

4.2　系统信息拓扑对系统收敛速度的影响

对于一个无向连通图,其拉普拉斯矩阵的最小非零特征根表示了该图的代数连通度,因此,通过增加信息链路可以增大最小非零特征根(至少不会减小).基于此,有学者提出利用加边法来提高一致性收敛速度.然而,对于具有领航 - 跟随结构的系统,由于 $\boldsymbol{L}_F$ 并不是某无向图的拉普拉斯矩阵,而只是某有向图的拉普拉斯矩阵的子矩阵,加边法是否能够增加 $\boldsymbol{L}_F$ 的最小特征根 $-\mu_1$ 呢? 若可以的话,则可以利用加边法来提高系统的收敛速度.事实上,由于由以下引理可以证明加边法同样可以增大 $\boldsymbol{L}_F$ 的最小特征根.

引理 2(Weyl 定理)[25]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称阵, $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征根分别为

$$\lambda_1(\boldsymbol{A}) \leqslant \lambda_2(\boldsymbol{A}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(\boldsymbol{A}),$$
$$\lambda_1(\boldsymbol{B}) \leqslant \lambda_2(\boldsymbol{B}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(\boldsymbol{B}),$$
$$\lambda_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \lambda_2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).$$

则对任意的 $i = 1,2,\cdots,n$,有

$$\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \geqslant \begin{cases} \lambda_i(\boldsymbol{A}) + \lambda_1(\boldsymbol{B}), \\ \lambda_{i-1}(\boldsymbol{A}) + \lambda_2(\boldsymbol{B}), \\ \cdots \\ \lambda_1(\boldsymbol{A}) + \lambda_i(\boldsymbol{B}). \end{cases}$$

$$\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \begin{cases} \lambda_i(\boldsymbol{A}) + \lambda_n(\boldsymbol{B}), \\ \lambda_{i+1}(\boldsymbol{A}) + \lambda_{n-1}(\boldsymbol{B}), \\ \cdots \\ \lambda_n(\boldsymbol{A}) + \lambda_i(\boldsymbol{B}). \end{cases}$$

由于加边后的系统信息拓扑仍要满足假设 1,因此,加边的方式有两种,一种是在跟随者之间增加双向边, 另一种是增加从领航者到跟随者的有向边.设增加的边集为 $\tilde{E}$,则加边后产生的新的系统信息拓扑 $G' = (V(G), E \cup \tilde{E})$.设系统采用信息拓扑 G' 的极大收敛速度为 $a(G')$,采用原信息拓扑 G 的极大收敛速度为 $a(G)$,可以证明以下定理成立.

定理 3　若假设 1 成立且 G_F 为无向图,对固定的 $\gamma_1 > 0(\gamma_0 > 0)$,增加跟随者之间的双向信息交互以及增加从领航者到跟随者的单向信息交互均可以提高系统极大收敛速度.

证明　令 $\tilde{G} = (V(G), \tilde{E})$,即 $\tilde{G}$ 的顶点集为 $F \cup L$, 边集为 $\tilde{E}$. 设 $\tilde{G}$ 和 G' 对应的拉普拉斯矩阵分别为 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 和 $\boldsymbol{L}'$.由式(3),$\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{L}'$ 分别可以写成分块形式 $\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{L}}_F & \tilde{\boldsymbol{L}}_{FL} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{L}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}'_F & \boldsymbol{L}'_{FL} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}$,其中 $\tilde{\boldsymbol{L}}_F$ 和 $\boldsymbol{L}'_F$ 分别为 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 和和 $\boldsymbol{L}'$ 中跟随者所在的行和列组成的子矩阵.由于 $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L} + \tilde{\boldsymbol{L}}$,所以 $\boldsymbol{L}'_F = \boldsymbol{L}_F + \tilde{\boldsymbol{L}}_F$.令 $\boldsymbol{L}'_F$ 和 $\tilde{\boldsymbol{L}}_F$ 的特征根分别为 $\lambda_1(\boldsymbol{L}'_F) \geqslant \lambda_2(\boldsymbol{L}'_F) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(\boldsymbol{L}'_F)$ 和 $\lambda_1(\tilde{\boldsymbol{L}}_F) \geqslant \lambda_2(\tilde{\boldsymbol{L}}_F) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(\tilde{\boldsymbol{L}}_F)$.由引理 2 得,$\lambda_1(\boldsymbol{L}'_F) \geqslant \lambda_1(\boldsymbol{L}_F) + \lambda_1(\tilde{\boldsymbol{L}}_F)$.由于 $\tilde{\boldsymbol{L}}_F$ 为半正定阵, 所以 $\lambda_1(\tilde{\boldsymbol{L}}_F) \geqslant 0$, 进而 $\lambda_n(\boldsymbol{L}'_F) \geqslant \lambda_n(\boldsymbol{L}_F)$.因此,$a(G') = \sqrt{\gamma_0\lambda_n(G')} \geqslant \sqrt{\gamma_0\lambda_n(G)} = a(G)$.

注 5　由定理 3 的证明过程可以得出:增大信息链路上的权值也可以提高包容控制算法的极大收敛速度.因为增大某条边上的权值所得到的拉普拉斯矩阵也是由原拉普拉斯矩阵加上一个半正定阵得到的.

5　仿真验证

设系统中有 5 个跟随者,跟随者集合为 $F = \{1,2,3,4,5\}$, 要将这 5 个跟随者控制到三角形区域内,目标区域的 3 个顶点位置为(单位 m): $\boldsymbol{\xi}_6 = [0, 20]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_7 = [-15, -8]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_8 = [15, -15]^{\mathrm{T}}$.

各跟随者的初始位置为(单位 m):

$$\boldsymbol{\xi}_1(0)=[20,6]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2(0)=[-5,22]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_3(0)=[-18,7]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_4(0)=[-20,-10]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_5(0)=[23,5]^{\mathrm{T}}.$$

各跟随者在初始时刻与目标区域的相对位置如图 1 所示,其中跟随者用空心圆表示.

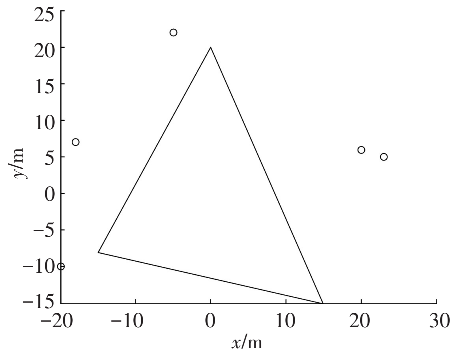


图 1　跟随者初始位置与目标区域

各跟随者在参考轨道坐标系内的初始速度为(单位 m/s):

$$\boldsymbol{v}_1(0)=[0.04,0.02]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}_2(0)=[0.05,0.03]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{v}_3(0)=[-0.02,0.04]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}_4(0)=[0.02,-0.03]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{v}_5(0)=[-0.04,0.02]^{\mathrm{T}}.$$

假设系统信息拓扑如图 2 所示,取如下系统矩阵:

$$\boldsymbol{L}_F=\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&3&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}_{FL}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

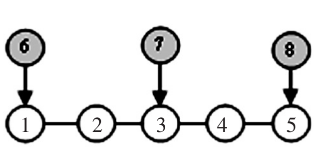
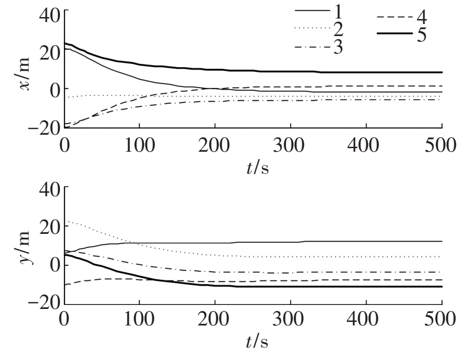


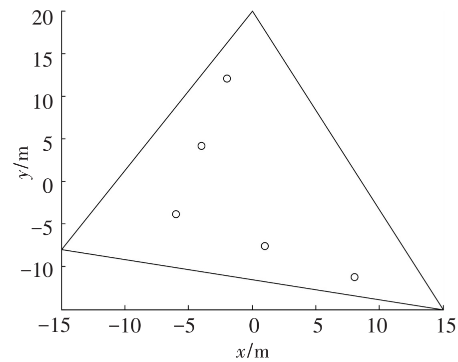
图 2　系统信息拓扑

经计算,$\boldsymbol{L}_F$ 的特征值约为:0.518 8, 1, 2.311 1, 3, 4.170 1.

首先,以 $\alpha=0$, $\gamma_0>0$, $\gamma_1>0$ 的情况为例,选取不同的增益系数对系统收敛速度进行对比.取 $\gamma_0=1/1\ 600$,则当 $\gamma_1=0.051$ 时编队具有极大收敛速度,系统仿真结果如图 3 所示.作为对照,另取 $\gamma_0=1/1\ 600$, $\gamma_1=0.2$,仿真结果如图 4 所示.

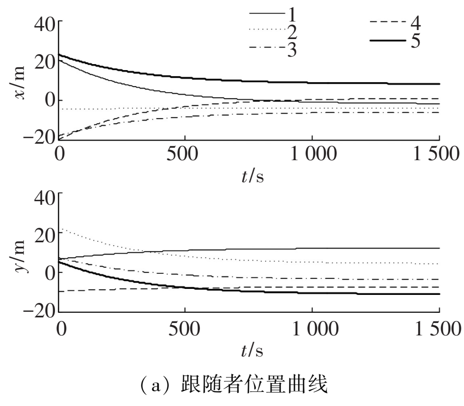


(a) 跟随者位置曲线

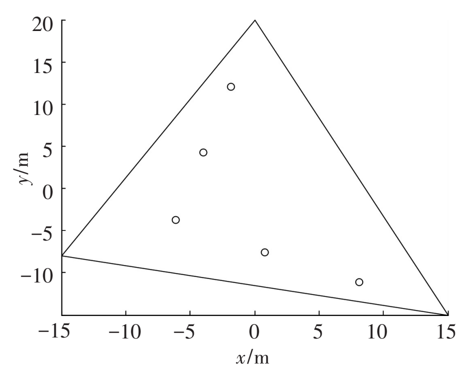


(b) $t=500$ s 时跟随者的位置

图 3　$\gamma_0=\dfrac{1}{1\ 600}$, $\gamma_1=0.051$ 时仿真结果



(a) 跟随者位置曲线



(b) $t=1\ 500$ s 时跟随者的位置

图 4　$\gamma_0=\dfrac{1}{1\ 600}$, $\gamma_1=0.2$ 时仿真结果

仿真结果表明,采用两组控制增益系数均可以将跟随者控制到目标区域内，但是与 $\gamma_0 = 1/1\,600$, $\gamma_1 = 0.051$ 相比,当 $\gamma_0 = 1/1\,600$, $\gamma_1 = 0.2$ 时,虽然 γ_1 增大了,系统收敛速度却降低了.

其次,验证加边法对系统收敛速度的影响.在原信息拓扑(图 2)的基础上添加从领航者 7 到跟随者 2 的边以及从领航者 8 到跟随者 4 的边,得到系统信息拓扑图 5.

取

$$\boldsymbol{L}_F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}_{FL} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

经计算，$\boldsymbol{L}_F$ 的特征值约为：7.901 5, 5.908 5, 4.000 0, 2.288 6, 2.901 4. 显然加边后 $\boldsymbol{L}_F$ 的所有特征根均增大了.

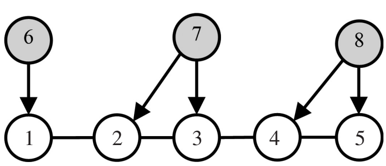
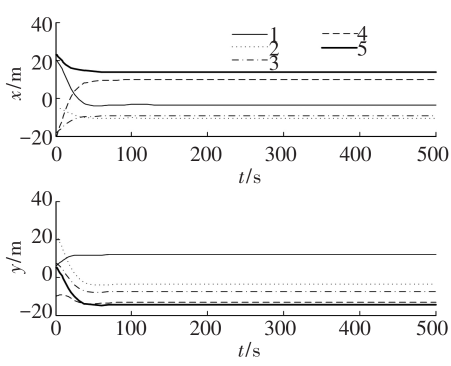
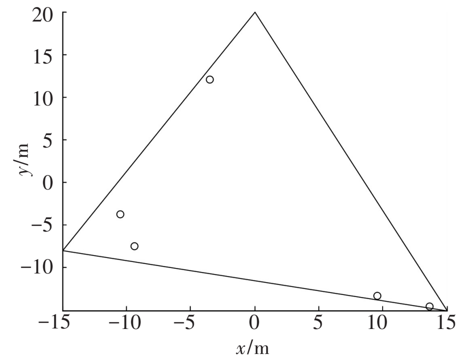


图 5　加边后信息拓扑

仍取 $\alpha = 0$, $\gamma_1 = 0.051$,则 $\gamma_0 = 0.003\,1$ 时系统取得极大收敛速度,系统仿真结果如图 6 所示. 比较图 3 和图 6 中各跟随者的位置曲线可以看出,增加了信息链路后系统极大收敛速度明显提高了.



(a) 跟随者位置曲线



(b) $t = 500$ s 时跟随者的位置

图 6　$\gamma_0 = 0.003\,1$, $\gamma_1 = 0.051$ 时仿真结果

6　结　语

针对二阶积分系统提出一种一般性的包容控制算法,并研究了该算法的收敛速度问题.基于系统信息拓扑拉普拉斯矩阵特征值给出了系统收敛性对控制增益系数的约束条件;研究了控制增益系数对系统收敛速度的影响,为如何通过调节控制增益系数以提高系统收敛速度提供了准则;证明了当跟随者之间为双向信息交互时,系统收敛速度与系统拉普拉斯矩阵最小非零特征根有关,从而增加从领航者到跟随者的信息链路、增加跟随者之间的双向信息链路、以及增大各信息链路上的权值均可以提高系统收敛速度.

参考文献

[1] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[2] XIAO F, WANG L. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(8): 1804-1816.

[3] ZHU J D, TIAN Y P, KUANG J. On the general consensus protocol of multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 431(5/6/7): 701-715.

[4] 张世杰,段广仁. 分布式卫星编队飞行队形保持协同控制[J]. 宇航学报,2011, 32(10): 2140-2145.

[5] SMITH R S, HADAEGH F Y. Control of deep-space formation-flying spacecraft: relative sensing and switched information[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 25(1): 106-114.

[6] 张保群, 宋申民, 陈兴林. 带时延和拓扑切换的编队卫星鲁棒协同控制[J].宇航学报, 2012, 33(7): 910-919.

[7] MOORE K, LUCARELLI D. Decentralized adaptive scheduling using consensus variables[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10/11): 921-940.

[8] REN W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state[J]. System and Control Letters, 2007, 56(7/8): 474-483.

[9] HONG Y G, CHEN G R, BUSHNELL L. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks[J]. Automatica, 2008, 44(3): 846-850.

[10] JI M, FERRARI-TRECATE G, EGERSTEDT M, et al. Containment control in mobile networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(8): 1972-1975.

[11] DIMAROGONAS D V, TSIOTRAS P, KVRIAKOPOULOS K J. Leader-follower cooperative attitude control of multiple rigid bodies[J]. Systems and Control Letters, 2009, 58(6): 429-435.

[12] CAO Y C, REN W. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph [C]//Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 2009: 3014-3019.

[13] NOTRASTEFANO G, EGERSTEDT M, HAQUE M. Containment in leader-follower networks with switching communication topologies [J]. Automatica, 2011, 47(5): 1035-1040.

[14] CAO Y C, STUART D, REN W, et al. Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: algorithms and experiments[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(4): 929-938.

[15] MENG Z Y, REN W, YOU Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092-2099.

[16] MEI J, REN W, MA G F. Distributed containment control for Lagrangian networks with parametric uncertainties under a directed graph[J]. Automatica, 2012, 48(4): 653-659.

[17] SHI G D, HONG Y G. Coordination of nonlinear multi-agent systems with multiple leaders and switching topologies[C]//8th IEEE International Conference on Control and Automation. Piscataway: IEEE Computer Society, 2010: 2030-2035.

[18] MEI J, REN W, MA G F. Distributed containment control for multiple nonlinear systems with identical dynamics[C]//Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Piscataway: IEEE Computer Society, 2011: 6544-6549.

[19] XU D G, LI Y J, WU T J. Improving consensus and synchronizability of networks of coupled systems via adding links[J]. Physica A, 2007, 382(2): 722-730.

[20] YUAN D M, XU S Y, ZHAO H Y, et al. Accelerating distributed average consensus by exploring the information of second-order neighbors [J]. Physics Letters A, 2010, 374 (24): 2438-2445.

[21] CAO Y C, REN W. Multi-agent consensus using both current and outdated states with fixed and undirected interaction[J]. Intell Robot Syst, 2010, 58(1): 95-106.

[22] YU W W, ZHENG W X, CHEN G R, et al. Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data[J]. Automatica, 2011, 47(7): 1496-1503.

[23] QIN J H, GAO H J, ZHENG W X. Second-order consensus for multi-agent systems with switching topology and communication delay[J]. System and Control Letters, 2011, 60(6): 390-397.

[24] ZHU J D. On consensus speed of multi-agent systems with double-integrator dynamics[J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 434(1): 294-306.

[25] LANCASTER P, TISMENETSKY M. The theory of matrices with applications[M]. 2nd ed. New York: Academic, 1985.

（编辑　张　宏）