

离散广义分段仿射系统弹性 H_∞ 滤波器的设计

周振华¹, 王 茂¹, 王学翰²

(1. 哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 150001 哈尔滨;

2. 大庆油田电力集团 燃机电厂, 230604 黑龙江 大庆)

摘 要: 为消除未知情况下外部干扰和测量噪声对控制系统性能的不利影响, 以一类参数不确定性体现为范数有界形式的离散广义分段仿射系统为模型, 研究具有 H_∞ 性能指标渐近稳定弹性滤波器的设计问题. 通过采用广义分段仿射 Lyapunov 函数、投影定理以及几个基本引理, 提出了对于由所设计弹性滤波器构成的滤波误差动态系统满足鲁棒 H_∞ 性能指标的反馈控制器设计方法. 通过求解一组包含参变量的 LMIs, 可以得到保证广义分段仿射系统具有 H_∞ 性能的反馈控制器增益和渐近稳定弹性滤波器的待定系统矩阵, 仿真结果证明了所提设计方法的有效性.

关键词: 广义分段仿射系统; 弹性滤波器; 分段 Lyapunov 函数; LMIs

中图分类号: TH13

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2014)01-0008-09

Design of resilient H_∞ filter for discrete-time piecewise-affine singular systems

ZHOU Zhenhua¹, WANG Mao¹, WANG Xuehan²

(1. Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China;

2. Gas turbine power plant, Daqing oilfield electric, 230604 Daqing, Heilongjiang, China)

Abstract: This paper investigates the robust admissibility analysis and resilient filter controller synthesis for a class of discrete-time piecewise affine singular systems with asymptotic stability which possesses H_∞ performance is considered in this paper, in order to eliminate the adverse effects of external disturbances and measurement noise of control system performance. By using the piecewise-affine singular Lyapunov functions combined with Projection lemma and some basic lemmas, an approach of designing robust H_∞ feedback controller is given, the conclusions ensure resilient filtering error dynamic system possessing H_∞ performance. It is shown that the controller gains can be obtained by solving a family of LMIs parameterized by scalar variables. The feedback controller gain and resilient filter system matrix can ensure the stability of systems and guarantee the H_∞ performance of the piecewise-affine singular systems. Finally, the practicability of the proposed methodologies is confirmed via some simulation examples.

Keywords: piecewise-affine singular systems; resilient filter; piecewise Lyapunov function; LMIs

目前, 具有范数有界时变参数不确定性广义分段仿射系统的鲁棒稳定性问题越来越受到人们的关注^[1-3], 但关于系统“软测量技术”的研究鲜有报道. 这样的系统不但要求具有鲁棒稳定性, 同

时也需要利用系统的输入输出信息来重构系统的状态向量^[4], 这种处理方法的目的在于寻求一个渐近稳定滤波器, 使得由此构成的滤波误差动态系统渐近稳定, 而且要求系统满足一定的 H_∞ 性能指标^[5-7].

随着广义系统鲁棒控制问题研究的深入, 对其进行滤波器设计的相关研究也相继取得了一些成果^[8-10], 所做研究大多局限于连续系统, 采用的方法主要是基于分段 Lyapunov 函数法以及一些

收稿日期: 2013-11-29.

基金项目: 国家自然科学基金(61004038).

作者简介: 周振华(1983—), 男, 博士研究生;

王 茂(1965—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 周振华, zhouzhenhua99@gmail.com.

相应线性矩阵不等式的处理方法^[11-13]. 然而, 关于离散广义分段仿射系统 H_∞ 滤波器设计方法的研究却未见报道. 王茂等^[14] 研究了一类具有参数不确定离散广义分段仿射系统的静态输出反馈控制问题, 将结果转换为包含参变量的 LMIs 约束条件, 得到欲寻求使闭环系统容许的反馈控制器增益. 本文基于分段 Lyapunov 函数, 投影定理以及几个基本引理, 在前人的基础上引入弹性 H_∞ 滤波器设计方法对离散广义分段仿射系统设计一个鲁棒 H_∞ 滤波误差动态系统.

本文特点在于将一类参数不确定性体现为范数有界形式的离散广义分段仿射系统的弹性 H_∞ 滤波器设计方法进行考虑, 以一些线性矩阵处理方法的基本引理为基础, 同时采用投影定理对系统的保守性进一步降低, 使得由引入此滤波器而构成的滤波误差动态系统满足鲁棒 H_∞ 性能指标.

1 问题描述及基础知识

本文考虑的是一类参数不确定性体现为范数有界形式的时变参数广义分段仿射系统:

$$\begin{cases} \mathbf{E}x(k+1) = (\mathbf{A}_i + \Delta\mathbf{A}_i)x(k) + \mathbf{B}_i u(k) + \\ \quad \mathbf{D}_{i1}w(k) + \mathbf{E}(b_i + \Delta b_i), \\ y(k) = \mathbf{C}_i x(k) + \mathbf{D}_{i2}w(k), y(k) \in \mathcal{R}_i, i \in I, \\ z(k) = \mathbf{L}_i x(k). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 为系统状态变量; $u(k) \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为控制输入向量; $y(k) \in \mathbf{R}^{n_y}$ 为系统输出向量; $z(k) \in \mathbf{R}^{n_z}$ 为可控输出向量; $w(k) \in \mathbf{R}^{n_w}$ 且 $w(k) \in l_2[0, \infty)$ 为扰动输入; $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_{i1}, \mathbf{D}_{i2}, \mathbf{L}_i, b_i, \mathbf{E}$ 为第 i 个子系统的已知定常系数矩阵; $\mathbf{E}b_i$ 是偏置项; 索引集合是 $I = \{1, 2, \dots, N\}$; $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ 是广义矩阵, 且 $\text{rank}(\mathbf{E}) = r \leq n_x$; $\Delta\mathbf{A}_i$ 和 Δb_i 代表系统的不确定项, 且满足如下形式:

$$[\Delta\mathbf{A}_i \mathbf{E} \Delta b_i] = \mathbf{W}_{i1} \Delta_i(t) [\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{i2}], i \in I. \quad (2)$$

式中: $\mathbf{W}_{i1}, \mathbf{E}_{i1}$ 和 $\mathbf{E}_{i2}$ 是预先指定的定常实数矩阵, $\Delta_i(t): Z^+ \rightarrow \mathbf{R}^{s_1 \times s_2}$ 是一个未知的实值时变矩阵函数, 并且包含 Lebesgue 可测量元素, 具有如下形式:

$$\Delta_i^T(t) \Delta_i(t) \leq \mathbf{I}_{s_2}. \quad (3)$$

如果式(2)和式(3)成立, 则称系统具有容许的参数不确定性.

在子系统中, 将多面体区域 $\mathcal{R}_i$ 过渡到区域 $\mathcal{R}_j$ 的集合用 Ω 表示, 可以描述为

$$\Omega = \{(i, j) \mid y(k) \in \mathcal{R}_i, y(k+1) \in \mathcal{R}_j, i, j \in I\}.$$

本文假设多面体区域 $\mathcal{R}_i, i \in I$ 具有形式:

$$\mathcal{R}_i = \{y \mid \alpha_i \leq y \leq \beta_i, y = \mathbf{C}_i x\}, i \in I.$$

该多面体区域可以进一步描述为一个椭圆集合, 其中 $\mathbf{F}_i = 2\mathbf{C}_i/(\beta_i - \alpha_i), \mathbf{f}_i = -(\beta_i + \alpha_i)/(\beta_i - \alpha_i), \mathcal{E}_i = \{x \mid \|\mathbf{F}_i x + \mathbf{f}_i\| \leq 1\}, i \in I.$

对于每个椭圆区域, 可以得到:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i & \mathbf{F}_i^T \mathbf{f}_i \\ * & \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0, i \in I. \quad (4)$$

进一步将状态空间分为两类区域 $I = I_0 \cup I_1$, I_0 代表包含原点的 $\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i - 1 \leq 0$ 索引集合区域, I_1 则代表其余的索引集合区域.

定义 1^[15] 考虑参数不确定体现为范数有界形式的离散广义分段仿射系统(1), 其中 $u(k) = 0$.

i. 如果存在 $z \in \mathbf{C}$ 使得 $\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_i) \neq 0$, 则称广义系统(1) 是正则的, $i \in I$;

ii. 如果 $\deg(\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_i)) = \text{rank}(\mathbf{E}), i \in I$ 则称系统(1) 是因果广义系统;

iii. 用 $\lambda(\mathbf{E}, \mathbf{A}_i)$ 表示离散广义系统(1) 的所有特征根, 如果 $\lambda(\mathbf{E}, \mathbf{A}_i) \subset D_{\text{im}}(0, 1)$, 则称(1) 是稳定的广义系统;

iv. 如果称广义系统(1) 是容许的, 则系统(1) 必定正则、因果, 而且是稳定的;

v. 用 $\mathbf{v}^1$ 表示矩阵束 $(\mathbf{E}, \mathbf{A}_i)$ 的一阶向量, 且非零向量 $\mathbf{v}^1$ 满足 $\mathbf{E}\mathbf{v}^1 = 0$, 对于满足 $\mathbf{E}\mathbf{v}^k = \mathbf{A}_i \mathbf{v}^{k-1}$ 的非零特征向量 $\mathbf{v}^k (k \geq 2)$, 则称为矩阵束 $(\mathbf{E}, \mathbf{A}_i)$ 的 k 阶特征向量.

引理 1 对于适当维数实矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \mathbf{S}, \mathbf{N}$ 和 $\Delta(t)$, 若满足 $\Delta^T(t) \Delta(t) \leq \mathbf{I}$, 则当且仅当存在某个标量 $\varepsilon > 0$ 时: $\mathbf{M} + \mathbf{S} \Delta(t) \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \Delta^T(t) \mathbf{S}^T < 0$ 等价于 $\mathbf{M} + \varepsilon \mathbf{S} \mathbf{S}^T + \varepsilon^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} < 0$.

引理 2^[16] (投影定理): 给定矩阵 $\mathbf{h} = \mathbf{h}^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{k \times n}$ 和 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 则关于变量 Δ 的矩阵不等式 $\mathbf{h} + \mathbf{u}^T \Delta^T \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{u} < 0$ 是 LMI 可解的, 当且仅当:

1) 若 $\mathbf{v}_\perp = 0, \mathbf{u}_\perp \neq 0$, 则 $\mathbf{u}_\perp^T \mathbf{h} \mathbf{u}_\perp < 0$;

2) 若 $\mathbf{u}_\perp = 0, \mathbf{v}_\perp \neq 0$, 则 $\mathbf{v}_\perp^T \mathbf{h} \mathbf{v}_\perp < 0$;

3) 若 $\mathbf{u}_\perp \neq 0, \mathbf{v}_\perp \neq 0$, 则 $\mathbf{u}_\perp^T \mathbf{h} \mathbf{u}_\perp < 0, \mathbf{v}_\perp^T \mathbf{h} \mathbf{v}_\perp < 0$ 同时成立, $\mathbf{u}_\perp, \mathbf{v}_\perp$ 代表 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的右正交核空间.

引理 3^[17] 若 $\psi_0(\xi), \psi_1(\xi), \dots, \psi_p(\xi)$ 为 $\xi \in \mathbf{R}^n$ 的二次仿射函数, 其中 $\psi_i(\xi) = \xi^T \mathbf{Q}_i \xi, i = 0, 1, \dots, p$, 且 $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T$. 对于一组正数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \geq 0$, 若对任意 $\xi \in \mathbf{R}^n$, 式 $\psi_0(\xi) - \sum_{i=1}^p \mu_i \psi_i(\xi) \geq 0$ 成立, 则对于满足 $\psi_1(\xi) \geq 0, \psi_2(\xi) \geq 0, \dots, \psi_p(\xi) \geq 0$ 的所有 $\xi \in \mathbf{R}^n$, 有 $\psi_0(\xi) \geq 0$.

本文针对给定常数 $\gamma > 0$, 取 $z(k)$ 为待估计信

号向量,设计一个渐近稳定的弹性 H_∞ 滤波器:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_f \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_f \mathbf{y}(k), \\ \hat{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{C}_f \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}_f \mathbf{y}(k), \mathbf{y}(k) \in \mathcal{R}_i, i \in I, \\ \mathbf{u}(k) = (\mathbf{K}_i + \Delta \mathbf{K}_i) \hat{\mathbf{x}}(k). \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{A}_f, \mathbf{B}_f, \mathbf{C}_f, \mathbf{D}_f$ 为弹性滤波器的待定系数矩阵. 渐近稳定弹性 H_∞ 滤波器反馈环节不确定性 $\mathbf{B}_i \Delta \mathbf{K}_i = \mathbf{W}_{i1} \Delta_i(t) \mathbf{E}_{i3}, i \in I$.

定义 $\bar{\mathbf{x}}^T(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \hat{\mathbf{x}}^T(k)]$, 则滤波误差动态系统方程如下:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{w}(k) + \bar{\mathbf{b}}_i, \\ \bar{\mathbf{z}}(k) = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{w}(k). \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{K}_i$ 为反馈控制增益,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= [\mathbf{L}_i - \mathbf{D}_f \mathbf{C}_i \quad -\mathbf{C}_f], \\ \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i + \Delta \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i + \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{K}_i \\ \mathbf{B}_f \mathbf{C}_i & \mathbf{A}_f \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{i1} \\ \mathbf{B}_f \mathbf{D}_{i2} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{D}} &= -\mathbf{D}_f \mathbf{D}_{i2}, \quad \bar{\mathbf{b}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{b}_i + \Delta \mathbf{b}_i) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_f \mathbf{D}_{i2} & \xi & -\mathbf{C}_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{D}_{i1} & \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i & \mathbf{E} \mathbf{b}_i & \mathbf{W}_{i1} \\ * & * & \mathbf{H}_3 & \mathbf{B}_f \mathbf{D}_{i2} & \mathbf{B}_f \mathbf{C}_i & \mathbf{A}_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & \bar{\omega} & \nu & \theta & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \zeta & \vartheta & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & \tau & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{ij} \mathbf{I}_{s1} \end{bmatrix} < 0, i \in I, (i, j) \in \Omega$$

成立,则存在 H_∞ 渐近稳定弹性滤波器(5),使得滤波误差动态系统(6)是容许的,且扰动 $\mathbf{w}$ 到估计误差传递函数的 H_∞ 范数小于给定的常数 γ .

式中: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{-1}$, $\tau = \lambda_{ij}(\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i - 1) + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_{i2}^T \mathbf{E}_{i2}$, $\bar{\omega} = \mathbf{J}_1 + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_{i1}^T \mathbf{E}_{i1}$, $\theta = \mathbf{I}_1 + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_{i1}^T \mathbf{E}_{i2}$, $\nu = \mathbf{J}_2 + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_{i2}^T \mathbf{E}_{i3}$, $\zeta = \mathbf{J}_3 + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_{i3}^T \mathbf{E}_{i3}$, $\vartheta = \mathbf{I}_2 + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_{i3}^T \mathbf{E}_{i2}$, $\xi = \mathbf{L}_i - \mathbf{D}_f \mathbf{C}_i$, $-\mathbf{P}_j^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ * & \mathbf{H}_3 \end{bmatrix}$, $\lambda_{ij} \mathbf{F}_i^T \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$, $-\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{E}} + \lambda_{ij} \mathbf{F}_i^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ * & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix}$.

证明 首先,通过滤波误差动态系统(6)的系统描述寻求适当的 Lyapunov 函数.选取广义分

则本文所考虑弹性 H_∞ 滤波器设计问题是寻求滤波器(5),使得滤波动态误差系统(6)是渐近稳定的,且扰动 $\mathbf{w}$ 到估计误差 $\tilde{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k)$ 传递函数的 H_∞ 范数小于给定的常数 γ .

2 主要结果

在本文中,假设系统输入矩阵 $\mathbf{B}_i, i \in I$ 是列满秩的,做此假设后,则可以找到一组转换矩阵 $\mathbf{T}_{Bi} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, i \in I$, 满足:

$$\mathbf{T}_{Bi} \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u} \\ \mathbf{0}_{(n_x - n_u) \times n_u} \end{bmatrix}, i \in I.$$

式中 $\mathbf{T}_{Bi} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ 非奇异,以下弹性 H_∞ 滤波器就是基于该假设进行设计的.

定理 1 考虑参数不确定离散广义分段仿射系统(1),若存在对称正定矩阵 $\mathbf{P}_i \in \mathbf{R}^{2n_x \times 2n_x}$,另有对称矩阵 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_3 \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$,标量 $\{\lambda_{ij} < 0, i \in I, (i, j) \in \Omega\}$,实数 $\gamma \in \mathbf{R}$, $\{\varepsilon_{ij}, i \in I, (i, j) \in \Omega\}$,以及 $\mathbf{A}_f \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, \mathbf{B}_f \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, \mathbf{C}_f \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, \mathbf{D}_f \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ 滤波器待定参数矩阵, $\mathbf{H}_2 \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, \mathbf{K}_i \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}$,使得:

$$\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{E}} \geq 0, \quad (7)$$

段仿射 Lyapunov 函数:

$$V(k, \bar{\mathbf{x}}(k)) = \bar{\mathbf{x}}^T(k) \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{x}}(k), i \in I.$$

进一步构造 $\Delta V(k)$:

$$\Delta V(k) = V(k+1, \bar{\mathbf{x}}(k+1)) - V(k, \bar{\mathbf{x}}(k)).$$

基于 Lyapunov 函数的定义,在零初始条件下,对于任意非零 $\mathbf{w}(k) \in l_2[0, \infty)$,为使具有鲁棒 H_∞ 性能指标 γ 的滤波误差动态系统(6)是渐近稳定的,则只需保证以下不等式成立:

$$\begin{aligned} & V(k+1, \tilde{\mathbf{x}}(k+1)) - V(k, \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\ & \gamma^{-2} \tilde{\mathbf{z}}^T(k) \tilde{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{w}^T(k) \mathbf{w}(k) < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

其中估计误差 $\tilde{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k)$,根据系统(1)和线性滤波器(5)的定义,估计误差可进一步

写成:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= [L_i - D_f C_i \quad -C_f] \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} - D_f D_{i2} w(k). \\ \text{考虑滤波误差动态系统(6), 对于任意非零} \\ w(k) \in l_2[0, \infty), \text{式(8)可进一步等价于:} \\ \{\bar{x}(k)^T \bar{A}^T + w(k)^T \bar{B}^T + \bar{b}_i^T\} P_j \{\bar{A} \bar{x}(k) + \bar{B} w(k) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_i\} - \bar{x}^T(k) \bar{E}^T P_i \bar{E} \bar{x}(k) - w(k)^T w(k) + \\ \gamma^{-2} \{\bar{x}(k)^T [L_i - D_f C_i \quad -C_f]^T - \\ w(k)^T D_{i2}^T D_f^T\} \{[L_i - D_f C_i \quad -C_f] \bar{x}(k) - \\ D_f D_{i2} w(k)\} < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

用矩阵形式将式(9)改写, 可进一步得到:

$$\begin{bmatrix} w(k)^T & \bar{x}(k)^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}^T P_j \bar{B} - I + \gamma^{-2} \bar{D}^T \bar{D} & \bar{B}^T P_j \bar{A} + \gamma^{-2} \bar{D}^T \bar{C} & \bar{B}^T P_j \bar{b}_i \\ * & \bar{A}^T P_j \bar{A} - \bar{E}^T P_i \bar{E} + \gamma^{-2} \bar{C}^T \bar{C} & \bar{A}^T P_j \bar{b}_i \\ * & * & \bar{b}_i^T P_j \bar{b}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) \\ \bar{x}(k) \\ 1 \end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

从式(10)可以得到:
 $\bar{A}^T P_j \bar{A} - \bar{E}^T P_i \bar{E} + \gamma^{-2} \bar{C}^T \bar{C} < 0$, 即:

$$\bar{A}^T P_j \bar{A} - \bar{E}^T P_i \bar{E} < 0. \tag{11}$$

假设矩阵束 $(\bar{E}, \bar{A})$ 是非因果的. 用一阶特征向量 ν^1 和它的 Hermitian 矩阵 ν^{1*} 分别左乘和右乘式(11) 得 $\nu^{1*} \bar{A}^T P_j \bar{A} \nu^1 - \nu^{1*} \bar{E}^T P_i \bar{E} \nu^1 < 0$.

接下来根据定义 1, 再用 $\bar{E} \nu^2$ 代替 $\bar{A} \nu^1$, 并注意到 $\bar{E} \nu^1 = 0$, 可以得到 $\nu^{2*} \bar{E}^T P_i \bar{E} \nu^2 < 0$. 其与条件(7)相矛盾. 所以矩阵束 $(\bar{E}, \bar{A})$ 是因果的. 显然, 证明因果性的同时也证明了矩阵束 $(\bar{E}, \bar{A})$ 的正则性.

考虑区域信息, 即将式(4) 带入式(10) 并应

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 & \bar{D} & \bar{C} & 0 \\ * & -P_j^{-1} & \bar{B} & \bar{A} & \bar{b}_i \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{E}^T P_i \bar{E} + \lambda_{ij} F_i^T F_i & \lambda_{ij} F_i^T f_i \\ * & * & * & * & \lambda_{ij} (f_i^T f_i - 1) \end{bmatrix} < 0, (i, j) \in \Omega. \tag{12}$$

另一方面, 由于本文所考虑的广义分段仿射系统具有参数不确定性, 为消除不确定性给求解过

用引理 3, 其中 $\lambda_{ij} < 0, i \in I_1, (i, j) \in \Omega$, 得到:

$$\begin{bmatrix} w(k) \\ \bar{x}(k) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{B}^T \\ \bar{A}^T \\ \bar{b}_i^T \end{bmatrix} P_j (\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}) + \gamma^{-2} \begin{bmatrix} \bar{D}^T \\ \bar{C}^T \\ 0 \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} * \\ * \\ 1 \end{bmatrix}) + \left\{ \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ * & -\bar{E}^T P_i \bar{E} + \lambda_{ij} F_i^T F_i & \lambda_{ij} F_i^T f_i \\ * & * & \lambda_{ij} (f_i^T f_i - 1) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w(k) \\ \bar{x}(k) \\ 1 \end{bmatrix} < 0, (i, j) \in \Omega. \tag{13}$$

对式(12) 中各个矩阵进行合并, 并先后应用 2 次 Schur 补引理, 从式(13) 可以得到:

程带来的影响, 将式(13) 中的不确定性 ΔA_i 和 $E \Delta b_i$ 分离出来, 下面可以将式(13) 改写为

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 & 0 & -D_f D_{i2} & L_i - D_f C_i & -C_f & 0 \\ * & H_1 & H_2 & D_{i1} & A_i + \Delta A_i & B_i K_i + B_i \Delta K_i & E(b_i + \Delta b_i) \\ * & * & H_3 & B_f D_{i2} & B_f C_i & A_f & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & J_1 & J_2 & I_1 \\ * & * & * & * & * & J_3 & I_2 \\ * & * & * & * & * & * & \lambda_{ij} (f_i^T f_i - 1) \end{bmatrix} < 0, (i, j) \in \Omega. \tag{14}$$

其中做了如下定义:

$$-P_j^{-1} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ * & H_3 \end{bmatrix}, \lambda_{ij} F_i^T f_i = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

$$-\bar{E}^T P_i \bar{E} + \lambda_{ij} F_i^T F_i = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ * & J_3 \end{bmatrix}.$$

进一步得到:

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -D_f D_{i2} & L_i - D_f C_i & -C_f & \mathbf{0} \\ * & H_1 & H_2 & D_{i1} & A_i & B_i K_i & E b_i \\ * & * & H_3 & B_f D_{i2} & B_f C_i & A_f & \mathbf{0} \\ * & * & * & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & J_1 & J_2 & I_1 \\ * & * & * & * & * & J_3 & I_2 \\ * & * & * & * & * & * & \lambda_{ij}(\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i - 1) \end{bmatrix} +$$

$$\text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ W_{i1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad E_{i1} \quad E_{i3} \quad E_{i2}] \right\} < 0, (i, j) \in \Omega.$$

应用引理 1, 对于适当维数实矩阵, 引入一组

引理, 消除系统的不确定性得到:

标量: $\bar{\varepsilon}_{ij} > 0, i \in I_1, (i, j) \in \Omega$, 并结合 schur 补

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -D_f D_{i2} & L_i - D_f C_i & -C_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & H_1 & H_2 & D_{i1} & A_i & B_i K_i & E b_i & W_{i1} \\ * & * & H_3 & B_f D_{i2} & B_f C_i & A_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & J_1 + \bar{\varepsilon}_{ij} E_{i1}^T E_{i1} & J_2 + \bar{\varepsilon}_{ij} E_{i1}^T E_{i3} & I_1 + \bar{\varepsilon}_{ij} E_{i1}^T E_{i2} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & J_3 + \bar{\varepsilon}_{ij} E_{i3}^T E_{i3} & I_2 + \bar{\varepsilon}_{ij} E_{i3}^T E_{i2} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & \tau & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\varepsilon}_{ij} I_{s1} \end{bmatrix} < 0, i \in I_1, (i, j) \in \Omega.$$

(14)

定理得证.

定理 2 考虑参数不确定离散广义分段仿射系统(1), 若存在对称矩阵 $H_1, H_3 \in R^{n_x \times n_x}$, 标量 $\{\lambda_{ij} < 0, i \in I_1, (i, j) \in \Omega\}$, $H_2 \in R^{n_x \times n_x}$, $\bar{K}_i \in R^{n_u \times n_x}$, $\delta_1 \in R$, $\{\varepsilon_{ij}, i \in I, (i, j) \in \Omega\}$, $A_f \in R^{n_x \times n_x}$, $B_f \in R^{n_x \times n_x}$, $C_f \in R^{n_x \times n_x}$, $D_f \in R^{n_x \times n_x}$,

$\bar{M}_{i1(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times n_u}$, $\bar{M}_{i1(2)} \in R^{(n_x - n_u) \times (n_x - n_u)}$, $\bar{M}_{i1(3)} \in R^{n_u \times n_u}$, $\bar{M}_{i2(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times n_z}$, $\bar{M}_{i3(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times n_x}$, $\bar{M}_{i4(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times n_u}$, $\bar{M}_{i5(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times n_u}$, $\bar{M}_{i5(2)} \in R^{(n_x - n_u) \times (n_x - n_u)}$, $\bar{M}_{i6(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times n_x}$, $\bar{M}_{i8(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times s_1}$, $i \in I$, $\bar{M}_{i7(1)} \in R^{(n_x - n_u) \times 1}$, $i \in I_1$, 使得式(7) 成立, 且满足以下不等式:

$$\begin{bmatrix} -H_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{K}_i & \mathbf{0} \\ * & -\gamma^2 I & \pi & \xi & -C_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & H_3 & B_f D_{i2} & B_f C_i & A_f & \mathbf{0} \\ * & * & * & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & \bar{\omega} & \nu + \delta_1 \bar{K}_i & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \zeta & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{ij} I_{s1} \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} -T_{Bi}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ D_{i1}^T T_{Bi}^T \\ A_i^T \\ \mathbf{0} \\ W_{i1}^T T_{Bi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{i1}^T \\ \bar{M}_{i2}^T \\ \bar{M}_{i3}^T \\ \bar{M}_{i4}^T \\ \bar{M}_{i5}^T \\ \bar{M}_{i6}^T \\ \bar{M}_{i8}^T \end{bmatrix}^T \right\} < 0, i \in I_0, (i, j) \in \Omega,$$

(15)

$$\begin{bmatrix}
-H_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{K}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & -\gamma^2 I & \pi & \xi & -C_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & H_3 & B_f D_{i2} & B_f C_i & A_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & * & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & \bar{\omega} & \nu + \delta_1 \bar{K}_i & \theta & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & * & \zeta & \vartheta & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & * & * & \tau & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{ij} I_{s1}
\end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} -T_{Bi}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ D_{i1}^T T_{Bi}^T \\ A_i^T \\ \mathbf{0} \\ b_i^T E^T T_{Bi}^T \\ W_{i1}^T T_{Bi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{i1}^T \\ \bar{M}_{i2}^T \\ \bar{M}_{i3}^T \\ \bar{M}_{i4}^T \\ \bar{M}_{i5}^T \\ \bar{M}_{i6}^T \\ \bar{M}_{i7}^T \\ \bar{M}_{i8}^T \end{bmatrix}^T \right\} < 0, i \in I_1, (i, j) \in \Omega \quad (16)$$

成立,则存在 H_∞ 渐近稳定弹性滤波器(5),使得滤波误差动态系统(6)是容许的,且闭环系统(6)具有鲁棒 H_∞ 性能.

对任意矩阵 N ,

$$\text{sym}\{N\} = N + N^T, \pi = -D_{i2} D_f + H_2,$$

$$X_1 = [I_{n_u} \mathbf{0}_{n_u \times (n_x - n_u)}],$$

$$X_2 = [\mathbf{0}_{(n_x - n_u) \times n_u} I_{(n_x - n_u)}],$$

$$\bar{M}_{i1} = T_{Bi}^{-T} M_{i1} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{i1(3)} & \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i1(1)} & \bar{M}_{i1(2)} \end{bmatrix} = X_1^T \bar{M}_{i1(3)} X_1 +$$

$$X_2^T \bar{M}_{i1(1)} X_1 + X_2^T \bar{M}_{i1(2)} X_2,$$

$$\bar{M}_{i2} = T_{Bi}^{-T} M_{i2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i2(1)} \end{bmatrix} = X_2^T \bar{M}_{i2(1)},$$

$$\bar{M}_{i3} = T_{Bi}^{-T} M_{i3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i3(1)} \end{bmatrix} = X_2^T \bar{M}_{i3(1)},$$

$$\bar{M}_{i4} = T_{Bi}^{-T} M_{i4} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i4(1)} \end{bmatrix} = X_2^T \bar{M}_{i4(1)},$$

$$\begin{bmatrix}
-\gamma^2 I & \mathbf{0} & -D_f D_{i2} & L_i - D_f C_i & -C_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & H_3 & B_f D_{i2} & B_f C_i & A_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & * & J_1 + \varepsilon_{ij} E_{i1}^T E_{i1} & J_2 + \varepsilon_{ij} E_{i1}^T E_{i3} & I_1 + \varepsilon_{ij} E_{i1}^T E_{i2} & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & J_3 + \varepsilon_{ij} E_{i3}^T E_{i3} & I_2 + \varepsilon_{ij} E_{i3}^T E_{i2} & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & * & \tau & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{ij} I_{s1}
\end{bmatrix} +$$

$$[0 \ 0 \ D_{i1}^T \ A_i^T \ K_i^T B_i^T \ b_i^T E^T \ W_{i1}^T] (-H_1^{-1})(*) + \Phi < 0, (i, j) \in \Omega, \quad (17)$$

其中:

$$\Phi = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & H_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{bmatrix}.$$

$$\bar{M}_{i5} = T_{Bi}^{-T} M_{i5} = \begin{bmatrix} \delta_1 \bar{M}_{i1(3)} & \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i5(1)} & \bar{M}_{i5(2)} \end{bmatrix} = \delta_1 X_1^T \bar{M}_{i1(3)} X_1 +$$

$$X_2^T \bar{M}_{i5(1)} X_1 + X_2^T \bar{M}_{i5(2)} X_2,$$

$$\bar{M}_{i6} = T_{Bi}^{-T} M_{i6} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i6(1)} \end{bmatrix} = X_2^T \bar{M}_{i6(1)},$$

$$\bar{M}_{i7} = T_{Bi}^{-T} M_{i7} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i7(1)} \end{bmatrix} = X_2^T \bar{M}_{i7(1)},$$

$$\bar{M}_{i8} = T_{Bi}^{-T} M_{i8} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{M}_{i8(1)} \end{bmatrix} = X_2^T \bar{M}_{i8(1)},$$

H_∞ 滤波误差动态系统反馈控制器增益:

$$K_i = \bar{M}_{i1(3)}^{-T} \bar{K}_i, i \in I.$$

证明 首先,注意到作为定理 1 结论的线性矩阵不等式中,滤波误差动态系统的 Lyapunov 矩阵和系统矩阵相互耦合在一起,结合 schur 补引理,将式(14)改写:

接下来应用投影定理消除式中 Lyapunov 矩阵和系统矩阵的耦合,这样处理后的结果将不对滤波误差动态系统的系统矩阵进行分解,将式(17)改写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i I_{(n_z + n_w + n_u + 2n_x + 1 + s_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T \\ I_{(n_z + n_w + n_u + 2n_x + 1 + s_1)} \end{bmatrix} + \Phi < 0, i \in I_1, (i, j) \in \Omega,$$

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & \mathbf{0} & -D_f D_{i2} & L_i - D_f C_i & -C_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & H_3 & B_f D_{i2} & B_f C_i & A_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & J_1 + \varepsilon_{ij} E_{i1}^T E_{i1} & J_2 & I_1 + \varepsilon_{ij} E_{i1}^T E_{i2} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & J_3 & I_2 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \tau & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{ij} I_{s1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_i = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad D_{i1} \quad A_i \quad B_i K_i \quad E b_i \quad W_{i1}].$$

基于投影定理,做如下变量替换:

$$S \leftarrow \begin{bmatrix} -H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi_{ij} \end{bmatrix}, U \leftarrow [-I_{n_x} \quad \tilde{A}_i],$$

$$U_{\perp} \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{A}_i \\ I_{(n_z+n_w+n_u+2n_x+1+s_1)} \end{bmatrix}, V \leftarrow I, V_{\perp} \leftarrow \mathbf{0},$$

$$X \leftarrow M_i \in \mathbf{R}^{n_x \times (3n_x+n_z+n_w+n_u+1+s_1)}.$$

应用引理 2 的投影定理,得到:

$$\begin{bmatrix} -H^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi_{ij} \end{bmatrix} + M_i^T [-I \quad \tilde{A}_i] + \begin{bmatrix} -I \\ \tilde{A}_i^T \end{bmatrix} M_i + \Phi < 0, i \in I_1, (i,j) \in \Omega \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -I_{n_x} \\ \tilde{A}_i^T \end{bmatrix} M_i = \begin{bmatrix} -I_{n_x} \\ \tilde{A}_i^T \end{bmatrix} T_{Bi}^T T_{Bi}^{-T} M_i = \begin{bmatrix} -T_{Bi}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ D_{i1}^T T_{Bi}^T \\ A_i^T T_{Bi}^T \\ \mathbf{0} \\ b_i^T E^T T_{Bi}^T \\ W_{i1}^T T_{Bi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{M}_{i1} \\ \overline{M}_{i2} \\ \overline{M}_{i3} \\ \overline{M}_{i4} \\ \overline{M}_{i5} \\ \overline{M}_{i6} \\ \overline{M}_{i7} \\ \overline{M}_{i8} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overline{K}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_1 \overline{K}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

将式(19)带到式(18)中,并结合所有给定矩阵的定义,最终得到式(16).可以看到条件(16)在 $E b_i = 0$ 时,就是条件(15),所以不失一般性,此处只证明式(16)成立即可,第一部分证明结束.

另一方面,从式(15)~(16)可以进一步得到: $-H_1^{-1} - T_{Bi}^T \overline{M}_{i1} - \overline{M}_{i1}^T T_{Bi} < 0$, 因此 $T_{Bi}^T \overline{M}_{i1}$ 是非奇异的.从而得到转换矩阵 T_{Bi} 的非奇异性,并且由 $\overline{M}_{i1}$ 是下三角阵,可以得到 $\overline{M}_{i1(3)}$ 可逆.所以控制器增益能够得到,定理进一步证明完毕.

3 数值仿真

为了验证本文所提弹性 H_{∞} 滤波器设计方法的实用性,以及定理 2 使得闭环系统保守性更小的结论,下面考虑一个实际物理映射,并将通过对其弹性 H_{∞} 滤波器待定参数矩阵以及反馈控制增益的求取来证明结论.

以隧道二极管电路为例^[18], 电容电压用 $x_1(k)$ 表示,电感电流用 $x_2(k)$ 表示,流过隧道二

极管的电流用 $x_3(k)$ 表示.将扰动输入取为随时间延续不断衰减的信号: $w(k) = e^{-5k}$,则离散化得到系统模型:

$$M_i = [M_{i1} \quad M_{i2} \quad M_{i3} \quad M_{i4} \quad M_{i5} \quad M_{i6} \quad M_{i7} \quad M_{i8}],$$

$$i \in I_1, M_{i1} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, M_{i2} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_z}, M_{i3} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x},$$

$$M_{i4} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_w}, M_{i5} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, M_{i6} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, M_{i7} \in$$

$$\mathbf{R}^{n_x \times 1}, M_{i8} \in \mathbf{R}^{n_x \times s_1},$$

定义 $\overline{M}_{i1} = T_{Bi}^{-T} M_{i1}$, $\overline{M}_{i2} = T_{Bi}^{-T} M_{i2}$, $\overline{M}_{i3} = T_{Bi}^{-T} M_{i3}$, $\overline{M}_{i4} = T_{Bi}^{-T} M_{i4}$, $\overline{M}_{i5} = T_{Bi}^{-T} M_{i5}$, $\overline{M}_{i6} = T_{Bi}^{-T} M_{i6}$, $\overline{M}_{i7} = T_{Bi}^{-T} M_{i7}$, $\overline{M}_{i8} = T_{Bi}^{-T} M_{i8}$, $\overline{K}_i^T = K_i^T \overline{M}_{i1(3)}$, 相应矩阵的定义与定理 2 条件中给出的形式一样.结合变量 δ_1 :

极管的电流用 $x_3(k)$ 表示.将扰动输入取为随时间延续不断衰减的信号: $w(k) = e^{-5k}$,则离散化得到系统模型:

$$\begin{cases} E x(k+1) = (A_i + \Delta A_i) x(k) + B_i u(k) + D_{i1} w(k) + E(b_i + \Delta b_i), \\ y(k) = C_i x(k) + D_{i2} w(k), i = 1, 2. \end{cases}$$

式中取系统状态初始值为 $x(0) = (2.5, 1, -1)$, 其他参数取值如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.5 & 0 \\ 1.0 & 2.0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.4 & 0.6 \\ 1.0 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.2 \\ 1.0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 1.00 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \delta_1 = 0.1,$$

$$W_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.03 \\ 1.00 \end{bmatrix}, W_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \\ 2.00 \end{bmatrix},$$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \\ 1.00 \end{bmatrix}^T, E_{12} = 0.03, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 3.00 \end{bmatrix}^T,$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.3 & 2.1 \\ 2.0 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.1 & 3.1 \\ 1.0 & 2.0 & 0.3 \\ 0.5 & 4.0 & 4.0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 & 1.0 \\ 3.0 & 1.0 & 2.0 \\ 1.0 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 1.0 & 3.0 & 2.0 \\ 2.0 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 & 1.3 \\ 0.2 & 1.0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_{22} = 0.04.$$

椭圆体系数矩阵通过以下公式可计算得到:

$$F_1 = 2 \times \frac{C_1^T}{\beta_1 - \alpha_1}, f_1 = -\frac{\beta_1 + \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1},$$

$$F_2 = 2 \times \frac{C_2^T}{\beta_2 - \alpha_2}, f_2 = -\frac{\beta_2 + \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2},$$

式中: $\alpha_1 = 3, \beta_1 = 10, \alpha_2 = 4, \beta_2 = 9$.

应用定理 1 得到一组使滤波误差动态系统

(6) 容许的弹性 H_∞ 滤波器反馈控制增益:

$$K_1 = [23.897\ 3 \quad 7.067\ 4 \quad 10.599\ 6],$$

$$K_2 = [-1.953\ 0 \quad -15.185\ 8 \quad -8.183\ 5],$$

H_∞ 干扰抑制度 $\gamma = 28.699\ 2$. 弹性 H_∞ 滤波器待定系数矩阵如下:

$$A_f = \begin{bmatrix} 1.655\ 3 & -0.881\ 6 & 4.003\ 4 \\ -0.001\ 7 & 1.692\ 6 & 0.002\ 0 \\ 0.003\ 2 & 0.044\ 9 & 1.690\ 8 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0.201\ 3 & 0.081\ 5 & -0.164\ 6 \\ 0.082\ 1 & 0.077\ 1 & -0.105\ 8 \\ -0.164\ 0 & -0.105\ 5 & 0.205\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 3.147\ 7 & 0.900\ 9 & 0.854\ 5 \\ -13.344\ 5 & 10.347\ 8 & -6.557\ 8 \\ -9.433\ 1 & 8.389\ 9 & 0.231\ 3 \end{bmatrix},$$

$$D_f = \begin{bmatrix} -0.088\ 6 & -0.040\ 3 & 0.087\ 9 \\ 0.098\ 6 & -0.080\ 4 & -0.027\ 9 \\ -0.153\ 6 & -0.287\ 3 & 0.267\ 9 \end{bmatrix}.$$

图 1 为根据定理 1 得到的由弹性 H_∞ 滤波器所构成滤波误差动态系统(6) 的状态响应曲线:

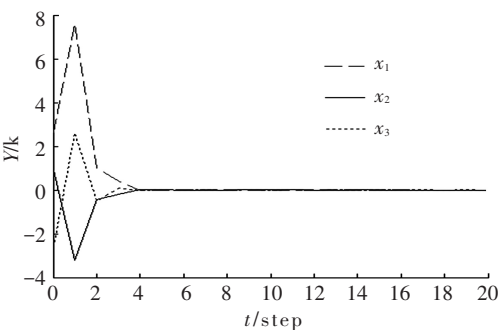


图 1 根据定理 1 得到的系统状态响应曲线

应用定理 2 得到另一组使滤波误差动态系统

(6) 容许的弹性 H_∞ 滤波器反馈控制增益:

$$K_1 = [2.897\ 3 \quad 16.067\ 4 \quad 11.599\ 6],$$

$$K_2 = [-13.953\ 0 \quad -16.185\ 8 \quad -8.883\ 5],$$

H_∞ 干扰抑制度 $\gamma = 9.145\ 9$. 弹性 H_∞ 滤波器待定系数矩阵如下:

$$A_f = \begin{bmatrix} 4.770\ 3 & -8.071\ 6 & 0.044\ 4 \\ -6.644\ 7 & 1.644\ 8 & 0.542\ 0 \\ 7.44\ 8 & -1.004\ 0 & 1.644\ 8 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 3.243\ 3 & 7.085\ 8 & -0.456\ 6 \\ 0.086\ 1 & 5.072\ 1 & -7.142\ 8 \\ 5.324\ 0 & -4.103\ 5 & 5.255\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 7.147\ 7 & 2.999\ 9 & 0.853\ 3 \\ -1.371\ 5 & 17.357\ 8 & -4.651\ 8 \\ -8.476\ 1 & 0.382\ 9 & 1.241\ 3 \end{bmatrix},$$

$$D_f = \begin{bmatrix} -0.055\ 6 & -0.040\ 3 & 0.055\ 9 \\ 8.097\ 6 & 4.038\ 8 & -0.827\ 9 \\ -0.155\ 6 & 6.213\ 3 & 8.287\ 9 \end{bmatrix}.$$

图 2 为根据定理 2 得到的由弹性 H_∞ 滤波器所构成滤波误差动态系统(6) 的状态响应曲线.

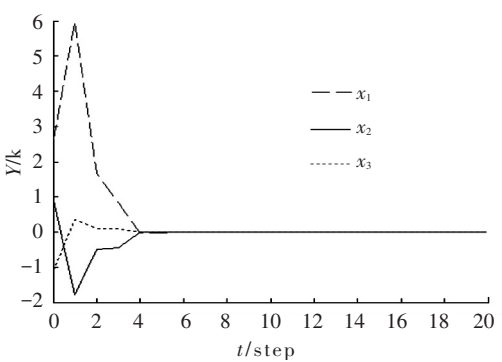


图 2 根据定理 2 得到的系统状态响应曲线

将之前给定的系统矩阵参数 A_1, A_2 再次进行赋值,其他参数不变,并重复之前步骤进行数值仿真, A_1, A_2 取值如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 178 & 223 & 456 \\ 145 & 123 & 146 \\ 452 & 253 & 456 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 123 & 789 & 452 \\ 124 & 345 & 126 \\ 563 & 135 & 423 \end{bmatrix}.$$

仿真结果表明,基于定理 1 的控制方法不能

使系统镇定,即找不到相应的弹性 H_∞ 滤波器待
定系数矩阵以及反馈控制增益使得滤波误差动态
系统(6) 容许.而通过应用定理 2,得到反馈增益

$$K_1 = [2.897\ 3 \quad 16.067\ 4 \quad 11.599\ 6],$$

$$K_2 = [-13.953\ 0 \quad -16.185\ 8 \quad -8.883\ 5],$$

$$\gamma = 14.343\ 2.$$

从仿真所得数据可以看到基于定理 2 的控制
器设计方法在某些情况下确实使得系统保守性有
所下降,原因在于系统矩阵和 Lyapunov 矩阵的耦
合关系得以消除,使得这种处理方法不对系统矩
阵进行分解,从而获得了保守性更小的滤波误差
动态系统(6),所以相比较而言,在某些情况下,
可以得到最优解.

4 结 语

本文首先构造广义分段仿射 Lyapunov 函数,
接下来应用投影定理以及几个处理 LMIs 的基本
引理,针对参数不确定体现为范数有界形式的离
散时间广义分段仿射系统设计使其闭环系统容
许的弹性 H_∞ 滤波器,保证了由此构成的滤波误
差动态系统具有一定的鲁棒性能.算法最终转化
为 LMIs,讨论了弹性 H_∞ 滤波器得以存在的 LMIs
约束条件,此种算法不对系统矩阵进行分解,并且
消除与 Lyapunov 矩阵的耦合关系,达到减低算法
保守性的目的,最后数值仿真给出了所涉及弹性
 H_∞ 滤波器的最优解,同时得到滤波器控制增益.
数值仿真证明了该设计方法的有效性.

参考文献

- [1] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach[J]. Automatica, 1997, 33(4): 669-673.
- [2] DE OLIVEIRA M C, GEROMEL J C. A class of robust stability conditions where linear parameter dependence of the Lyapunov function is a necessary condition for arbitrary parameter dependence[J]. Systems Control Letters, 2005, 54(11): 1131-1134.
- [3] QIU J, FENG G, GAO H. Approaches to robust H_∞ static output feedback control of discrete-time piecewise-affine systems with norm-bounded uncertainties[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(7): 790-814.
- [4] HU Zhonghui, ZHU Huanyu, ZHAO Jiemei. Further results on H_∞ filtering for a class of discrete-time singular systems with interval time-varying delay[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2013, 32(3): 1081-1095.
- [5] FENG Xiaoliang, WEN Chenglin, XU Lizhong. Finite

horizon H_∞ filtering for networked measurement system [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2013, 11(1): 1-11.

- [6] JUN Yoneyama. Robust H_∞ filtering for sampled-data fuzzy systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 217: 110-129.
- [7] LI Zuxin, SU Hongye, GU Yong, et al. H_∞ filtering for discrete-time singular networked systems with communication delays and data missing[J]. International Journal of Systems Science, 2013, 44(4): 604-614.
- [8] KIM J H. Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time singular systems with interval time-varying delay[J]. Automatica, 2010, 43(6): 591-597.
- [9] KIM J H. Delay-dependent approach to robust H_∞ filtering for discrete-time singular systems with multiple time-varying delays and polytopic uncertainties[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2010, 8(3): 655-661.
- [10] LU Renquan, XU Yong, XUE Anke. H_∞ filtering for singular systems with communication delays[J]. Signal Processing, 2010, 16(4): 1240-1248.
- [11] DONG J, YANG G H. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(2): 123-131.
- [12] ZHU X, YIN X M. Robust H_∞ filtering for discrete-time systems with nonlinear uncertainties. 2006 1st IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. Piscataway: IEEE, 2006: 829-834.
- [13] DONG J, YANG G H. Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(10): 1930-1936.
- [14] WANG Mao, WEI Yanling, QIU Jianbin. Static output feedback control of discrete-time piecewise affine singular systems[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45(3): 14-21.
- [15] HSIUNG K L, LEE L. Lyapunov inequality and bounded real lemma for discrete-time descriptor systems[J]. IEEE Proc-Control Theory, 1999, 146(4): 327-331.
- [16] BOYD S, EL GHAOU L, FERON E. Linear matrix inequality in systems and control theory[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [17] DY Baozhu. Guaranteed cost control for uncertain singular systems[C]//Control and Decision Conference (CCDC), 2011 Chinese.Mianyang:[s.n.], 2005: 37-40.
- [18] RODRIGUES L, BOYD S. Piecewise-affine state feedback for piecewise-affine slab systems using convex optimization[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(9): 835-853.

(编辑 张 宏)