

PIE+MOM 的 Mamdani 模糊系统通用逼近性 充要条件

游文虎¹, 王 茂¹, 施 佳²

(1.哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 150001 哈尔滨; 2.中国航空无线电电子研究所, 200241 上海)

摘 要: 为了解决如何构造具有通用逼近性能的 Mamdani 模糊系统问题, 提出一类 Mamdani 模糊系统具有通用逼近性的充要条件. 该模糊系统采用乘积推理机(product inference engine, PIE)和最大值平均(mean of maximum, MOM)解模糊器, 按模糊规则后件分为单点规则后件和模糊数规则后件两种情况, 分别根据 Weierstrass 第一定理和隶属度函数性质给出了严格证明. 最后通过示例证明该充要条件的有效性.

关键词: Mamdani 模糊系统; 乘积推理机; MOM; 通用逼近性

中图分类号: TP273.4

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2014)11-0001-07

Sufficient and necessary condition of Mamdani fuzzy systems with PIE and MOM as universal approximators

YOU Wenhui¹, WANG Mao¹, SHI Jia²

(1. Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China;

2. China Aeronautical Radio Electronics Research Institute, 200241 Shanghai, China)

Abstract: Focusing on whether fuzzy system can approximate any given function, the sufficient and necessary theory of one type of fuzzy systems as universal approximators was investigated. Mamdani fuzzy systems with product inference engine (PIE) and mean of maximum (MOM) defuzzificator can be classified two cases according to rule consequent: simple point rule consequent and fuzzy set rule consequent. Based on Weierstrass's first theorem and properties of membership functions, sufficient and necessary condition is proved respectively. A simulation example is given to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: mamdani fuzzy system; PIE; MOM; approximation

学者 Kosko^[1]和 Wang^[2]在 1992 年的 IEEE 模糊系统会议上提出了模糊系统可以作为通用逼近器, 并分别从不同角度给予了证明. 自此, 不少学者围绕模糊系统作为通用逼近器开展了相关研究. Bova 等^[3]研究了 Mamdani 模糊系统的一种模糊逻辑推理过程. Wang 等^[4]分析了简化结构演变的方法. Mamdani 模糊系统辨识及其应用高维问题的方法. 关于模糊系统作为通用逼近器的理论研究可分为 3 大类: 存在性, 充分性和必要性.

1) 模糊系统通用逼近性的存在性. Kosko^[1]首先建立加型模糊系统模型, 然后采用有限覆盖定理对基于此模型的模糊系统的通用逼近性的存在性给出了分析; 进一步和 Dickerson 等^[5]共同分析了具备椭圆规则的加型模糊系统的通用逼近性. Buckley 等^[6]选取一类模糊控制器的传递函数作为研究对象, 从泛函角度对模糊系统具有通用逼近性给出了存在性证明. Zeng 等^[7-8]分析了采用乘积和最小推理方法得到的模糊系统, 得出了其具有通用逼近性的对给定输入的局部逼近特性的一般表达式, 并给出了如何提高全局通用逼近性的方向性建议. Kóczy 等^[9]从“猫和鼠”等问题出发对采用最大-最小算子推理的 Mamdani 模型和 T-S 模型模糊系统的通用逼近性

收稿日期: 2013-11-03.

基金项目: 国家自然科学基金(61004038).

作者简介: 游文虎(1972—), 男, 副教授;

王 茂(1965—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 游文虎, yourmate_2000@163.com.

的存在性进行了研究. Cao 等^[10-11]从动态模型角度分别研究了 T-S 模糊模型和 Mamdani 模糊模型的通用逼近性. Cuong 等^[12]引入 Mamdani 模糊系统的一类分段多线性模型,并研究了其逼近能力.

2) 模糊系统通用逼近性的充分性. Ying^[13-14]采用构造性方法,分别分析了预先给定的逼近精度的 T-S 型和 Mamdani 型模糊系统作为通用逼近器的充分条件. Zeng 等^[15]通过对线性 T-S 性模糊系统的隶属函数作了一定的限制后给出了新的通用逼近性的充分性条件. 黄卫华等^[16]推导了输入采用广义线性隶属函数的典型 Mamdani 模糊系统的解析结构,并证明了通用逼近性.

3) 模糊系统通用逼近性的必要性. Ying 等^[17-18]深入研究了一般单输入单输出、多输入单输出的 Mamdani 型模糊系统和典型的 T-S 型模糊系统可以作为通用逼近器的必要条件,并分析了其极可能具有最简洁系统构成. 孙富春等^[19]研究了单输入单输出 (SISO) Mamdani 模糊系统在给定逼近精度下作为函数逼近器的必要条件,对文献^[17-18]的结论做了推广.

以上这些研究都没有给出某种情形下的模糊系统具有通用逼近性的充要条件. 这些研究都是指针对某一特定类模糊系统的通用逼近能力,他们都未能解答具有通用逼近性能的模糊系统必须具备怎样的条件. 具体采用怎样的途径和方法来构造模糊系统,从而使其具有通用逼近性,这仍然需要进一步的研究分析.

本文将分析并证明一类具有通用逼近性的 Mamdani 型模糊系统的充要条件.

1 一类通用逼近的 Mamdani 模糊系统

在研究模糊系统的逼近性能时,需要在有界闭区间上进行. 因此,设定 n 维模糊系统的输入空间为 $[a_i, b_i]^n, i = 1, 2, \dots, n$. 对区间 $[a_i, b_i]$ 进行划分,即在区间 $[a_i, b_i]$ 上定义 N_i 个模糊数 $A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^{N_i}$, 且有 $A_i^1 < A_i^2 < \dots < A_i^{N_i}$, 则有 $C_i^1 < C_i^2 < \dots < C_i^{N_i}$, 其中 C_i^j 为 A_i^j 的中心点.

令 $U_{j_1 j_2 \dots j_n} = [C_1^{j_1}, C_1^{j_1+1}] \times \dots \times [C_n^{j_n}, C_n^{j_n+1}]$, 其中 $j_i = 1, 2, \dots, N_i - 1 (i = 1, 2, \dots, n)$. 又因为 $[a_i, b_i] = [C_i^1, C_i^2] \cup [C_i^2, C_i^3] \cup \dots \cup [C_i^{N_i-1}, C_i^{N_i}]$, 可得 $U = [a_i, b_i]^n = \bigcup_{j_1 j_2 \dots j_n=1}^N U_{j_1 j_2 \dots j_n}$, 其中 $N = (N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times \dots \times (N_n - 1)$.

定义 1 设 $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, T 是 T-norm, 当且仅当对于所有的 $x, y, z \in [0, 1]$ 有:

- 1) $T(x, y) = T(y, x)$ (交换律);
- 2) 当 $y \leq z, T(x, y) \leq T(y, x)$ (单调性);
- 3) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (结合律);
- 4) $T(x, 1) = x$.

定义 2 乘积推理机 (PIE). 指定 U 上的给定模糊集 A' 向 V 上的模糊集 B' 的映射规则如下:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M \left[\sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^l(x_i) \mu_{B'}^l(y)) \right].$$

其中 $\mu_{A'}(x)$ 表示模糊集 A' , $\mu_{A_i}^l(x_i)$, $\mu_{B'}^l(y)$ 分别为模糊规则前件、后件的隶属度函数.

Mamdani 模糊系统的结构比 T-S 模糊系统的结构要复杂得多, 因为对于 Mamdani 模糊系统来说, 其规则后件也为模糊数, 而且解模糊器也有多种选择. 本文只讨论基于乘积推理机 (PIE) 的情形.

对于 Mamdani 型模糊系统, 根据其规则后件的不同, 其模糊系统具有不同形式. 当采用一般解模糊化算子^[20]时, 其模糊系统具有如下形式:

$$F(x) = \frac{\sum_{l=1}^M (\mu_{B'}^l(y))^{\alpha} y^l}{\sum_{l=1}^M (\mu_{B'}^l(y))^{\alpha}}. \quad (1)$$

其中: M 为该模糊系统的模糊规则数; y^l 为 $\mu_{B'}^l(y)$ 取最大值时所对应的点; $(\mu_{B'}^l(y))^{\alpha}$ 表示第 l 个模糊规则的合成算子, 且

$$\mu_{B'}^l(y) = \sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^l(x_i) \mu_{B'}^l(y)), \alpha \in [0, +\infty].$$

当取 $\alpha = 1$ 时, 表示上式采用面积平均解模糊器, 取 $\alpha = +\infty$ 时, 则采用了最大值平均解模糊器 (MOM).

引理 1 (Weierstrass 第一定理)^[21] 设 $f(x)$ 是在区间 $[a, b]$ 上定义的连续函数, 则任意给定 $\varepsilon > 0$, 都存在多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

如下定理将给出一类 Mamdani 型模糊系统是否具有通用逼近性的结论.

定理 1 给定一个在定义域 D 上的任意连续函数 $f(x)$ 和任意的逼近精度 $\varepsilon > 0$ 时, 若模糊系统 $F(x)$ 的推理机为乘积推理机, 且解模糊器为最大值平均解模糊器, 则 Mamdani 模糊系统 $F(x)$ 具有通用逼近性的充要条件:

在模糊器和规则前件的隶属函数中, 所有满足 $\mu_{A_i}^{k_i}(x_i^*) = \max_{j_i} (\mu_{A_i}^{j_i}(x_i^*))$ 的隶属函数的中心点 $C_i^{k_i}$ 具有当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 的性质和规则后件的隶属函数具有如下性质, 即当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有使得其对应的规则后件隶

属函数的隶属度 $\mu_B^l(y) \geq \min(\mu_A(x)) (\mu_A(x) = \bigcup_{l=1}^M \mu_{A_l}(x))$ 的值的取值范围长度也趋近于零,

也就是说, 当符合上述条件的 Mamdani 模糊系统 $F(x)$ 满足下式:

$$\max_{x \in U} |F(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

其中 $\mu_A^l(x) = T(\mu_{A_1}^l(x_1), \mu_{A_2}^l(x_2), \dots, \mu_{A_n}^l(x_n))$.

证明 对于式(1)对应的模糊系统的模糊规则后件有两种选择方式.

1) 规则后件为单点规则后件, 即

$$\mu_B^l(y) = \begin{cases} 1, & y = y^l; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

在这种情形下, 由于 $\mu_{A_l}(x_i) > \xi$ (其中 ξ 为一足够小的正常数), 所以一定存在 $\tau = \tau(\xi) > 0$, 使得 $\mu_{B^l}^l(y^l) \geq \tau, l = 1, 2, \dots, M$.

在式(1)中, $y^l (l = 1, 2, \dots, M)$ 为常数. 不妨设 $y_{\max} = \max_{l=1, 2, \dots, M} (y^l), y_{\min} = \min_{l=1, 2, \dots, M} (y^l)$ 和 $y_a = \sum_{l=1}^M y^l / M$, 则 $y^l (l = 1, 2, \dots, M)$ 中一定存在 N 个常值小于或等于 $y_a, M - N$ 个大于 y_a . 不失一般性, 设前 N 个常值小于或等于 y_a .

采用最大值平均解模糊器(MOM), 即 $\alpha = +\infty$ 时, 有

$$F(x) = \frac{\sum_{l=1}^M (\mu_{B^l}^l(y))^{+\infty} y^l}{\sum_{l=1}^M (\mu_{B^l}^l(y))^{+\infty}}.$$

① 首先证明充分性. 当对于 $x_i^* \in [C_i^j, C_i^{j+1}]$ 时, 规则前件的隶属函数中所有满足 $\mu_{A_{k_i}}(x_i^*) = \max_{j_i}(\mu_{A_{j_i}}(x_i^*))$ 的隶属函数的中心点 $C_i^{k_i}$ 具有当 $|C_i^{j+1} - C_i^j| \rightarrow 0$, 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^j| \rightarrow 0$ 的特性时, 由

$$|F(x) - f(x)| = \left| \frac{\sum_{l=1}^M (\mu_{B^l}^l(y))^{+\infty} (y^l - f(x))}{\sum_{l=1}^M (\mu_{B^l}^l(y))^{+\infty}} \right|$$

可推出

$$|F(x) - f(x)| \leq \left| \frac{\sum_{l=1}^M (\mu_{B^l}^l(y))^{+\infty} \left(|C_i^{k_i} - x_i^*| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right)}{\sum_{l=1}^M (\mu_{B^l}^l(y))^{+\infty}} \right|. \quad (3)$$

当对应的输入点 x^* 的各个分量只有一个输入隶属函数值为最大, 则式(3)可化为

$$|F(x) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*|. \quad (4)$$

若对于该点有 a 个输入隶属函数值相等且为该点处最大的隶属值, 则式(3)也可化为

$$|F(x) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*|. \quad (5)$$

由于对于式(4)和(5)中所有的 $C_i^{k_i}$ 均有当 $|C_i^{j+1} - C_i^j| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^j| \rightarrow 0$ 的特性, 故当 $|C_i^{j+1} - C_i^j| \rightarrow 0$ 也有 $\max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*| \rightarrow 0$ 成立. 上式中对于给定的被逼近函数, $\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$ 为常值; $\max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*|$ 随着模糊规则数的增加而减小, 故在这种情形下, 当模糊规则足够大时有

$$|F(x) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*| < \varepsilon.$$

即模糊系统具备通用逼近性, 即式(2)成立.

② 必要性证明. 采用反证法, 假设系统不满足上述条件, 而该模糊系统仍具有通用逼近性.

当对于 $x_i^* \in [C_i^j, C_i^{j+1}]$ 时, 规则前件的隶属函数中所有满足 $\mu_{A_{k_i}}(x_i^*) = \max_{j_i}(\mu_{A_{j_i}}(x_i^*))$ 的隶属函数的中心点 $C_i^{k_i}$ 不具有当 $|C_i^{j+1} - C_i^j| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^j| \rightarrow 0$ 时的情形. 假设这种情形下模糊系统具有通用逼近性, 即随着模糊规则数的增加该模糊系统对被逼近函数的逼近误差越小. 则有对于一给定点 $x_i^* \in [C_i^j, C_i^{j+1}]$ 也一定满足逼近性. 设对于该点有 a 个输入隶属函数值相等且为该点处最大的隶属值, 则

$$|F(x^*) - f(x^*)| = \left| \frac{\sum_{l=1}^a (y_l - f(x^*))}{a} \right|.$$

可得到

$$|F(x^*) - f(x^*)| \leq \left| \frac{\sum_{k_i=1}^a \left(|C_i^{k_i} - x_i^*| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right)}{a} \right| \leq \varepsilon,$$

即对于给定的 ε , 在模糊规则数足够大时, 由隶属函数满足的条件可知, 一定存在

$$(N-1) \cdot \max |C_i^{j+1} - C_i^j| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon \leq N \cdot$$

$$\max |C_i^{j+1} - C_i^j| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty}.$$

将上两式比较可得

$$\left| \frac{\sum_{k_i=1}^a (|C_i^{k_i} - x_i^*|)}{a} \right| < N \cdot \max |C_i^{j+1} - C_i^j|.$$

所以有

$$\max |C_i^{k_i+1} - x_i^*| \leq a \cdot N \cdot |C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}|.$$

这与该情形不符,显然假设不成立. 故这种情形下模糊系统不具有通用逼近性.

证毕.

2) 规则后件为模糊数,即

$$\mu_B^l(y) \begin{cases} = 1, & y = y^l; \\ > 0, & y \in (y^l - y_{LO}^l, y^l + y_{RO}^l). \end{cases}$$

其中 y^l 为模糊数 $\mu_B^l(y)$ 的中心点,且 $\mu_B^l(y)$ 是凸函数.

在这种情形下,由于 $\mu_{A_i}(x_i) > \xi$ (ξ 为一正常数),所以采用模糊推理后,一定存在 $\tau = \tau(\xi) >$

$$|F(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| = \left| \frac{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l) \frac{y_{RM}^l + y_{LM}^l}{2}}{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l)} - f(\mathbf{x}) \right| = \left| \frac{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l) \left(\frac{y_{RM}^l + y_{LM}^l}{2} - y^l + y^l - f(\mathbf{x}) \right)}{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l)} \right|,$$

可得

$$|F(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \left| \frac{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l) \left(|C_i^{k_i} - x_i^*| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left| \frac{y_{RM}^l + y_{LM}^l}{2} - y^l \right| \right)}{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l)} \right|. \quad (6)$$

其中 $(\mu_B^l(y))^{\pm\infty} = [y_{RM}^l, y_{LM}^l]$.

① 首先证明充分性. 当对于 $x_i^* \in [C_i^{j_i}, C_i^{j_i}]$ 时, 在规则前件的隶属函数中, 所有满足 $\mu_{A_{k_i}}(x_i^*) = \max_{j_i}(\mu_{A_{j_i}}(x_i^*))$ 的隶属函数的中心点 $C_i^{k_i}$, 具有当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 的特性和当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有使得其对应的规则后件隶属函数的隶属度 $\mu_B^l(y) \geq \min(\mu_A(\mathbf{x}))(\mu_A(\mathbf{x}) = \bigcup_{l=1}^M \mu_A^l(\mathbf{x}))$ 的值的取值范围长度也趋近于零. 设对于该点有 a 个输入隶属函数值相等且为该点处最大的隶属值, 由于推理机采用的是局域推理机, 当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有使得其对应的规则后件隶属函数的隶属度 $\mu_B^l(y) \geq \min(\mu_A(\mathbf{x}))(\mu_A(\mathbf{x}) = \bigcup_{l=1}^M \mu_A^l(\mathbf{x}))$ 的值的取值范围长度也趋近于零, 则必存在一足够小的正数 $\varepsilon > \xi > 0$ 有 $(y_{RM}^l + y_{LM}^l)/2 - y^l < \xi$, 从而有

$$|F(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*| + \xi.$$

由于对于上式中所有的 $C_i^{k_i}$ 均有当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 的特性, 故当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 也有 $\max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*| \rightarrow 0$ 成立. 上式中对于

给定的被逼近函数, $\sum_{i=1}^n \|\partial f / \partial x_i\|_{\infty}$ 为常值;

0, 使得在区间 $[y^l - y_{LO}^l, y^l + y_{RO}^l]$ 中必有 $\mu_B^l(y) \geq \tau, l = 1, 2, \dots, M$, y_{LO}^l, y_{RO}^l 均为正的常数, 且必有 $\mu_B^l(y)$ 在区间 $[y^l - y_{LM}^l, y^l + y_{RM}^l]$ 中为最大.

在式(1)中, $y^l (l = 1, 2, \dots, M)$ 为常数. 不妨设 $y_{\max} = \max_{l=1,2,\dots,M} (y^l), y_{\min} = \min_{l=1,2,\dots,M} (y^l)$ 和 $y_a = \sum_{l=1}^M y^l / M$, 则 $y^l (l = 1, 2, \dots, M)$ 中一定存在 N 个常值小于或等于 $y_a, M - N$ 个大于 y_a . 不失一般性, 设前 N 个常值小于或等于 N .

采用最大值平均解模糊器, 即 $\alpha = +\infty$ 时, 在这种情形下, 有

$\max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*|$ 随着模糊规则数的增加而减小, 故在这种情形下, 当模糊规则数足够大时有

$$|F(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*| + \xi < \varepsilon,$$

即模糊系统具备通用逼近性, 即有式(2)成立.

② 必要性证明. 采用反证法, 假设不满足条件时, 该模糊系统仍具有通用逼近性.

这里有两种情形:

a) 当对于 $x_i^* \in [C_i^{j_i}, C_i^{j_i}]$ 时, 规则前件的隶属函数中所有满足 $\mu_{A_{k_i}}(x_i^*) = \max_{j_i}(\mu_{A_{j_i}}(x_i^*))$ 的隶属函数的中心点 $C_i^{k_i}$ 不具有当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 时的情形, 即总存在 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \geq K > 0$ (K 为一正常值). 假设这种情形下模糊系统具有通用逼近性, 即随着模糊规则数的增加该模糊系统对被逼近函数的逼近误差越小. 则有对于一给定点 $x_i^* \in [C_i^{j_i}, C_i^{j_i}]$ 一定也满足逼近性. 设对于该点有 a 个输入隶属函数值相等且为该点处最大的隶属值, 则由式(6)有

$$|F(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}^*)| \leq \left| \frac{\sum_{k_i=1}^a \left(|C_i^{k_i} - x_i^*| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \xi \right)}{a} \right| \leq \varepsilon,$$

即对于给定的 ε , 在模糊规则数足够大时, 一定存在

$$(N-1) \cdot \max |C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon - \xi \leq N \cdot \max |C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty}.$$

将上两式比较可得

$$\left| \frac{\sum_{k_i=1}^a (|C_i^{k_i} - x_i^*|)}{a} \right| < N \cdot \max |C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}|,$$

即有 $\max |C_i^{k_i+1} - x_i^*| \leq a \cdot N \cdot |C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}|$.

$$\left| \frac{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l) \left(|C_i^{k_i} - x_i^*| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} - \left| \frac{y_{RM}^l + y_{LM}^l}{2} - y^l \right| \right)}{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l)} \right| \leq |F(x) - f(x)| \leq \left| \frac{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l) \left(|C_i^{k_i} - x_i^*| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left| \frac{y_{RM}^l + y_{LM}^l}{2} - y^l \right| \right)}{\sum_{l=1}^M (y_{RM}^l - y_{LM}^l)} \right|. \quad (7)$$

对于左边界点处有

$$\left| \frac{y_{RM}^l + y_{LM}^l}{2} - y^l \right| = \left| \frac{y_{LM}^l - y_{RM}^l}{2} \right| \geq \frac{K}{2}. \quad (8)$$

且对于所有的 $C_i^{k_i}$ 均有当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 的特性,故当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 也有 $\max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*| \rightarrow 0$ 成立. 上式中对于给定的被逼近函数, $\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$ 为常值; $\max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*|$

随着模糊规则数的增加而减小,故在这种情形下,当模糊规则足够大时有

$$\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \max_{k_i} |C_i^{k_i} - x_i^*| \rightarrow 0. \quad (9)$$

由式(7)~(9)可得

$$|F(x) - f(x)| \rightarrow \frac{K}{2}.$$

故在此情形下,假设不成立.

综上两种情形,不满足条件时,该 Mamdani 模糊系统不具有通用逼近性.

证毕.

2 Mamdani 模糊系统通用逼近性判据分析

满足上述判据的 Mamdani 模糊系统在规则数足够多的情形下可以以任意精度逼近紧致集上的任意连续函数. 若是不满足上述判据的话,无论规则数有多少总存在紧致集上的某一连续函数

这与该情形不符,假设不成立.

b) 规则前件的隶属函数中所有满足 $\mu_{A_{k_i}}(x_i^*) = \max_{j_i} (\mu_{A_{j_i}}(x_i^*))$ 的隶属函数的中心点 $C_i^{k_i}$, 具有当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 的性质和规则后件的隶属函数具有如下性质, 即当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有使得其对应的规则后件隶属函数的隶属度 $\mu_B^l(y) = 1$ 的值的取值范围长度大于一定正常值 K 时,有

使得该模糊系统不能以任意精度逼近. 下面构造不同的 Mamdani 模糊系统来逼近两个函数比较以确认上述判据的正确性. 为了反映普遍性. 在选取被逼近函数时选择指数函数和三角函数. 因为指数函数的傅里叶展开式为无穷阶多项式,而多项式可以以任意精度逼近任意紧致集上的连续函数;再就是三角函数为周期函数也具有一定的代表性. 下面针对本文所给判据作举例分析.

示例 现有在区间 $[0, 1]$ 上的两个函数 $g_1(x) = e^x$ 和 $g_2(x) = \sin(2\pi \cdot x)$, 分别构造满足解模糊器为最大值平均解模糊器时的判据的 Mamdani 模糊系统和不满足该判据的 Mamdani 模糊系统来逼近这两个函数.

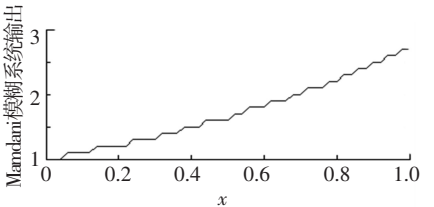
由于条件限制推理机必须选取局域推理机. 不失一般性,选择乘积推理机. 隶属函数选择高斯型隶属函数 $\exp(-((x-x')/\sigma^l)^2)$.

首先构造满足判据的 Mamdani 模糊系统. 由该判据可知,当隶属函数是局域隶属函数时,满足判据,当隶属函数为全域隶属函数时,只要其满足一定的条件,依然满足判据. 如当采用高斯型隶属函数时,其参数 $\sigma^l (l=1, 2, \dots, n_0)$ 都为同一值.

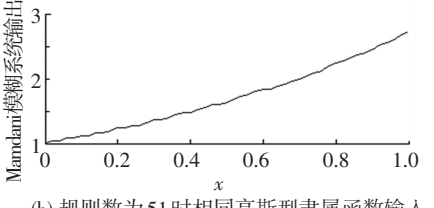
分别给出规则数为 21 和 51 的满足上述判据的 Mamdani 模糊系统来逼近函数 $g_1(x) = e^x$, $\sigma^l = 0.8 (l=1, 2, \dots, n_0)$. Mamdani 模糊系统输出和逼近误差分别如图 1~2 所示.

再给出规则数分别为 21 和 51 的满足该判据的 Mamdani 模糊系统来逼近函数 $g_2(x) = \sin(2\pi \cdot x)$, $\sigma^l = 0.8 (l=1, 2, \dots, n_0)$. 系统输出和逼近误差

分别如图 3 ~ 4 所示.

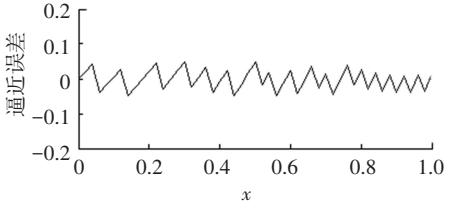


(a) 规则数为 21 时相同高斯型隶属函数输入

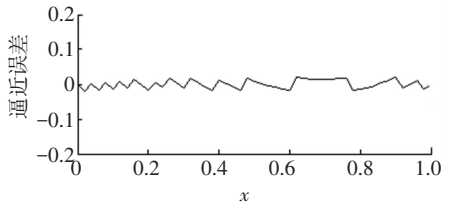


(b) 规则数为 51 时相同高斯型隶属函数输入

图 1 满足判据的 Mamdani 模糊系统对 $g_1(x) = e^x$ 的输出

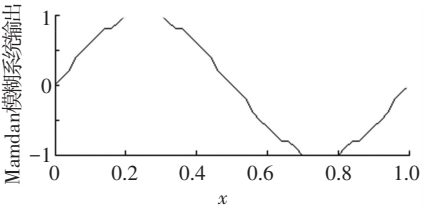


(a) 规则数为 21 时相同高斯型隶属函数输入

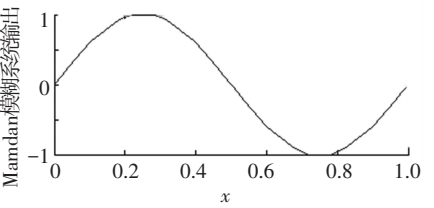


(b) 规则数为 51 时相同高斯型隶属函数输入

图 2 满足判据的 Mamdani 模糊系统对 $g_1(x) = e^x$ 的逼近误差



(a) 规则数为 21 时相同高斯型隶属函数输入

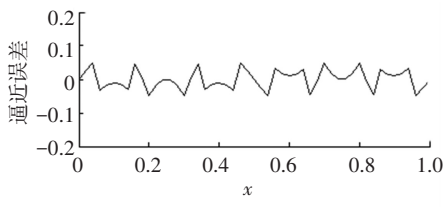


(b) 规则数为 51 时相同高斯型隶属函数输入

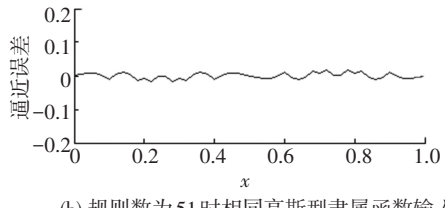
图 3 满足判据的 Mamdani 模糊系统对 $g_2(x) = \sin(2\pi \cdot x)$ 的输出

下面构造不满足该判据的 Mamdani 模糊系统. 选取第一个规则的规则前件的隶属函数为定值 $\sigma^1 = 0.8$, 其他的分别为: 当规则数为 21 时 $\sigma^l = 0.025 (l = 2, 3, \dots, n_0)$; 当规则数为 51 时 $\sigma^l = 0.01 (l = 2, 3, \dots, n_0)$. 首先给出其对 $g_1(x) = e^x$ 的

仿真图, 系统输出如图 5 所示.

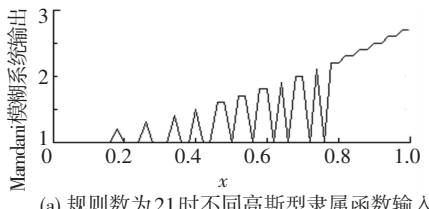


(a) 规则数为 21 时相同高斯型隶属函数输入

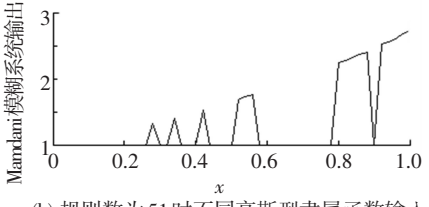


(b) 规则数为 51 时相同高斯型隶属函数输入

图 4 满足判据的 Mamdani 模糊系统对 $g_2(x) = \sin(2\pi \cdot x)$ 的逼近误差

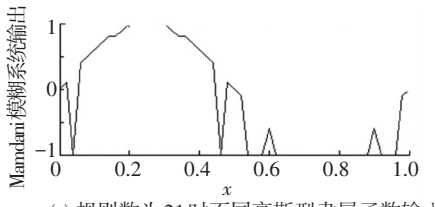


(a) 规则数为 21 时不同高斯型隶属函数输入

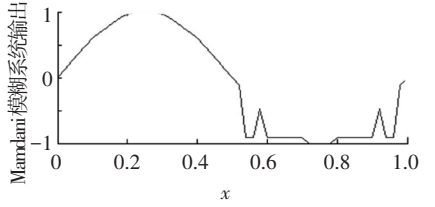


(b) 规则数为 51 时不同高斯型隶属函数输入

图 5 不满足判据的 Mamdani 模糊系统对 $g_1(x) = e^x$ 的输出
再给出其对 $g_2(x) = \sin(2\pi \cdot x)$ 的仿真图, 系统输出如图 6 所示.



(a) 规则数为 21 时不同高斯型隶属函数输入



(b) 规则数为 51 时不同高斯型隶属函数输入

图 6 不满足判据的 Mamdani 模糊系统对 $g_2(x) = \sin(2\pi \cdot x)$ 的输出

由此可得, 在推理机为局域推理机的情形下, 满足该判据的 Mamdani 模糊系统具有通用逼近性. 不满足该判据且采用最大值平均解模糊器的 Mamdani 模糊系统不具有通用逼近性.

3 结 语

本文率先给出了一类 Mamdani 模糊系统具有通用逼近性的充要条件. 由上述定理证明结果可知, 当解模糊器为最大值平均解模糊器时, Mamdani 模糊系统的具有通用逼近性的充要条件是: 模糊器和规则前件的隶属函数中所有满足 $\mu_{A_{k_i}}(x_i^*) = \max_{j_i}(\mu_{A_{j_i}}(x_i^*))$ 的隶属函数的中心点 $C_i^{k_i}$, 具有当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有 $|C_i^{k_i} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 的性质和规则后件的隶属函数具有如下性质, 即当 $|C_i^{j_i+1} - C_i^{j_i}| \rightarrow 0$ 一定有使得其对应的规则后件隶属函数的隶属度 $\mu_B^l(y) \geq \min(\mu_A(x))(\mu_A(x) = \bigcup_{l=1}^M \mu_A^l(x))$ 的值的取值范围长度也趋近于零.

参考文献

- [1] KOSKO B. Fuzzy systems as universal approximators [C]//1992 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Diego: [s.n.], 1992: 1153-1162.
- [2] WANG Lixin. Fuzzy systems are universal approximators [C]//1992 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Diego: [s.n.], 1992: 1163-1170.
- [3] BOVA S, CODARA P, MACCARI D, et al. A logical analysis of Mamdani-type fuzzy inference, I theoretical bases [C]//Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on. Piscataway: IEEE, 2010: 1-8.
- [4] WANG D, ZENG X J, KEANE J A. A simplified structure evolving method for Mamdani fuzzy system identification and its application to high-dimensional problems[J]. Information Sciences, 2013, 220: 110-123.
- [5] DICKERSON J A, KOSKO B. Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 1996, 26(4): 542-560.
- [6] BUCKLEY J J. Universal fuzzy controllers [J]. Automatica, 1992, 28(6): 1245-1248.
- [7] ZENG X J, SINGH M G. Approximation theory of fuzzy systems-MIMO case [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1995, 3(2): 219-235.
- [8] ZENG X J, SINGH M G. Approximation properties of fuzzy systems generated by the min inference[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1996, 26(1): 187-193.
- [9] KÓCZY L T, ZORAT A. Fuzzy systems and approximation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 85(2): 203-222.
- [10] CAO S G, REES N W, FENG G. Universal fuzzy controllers for a class of nonlinear systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(1): 117-123.
- [11] CAO S G, REES N W, FENG G. Mamdani-type fuzzy controllers are universal fuzzy controllers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 123(3): 359-367.
- [12] CUONG B C, LONG H V. An approach to the functions approximation problems by Mamdani fuzzy system [C]//Control, Automation, Robotics and Vision, 2008. ICARCV 2008. 10th International Conference on. Piscataway: IEEE, 2008: 850-855.
- [13] YING H. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximators [J]. Automatica, 1994, 30(3): 521-525.
- [14] YING H. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1998, 28(4): 515-520.
- [15] ZENG K, ZHANG N Y, XU W L. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 773-780.
- [16] 黄卫华, 方康玲, 章政, 等. 具有广义线性隶属函数的典型模糊系统的通用逼近性[J]. 计算机应用研究, 2010, 27(4): 1263-1265, 1269.
- [17] YING H, DING Y, LI S, et al. Comparison of necessary conditions for typical Takagi-Sugeno and Mamdani fuzzy systems as universal approximators[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1999, 29(5): 508-514.
- [18] DING Y, YING H, SHAO S. Necessary conditions on minimal system configuration for general MISO Mamdani fuzzy systems as universal approximators[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 2000, 30(6): 857-864.
- [19] 孙富春, 杨晋, 刘华平. SISO Mamdani 模糊系统作为函数逼近器的必要条件[J]. 智能系统学报, 2009, 4(4): 288-294.
- [20] FILEV D P, YAGER R R. A generalized defuzzification method via BAD distributions[J]. International Journal of Intelligent Systems, 1991, 6(7): 687-697.
- [21] DAVIS P J. Interpolation and Approximation [M]. New York: Blaisdell Pub, 1963.

(编辑 张 宏)