

doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2015.03.015

# 求根 MUSIC 初值设置和更新算法

闫锋刚, 张 薇, 金 铭

(哈尔滨工业大学(威海)信息与电气工程学院, 264209 山东 威海)

**摘 要:** 作为波达方向(direction-of-arrival, DOA)估计的重要方法之一,求根 MUSIC(root-MUSIC)算法在实际工程中常需选择一定初值、进而借助迭代对多项式求根。为了提高求根的计算效率和正确性,必须研究适合 root-MUSIC 的初值设置和更新算法。致力于此,本文根据 root-MUSIC 多项式根的分布特点,提出了以迭代初值到单位圆平均距离最短(least average distance to unit circle, LADTUC)为准则的 root-MUSIC 迭代初值设置和更新算法。理论分析和实验结果表明,该算法能有效避免错误理解和加速迭代收敛速度,从而为 root-MUSIC 算法的实际工程化提供理论参考。

**关键词:** 阵列信号处理;波达方向估计;求根 MUSIC;初值设置和更新;距离单位圆最近

**中图分类号:** TN959.2      **文献标志码:** A      **文章编号:** 0367-6234(2015)03-0088-05

## A new method for setting and updating the initiation of root-MUSIC

YAN Fenggang, ZHANG Wei, JIN Ming

(School of Information and Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology at Weihai, 264209 Weihai, Shandong, China)

**Abstract:** As one of the most popular methods for direction-of-arrival (DOA) estimation, the root-MUSIC algorithm usually needs to find the roots of a polynomial by iteration with certain initiation in practical applications. In order to improve the computational efficiency and accuracy of polynomial rooting, it is of great importance to choose and to update appropriate initiations for root-MUSIC. To this end, a new technique for setting and updating the initiations of root-MUSIC is proposed in this paper, by making use of the characteristic of root-MUSIC as well as Least Average Distance to Unit Circle (LADTUC) rule. Theoretical analysis as well as simulation results demonstrates that fake roots are avoided and the speed of iteration is efficiently improved by the new approach, which hence provides new schemes for realizing root-MUSIC in practice.

**Keywords:** array signal processing; direction-of-arrival (DOA) estimation; Root-MUSIC; initiation setting and updating; least average distance to unit circle (LADTUC)

信号波达方向(direction-of-arrival, DOA)估计<sup>[1-2]</sup>是雷达、声呐、无线通信和无源定位等应用中经常遇到的重要研究课题。以多重信号分类(multiple signal classification, MUSIC)<sup>[3]</sup>和旋转不变子空间(estimate signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT)<sup>[4]</sup>为代表的子空间类算法的提出,实现了传统空间谱估计向超分辨率的飞跃,但 MUSIC 算法庞大的计算量和

ESPRIT 算法较低的估计精度阻碍了超分辨算法的工程化进度<sup>[5]</sup>。

在均匀线阵(uniform linear array, ULA)下,阵列导向矢量具有特殊的范德蒙结构,使得 MUSIC 算法繁杂的谱峰搜索简化为多项式求根问题,由此促成了求根 MUSIC(root-MUSIC)算法<sup>[5]</sup>的诞生。虽然 root-MUSIC 仅是 MUSIC 在 ULA 下的特例,然而理论分析和实验结果证明:root-MUSIC 的估计精度比 MUSIC 的估计精度更高<sup>[6-7]</sup>,因而其相比于 MUSIC 实现了低复杂度和高精度的双赢。文献[8]通过理论分析论述了 root-MUSIC 估计性能与环境、阵元参数的内在联系;文献[9]借助中心对称阵列结构实现了 root-MUSIC 的实值化,在降低计算量的同时提高了算

收稿日期:2014-05-21。

基金项目:哈尔滨工业大学(威海)校科学研究基金(HIT(WH)201411);山东省自然科学基金(ZR2014FQ003)。

作者简介:闫锋刚(1982—),男,讲师;

金 铭(1968—),男,教授,博士生导师。

通信作者:闫锋刚, yfglion@163.com。

法的估计精度;文献[10-11]借助流型分离(manifold separation technique, MST)技术,将任意阵列的导向矢量近似地分裂成两个独立部分的乘积,利用包含信号角度信息且具有范德蒙结构的部分、以多项式求根实现信号 DOA 估计.文献[12]利用任意阵列结构下的 MUSIC 空间谱是关于信号 DOA 周期函数的事实,提出了傅里叶域求根 MUSIC (fourier-domain, FD-MUSIC)算法,将 root-MUSIC 由 ULA 推广到了任意阵列结构.文献[13]基于傅里叶级数的劳伦结构,对 FD-root-MUSIC 进一步进行了改进,有效降低了多项式的求根阶数,降低了算法的复杂度.

上述算法丰富了 root-MUSIC 的理论内涵,但它们在工程应用中一般均需借助迭代算法对多项式求根.选择合适的初值并基于一定的原则对其更新和控制以使迭代快速、准确地收敛具有重要研究意义.

本文在分析 root-MUSIC 多项式根分布特点的基础上,提出了一种迭代初值到单位圆平均距离最短(least average distance to unit circle, LADTUC)的准则,进而基于该准则发展了一种适用于 root-MUSIC 的初值设置和更新算法.理论分析和试验结果表明,该算法能有效避免迭代过程中的误解并加速迭代收敛速度,从而为 root-MUSIC 的实际工程化提供理论参考.

## 1 数据模型及 root-MUSIC 算法原理

### 1.1 数据模型

考察  $xoy$  平面上由  $M$  个以半波长间隔放置的阵元组成的 ULA,假设阵列各通道附加高斯白噪声且空间有  $L$  个辐射源,定义波达方向 DOA 为信号来向与阵列法线的夹角,则阵列一次快拍接收数据为<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{x}(t)$  是  $M \times 1$  维接收数据向量;  $\mathbf{s}(t)$  是  $L \times 1$  维信号向量;  $\mathbf{n}(t)$  是  $M \times 1$  维噪声向量.  $\mathbf{A}(\theta)$  是  $M \times L$  维导向矢量矩阵且导向矢量  $\mathbf{a}(\theta)$  定义为  $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-i\pi \sin \theta}, e^{-i2\pi \sin \theta}, \dots, e^{-i\pi(M-1) \sin \theta}]^T$ .

(2)

其中  $i \triangleq \sqrt{-1}$  为复数运算单元.

阵列接收数据协方差矩阵定义为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}. \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{R}_s$  为信号协方差矩阵,  $\sigma_n^2$  为噪声功率.对  $\mathbf{R}$  进行特征值分解,可得

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^L \rho_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sum_{j=L+1}^M \rho_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H. \quad (4)$$

式中:  $\rho_i, i = 1, 2, \dots, L$  和  $\rho_j, j = L + 1, \dots, M$  分别

为  $\mathbf{R}$  的  $L$  个大特征值及  $(M - L)$  个小特征值,  $\mathbf{e}_i$  和  $\mathbf{e}_j$  分别为是  $\rho_i$  和  $\rho_j$  对应的特征矢量.定义:

$$\begin{cases} \mathbf{S} \triangleq [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_L], \\ \mathbf{G} \triangleq [\mathbf{e}_{L+1}, \mathbf{e}_{L+2}, \dots, \mathbf{e}_M]. \end{cases} \quad (5)$$

则  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{G}$  的列分别张成信号子空间和噪声子空间.

### 1.2 root-MUSIC 算法原理

依据上述阵列和数据模型, root-MUSIC 算法定义如下所示的多项式<sup>[5]</sup>:

$$f(z) = p^H(z) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H p(z). \quad (6)$$

其中  $p(z)$  定义为

$$p(z) = (1, z, z^2, \dots, z^{M-1})^H. \quad (7)$$

对  $f(z)$  求根即可获得 DOA. 由于  $f(z)$  存在  $z^*$  项, 求根较为复杂. 为便于计算, 做如下修正:

$$f(z) = z^{M-1} p^T(z^{-1}) \mathbf{G} \mathbf{G}^H p(z). \quad (8)$$

此时, 多项式  $f(z)$  的阶数为  $2(M - 1)$ , 所以有  $(M - 1)$  对根, 每一对根是相互共轭的关系. 这些根中的  $L$  个根  $z_1, z_2, \dots, z_L$  正好分布在单位圆上, 且

$$z_i = \exp(i\theta), i = 1, 2, \dots, L. \quad (9)$$

实际中, 得到多项式  $f(z)$  中  $L$  个接近于单位圆的根后, 可按下式求解信号 DOA:

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\pi d} \arg\{\hat{z}_i\}\right), i = 1, 2, \dots, L. \quad (10)$$

## 2 LADTUC 准则及最佳初值设置

### 2.1 $f(z)$ 最小值设置

通常为得到 DOA, 只需根据式(8)令  $f(z) = 0$  并求根即可, 但当快拍数或信噪比较低时, 在信号入射方向有

$$f(z) = f_{\min} > 0. \quad (11)$$

因此, 为得到精确 DOA, 需估计  $f_{\min}$  并对修正多项式  $f(z) - f_{\min} = 0$  进行求根.

由 MUSIC 零谱统计性能知, 发射能量为  $E_i (i = 1, 2, \dots, L)$  的辐射源, 在 MUSIC 空间零谱上产生的最小值为<sup>[14-15]</sup>

$$f_{\min_i} = \sigma_n^2 \frac{M - L}{J \cdot E_i}. \quad (12)$$

式中  $J$  为快拍数, 辐射源能量  $E_i (i = 1, 2, \dots, L)$  在一般情况下是难以获得的, 一种近似的求解方法是认为每个辐射源的辐射能量都相同, 即

$$E_i = \frac{1}{L} \left( E - \sum_{j=1}^{M-L} \rho_j \right), i = 1, 2, \dots, L. \quad (13)$$

式中:  $E$  为观测信号总能量,  $\rho_j$  是协方差矩阵  $\mathbf{R}$  特征值分解后对应的噪声空间特征值, 其数值等于噪声的能量. 由上述分析, 可设置

$$f_{\min} = \sigma_n^2 \frac{(M - L)L}{J \left( E - \sum_{j=1}^{M-L} \rho_j \right)}. \quad (14)$$

实际中,当快拍数或信噪比较高时,  $f_{\min}$  接近于 0. 此时,可直接选取近似值  $f_{\min} \approx 0$ .

## 2.2 最佳迭代初值设置

对方程  $f(z) - f_{\min} = 0$  采用牛顿法求解<sup>[16]</sup>,得

$$z_n = z_0 - \frac{f(z) - f_{\min}}{f'(z)}. \quad (15)$$

式中:  $f'(z)$  为  $f(z)$  的一阶导函数,  $z_0$  为迭代初值,  $z_n$  是经过第  $n$  次迭代后得到的解.

可选取一定容差  $\vartheta$ , 当  $z_0$  与  $z_n$  满足

$$|z_n - z_0| < \vartheta. \quad (16)$$

时迭代结束,然后将  $z_n$  带入式(11)即可求得 DOA.

迭代初值  $z_0$  的选取至关重要,其直接决定着迭代的收敛速度和正确性.由于代表信号 DOA 的根分布在单位圆上,故  $z_0$  的选择应以到单位圆平均距离最短为准则,这便是本文提出的 LADTUC 准则,后续仿真实验证实了该准则的合理性.

由于 DOA 取值范围为  $[-\pi/2, \pi/2]$ , 只需考虑半单位圆即可.为了叙述便利,以下均用  $U$  代表上半单位圆弧.设  $R(\cos \theta, \sin \theta)$  为  $U$  上任意一点,其中,  $\theta$  为  $R$  与圆心连线的倾角,显然,  $\theta$  符合均匀分布特性,其概率密度函数为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (17)$$

设最佳迭代初值为  $Q_1$ , 则  $Q_1$  到  $R(\cos \theta, \sin \theta)$  平均距离的平方  $L_1^2$  为

$$\begin{aligned} L_1^2 &\triangleq E\{d(Q_1, R)\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(x - \sin \theta)^2 + (y - \cos \theta)^2] f(\theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 + y^2 - 2x \sin \theta - \\ &2y \cos \theta + 1) d\theta = \pi x^2 + \pi y^2 - 4y + \pi. \end{aligned} \quad (18)$$

依据 LADTUC 原则,令

$$\begin{cases} \frac{\partial L_1^2}{\partial x} = 2\pi x = 0, \\ \frac{\partial L_1^2}{\partial y} = 2\pi y - 4 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

易求得,最佳迭代初值为

$$Q_1 = \left(0, \frac{2}{\pi}\right). \quad (20)$$

## 2.3 迭代初值更新方法

LADTUC 原则保证的是平均意义上的最佳,实际中的某次迭代解算可能因受到  $U$  内、外根的干扰而无法收敛到  $U$  上.为了解决该问题,定义数列  $Q_n$ :

$$Q_n = \left\{ (x_n, y_n) \mid E[d((x_n, y_n), A)] = \min \right\}. \quad (21)$$

式中:点  $A$  为弧  $U_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  上任意一点,  $U_n$  为

将  $U$  进行  $k_1$  倍等分后、顺时针方向的第  $k_2 + 1$  份弧.易求得  $k_1, k_2$  与  $n$  满足如下关系:

$$\begin{cases} k_1 = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}, \\ k_2 = n - 2^{\lceil \log_2 n \rceil}. \end{cases} \quad (22)$$

式中符号  $\lceil \cdot \rceil$  表示向上取整.

由式(21)可见:  $Q_n, n = 1, 2, \dots$  是 LADTUC 意义下对  $Q_1$  的扩展,其代表的是到弧  $U_n$  平均距离最小的点列.设弧  $U_n$  上、下端点和圆心连线的倾角为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ ,易求得

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right), \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k_2 + 1}{k_1}\right). \end{cases} \quad (23)$$

利用类似于式(18)、(19)的方法,可得  $Q_n, n = 1, 2, \dots$  的横、纵坐标值为

$$\begin{cases} x_n = \frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}, \\ y_n = \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}. \end{cases} \quad (24)$$

显然,当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow 0, Q_n \rightarrow 1$ . 因此,  $Q_n$  的所有元素均在  $U$  内.图 1 给出了  $Q_n$  的前 7 个元素在  $U$  内的相对位置关系.基于  $Q_n$ , 可对迭代初值更新,以保证迭代最终收敛于  $U$  上.

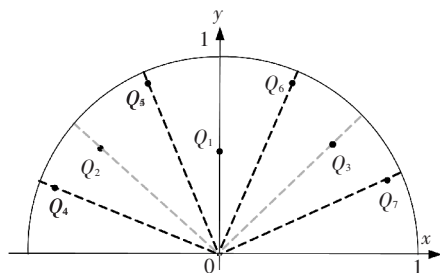


图 1 数列  $Q$  的前 7 个元素

假设  $U$  上分布正确根  $R_1$  和  $R_2$ ,  $U$  内、外分别分布干扰根  $I_1, I_2$  和  $O_1, O_2$ , 如图 2 所示. 依据 LADTUC 原则,首先设置迭代初值  $z_0$  为  $Q_1$ ,若迭代收敛于干扰根  $I_1$ ,则更新  $z_0$  为  $I_1$  相对于  $Q_1$  反方向的  $Q_2$ ,以避免  $I_1$  的干扰;否则,更新  $z_0$  为  $Q_3$ .若更新后迭代仍收敛于干扰根  $I_2$ ,则更新  $z_0$  为  $I_2$  相对于  $Q_3$  反方向的  $Q_5$ ,以避免  $I_2$  的干扰;同理,当迭代再次收敛于干扰根  $O_1$  时,则更新  $z_0$  为  $O_1$  相对于  $Q_5$  反方向的  $Q_4$ ,以避免  $O_1$  的干扰,  $\dots$ . 如此反复更新  $z_0$ ,直至迭代收敛于正确根  $R_1$ .

在 LADTUC 原则下,每次初值更新都是以平均最接近  $U$  的等分弧段而进行.为防止多次更新仍不收敛,可预设最大容忍迭代次数  $N$ ,当迭代次数达到  $N/2$  时,下一步则应“逃逸”至相反的半弧进

行.如图2所示,当设置 $z_0$ 为 $Q_4$ 仍不收敛时,下一步应更新 $z_0$ 为 $Q_3$ ,以在 $U$ 的右半弧寻求正确根 $R_2$ .

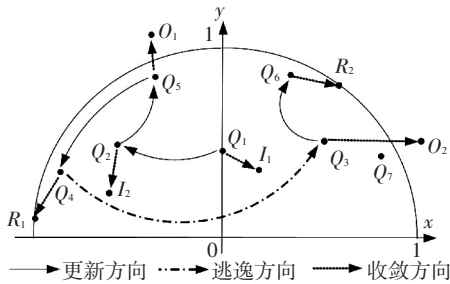


图2 LADTUC原则下迭代初值设置和更新

### 3 收敛性能分析

式(8)根的总数为

$$H_1 = 2(M - 1). \quad (25)$$

其中,代表辐射源 DOA 的根有 $L$ 对,因此,干扰根的个数为

$$H_2 = 2(M - 1 - L). \quad (26)$$

采用 LATDUC 原则进行迭代初值设置和更新时,当干扰根距离数列 $Q$ 第 $k$ 个元素 $Q_k$ 的距离小于 $Q_k$ 到 $U_k$ 的平均距离 $\bar{L}_k$ 时,则迭代会收敛到干扰根而不会收敛到单位圆上,此时收敛会失败.因而,第 $k$ 次初值设置收敛失败的概率为

$$q_k = p\{E\{d(R_{\text{error}}, Q_k) < \bar{L}_k\}\} = 4L_k^2. \quad (27)$$

因此,经过 $k$ 次初值更新,成功收敛概率为

$$p_{\text{LADTUC}} = 1 - \prod_{i=1}^k q_k. \quad (28)$$

由于 $0 < q_k < 1$ ,由式(28)可见: $p_{\text{LADTUC}}$ 随 $k$ 的增加急剧增大,因而本文算法每经一次初值更新后,成功收敛的概率都会大幅增加.

若采用随机法设置迭代初值,只进行1次初值设置迭代收敛成功(收敛到 $U$ 上)的概率为

$$p_{\text{rand}} = \frac{H_1 - H_2}{H_1} = \frac{L}{M - 1}. \quad (29)$$

由于随机法的每次初值设置相互独立,故其经过 $k$ 次初值设置成功收敛的概率恒为 $p_{\text{rand}}$ ,这意味着随机设置和更新初值的收敛概率并不会随 $k$ 的增加而增大.因而,LADTUC 相比于随机设置、更新迭代初值法从统计平均上提高了成功收敛的概率.

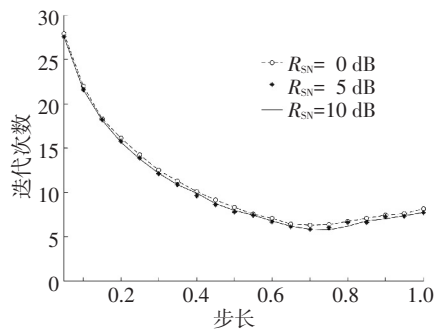
### 4 仿真试验

试验采用 ULA 阵列,阵元间距为半个波长.设快拍数 $J = 256$ ,迭代停止容差 $\vartheta = 10^{-2}$ ,最大容忍迭代次数 $N = 30$ .设辐射能量彼此相等,信源 DOA 通过随机生成 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上均匀分布的 $L$ 个角度得到. Monte Carlo 试验次数均为 500 次.

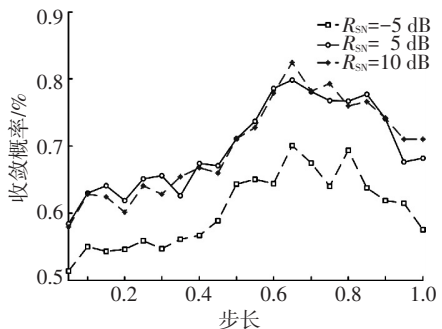
#### 4.1 最佳迭代初值 $Q_1$ 合理性验证

本试验用于验证式(20)给出最佳迭代初值 $Q_1(0, 2/\pi)$ 的合理性.试验设置阵元数 $M = 10$ ,迭代初值为 $z_0 = 0 + \Delta i$ ,其中步长以间隔 0.05 从 0.05 增大到 1.试验分为如下两个部分.

首先,选取 $L = 3$ 并以 $R_{\text{SN}}$ 为参变量,统计 $\Delta$ 的取值与采用牛顿法求解方程根的迭代次数及收敛概率的关系,结果如图3所示.试验中,当迭代总次数超过 $N = 30$ 时认为收敛失败.



(a) 步长与迭代次数关系



(b) 步长与收敛概率关系

图3 信噪比参变时,步长与迭代次数及收敛概率关系

其次,选取 $R_{\text{SN}} = 5$  dB 并以信号数 $L$ 为参变量,统计步长值与采用牛顿法求解方程根的迭代次数及收敛概率的关系,结果见图4.试验中,当迭代总次数超过 $N = 30$ 时则认为收敛失败.

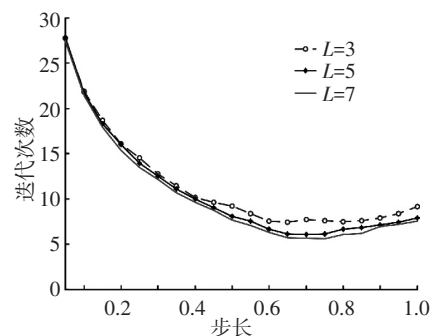
由图3、4可见:相比于 $R_{\text{SN}}$ , $L$ 对迭代次数和迭代的成功收敛概率影响更强,这是由于 $R_{\text{SN}}$ 仅影响方程(8)根的分布,而 $L$ 除了影响方程根分布之外还决定着干扰根的多少.另外,由图3、4可观察到:当 $\Delta = 0.65 \approx 2/\pi$ 时,成功收敛概率最大,迭代次数也接近最小,这证明了初值 $Q_1(0, 2/\pi)$ 的合理性.

#### 4.2 LADTUC 初值更新原则的合理性验证

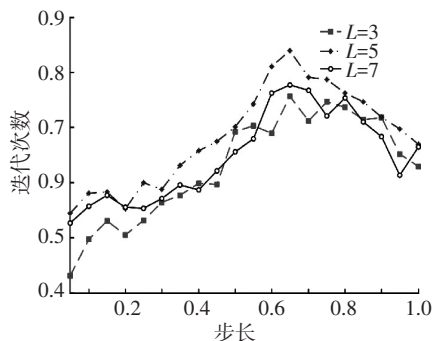
本试验用于验证图2所示的基于 LADTUC 原则进行迭代初值更新方法的合理性.试验设置阵元数 $M = 15$ , $R_{\text{SN}} = 5$  dB,然后分别按 LADUC 原则和随机法更新迭代初值,并按如下两方面进行平均结果统计.

首先,统计迭代初值更新次数与信号数 $L$ 的

关系,结果见图 5. 试验中,当迭代总次数超过  $N = 30$  时则认为收敛失败.



(a) 步长与迭代次数关系



(b) 步长与收敛概率关系

图 4 信号数参变时,步长与迭代次数及收敛概率关系

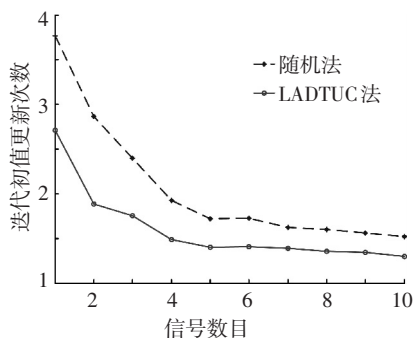


图 5 迭代初值更新次数与信号数目关系

其次,设置初值更新的最大容忍次数为 3,然后统计迭代成功收敛概率与信号数  $L$  的关系,结果见图 6. 试验中,当迭代总次数超过  $N = 30$  或初值更新次数超过 3 次时,均认为收敛失败.

由图 5 可见:基于 LADTUC 原则进行迭代初值更新,最多只需要进行 3 次以下的更新即可成功收敛,其相比于随机更新法显著减少了更新次数.另一方面,当信号数  $L$  较小时,本文方法所需的更新次数比随机法的更新次数更少.这是因为  $L$  越小时方程(8)的干扰根较多,而 LADTUC 原则相比于随机法从平均意义上保证了迭代收敛概率更高,因此其所需的初值更新次数越少.

由图 6 可见,当  $L > 2$  时,LADTUC 原则下的迭代成功收敛概率均  $> 95\%$ ;而随机法成功收敛概率仅为  $85\%$  左右,其相比于本文方法低 10 个百

分点.与图 5 相似,从图 6 可见:本文方法相比于随机法在信号数  $L$  较少(即式(8)干扰根较多)时的优势更为明显,迭代收敛概率更高.上述实验结果说明了依据 LADTUC 准则对 root-MUSIC 算法进行初值设置和更新是合理性的.

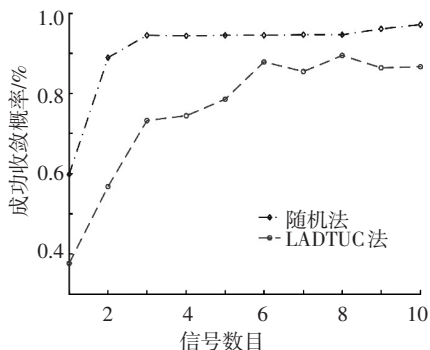


图 6 迭代成功收敛概率与信号数目关系

## 5 结 语

本文在分析 root-MUSIC 算法根分布特点的基础上,提出了一种利用工程实现的 root-MUSIC 初值设置和更新算法.该算法充分利用了 LADTUC 原则对于迭代收敛的控制作用,保证了 root-MUSIC 算法迭代收敛的快速性和正确性,为 root-MUSIC 算法的实际工程化提供了一定的理论参考.

## 参考文献

- [1] JIN H. Joint space-time parameter estimation for multicarrier CDMA systems [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2012, 61(7): 3306–3311.
- [2] KHABBAZIBASMENJ A. Efficient transmit beamspace design for search-free based DOA estimation in MIMO radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62, (6): 1490–1500.
- [3] YAN F G, JIN M, LIU S, et al. Real-valued MUSIC for efficient direction estimation with arbitrary array geometries [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(6): 1548–1560.
- [4] ZHENG G M, CAO B X, YANG M L. Unitary ESPRIT algorithm for bistatic MIMO radar [J]. Electronics Letters, 2012, 48(3): 1122–1123.
- [5] CHENG Q, HUANG L, So H C. Improved unitary root-MUSIC for DOA estimation based on pseudo-noise resampling [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(2): 140–144.
- [6] STOCIA P, NEHORAI A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound: further results and comparisons [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1990, 38(12): 2140–2150.

(下转第 96 页)