doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2015.05.003

小行星重力场全球及局部球谐系数计算与仿真

郭延宁[1], 李晓宇[1], 马广富[1], 崔祜涛[2]

(1. 哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 150001 哈尔滨; 2. 哈尔滨工业大学 深空探测基础研究中心, 150001 哈尔滨)

摘 要: 为得到高精度的全球球谐系数,总结提出了检验点选取方式和多面体模型划分策略,定量分析表明了均匀取点和等面积划分法的优越性.提出了局部球谐系数概念,集中在小行星探测器任务规划中的主要活动区域选取检验点进行计算,通过构建一种新的性能指标说明了局部球谐系数的有效性.局部球谐系数可有效提高特定区域的重力场建模精度,克服传统意义球谐函数法无法在布里渊球域内使用的缺陷,显著提升了球谐函数法的应用范围.最后,以小行星 Eros433 为实际算例,计算了全球及局部球谐系数,说明了本文方法的有效性.

关键词: 小行星;局部球谐系数;重力场建模;多面体模型;Eros433

中图分类号: V412.4 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2015)05-0013-07

Computation and simulation of global and local spherical harmonic coefficients of asteroid gravity field

GUO Yanning[1], LI Xiaoyu[1], MA Guangfu[1], CUI Hutao[2]

(1. Dept. of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China;
2. Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

Abstract: To get high precision global sphere harmonic coefficients, selection strategy of test points and the partition method of polyhedron model are summarized. Quantitative analysis shows the superiority of uniform distribution test points and the polyhedron division method with equal size facets. Then, the concept of local sphere harmonic coefficient is proposed. After choosing the test points located in the detector's major operation area, a new performance index to measure the effectiveness of local coefficients is constructed. The proposed new concept is shown to be able to effectively improve the gravity field modeling accuracy for certain area and overcome the defect of traditional sphere harmonic function method that can not be used in brillouin ball, resulting enlarged application range. Finally, the global and local sphere harmonic coefficients of Eros433 are calculated, which validates the effectiveness and availability of the method presented in this paper.

Keywords: asteroid; local spherical harmonic coefficient; gravitational field modeling; polyhedron model; Eros433

近年来,作为深空探测重要组成部分,小行星探测活动从早期的近距离飞越、低空绕轨探测[1],发展至目前的悬停[2]、表面软着陆和采样返回[3],对于推动科学技术进步和帮助人类了解宇宙发展等有重要科学意义[4].受质量小、形状不规则、自旋复杂等因素影响,小行星重力场与传统近球形大行星或天然卫星重力场存在极大差异.因此高精度的重力场建模不仅是研究设计小行星卫星轨道所需要解决的首要问题,也是小行星探测任务的主要科学目标之一.

小行星重力场建模方法的研究已经有一百多年历史,方法众多[5],目前最为广泛使用的是球谐函数模型[6]与多面体模型[7].球谐函数模型计算效率高、易于解析表达,可根据各阶次球谐系数计算出小行星非球形引力摄动,便于轨道设计.但在布里渊球域内发散,且存在截断误差.多面体模

收稿日期: 2014-04-15.
基金项目: 国家重点基础研究发展规划(2012CB720000);国家自然科学基金(61174200);中国博士后科学基金(2014M550195);中央高校基本科研业务费专项资金(HIT.NSRIF.2014035).
作者简介: 郭延宁(1985—),男,讲师,硕士生导师;
马广富(1963—),男,教授,博士生导师;
崔祜涛(1970—),男,教授,博士生导师.
通信作者: 马广富, mgf@hit.edu.cn.

型可进行重力场的高精度建模,无发散区域,且能提供检验点相对小行星的位置信息,但因其是数值算法,不能给出受摄轨道解析式,计算量大,存在一定的局限性.实际使用的球谐系数大都是由轨道数据解算出来的[8],而对于还未进行实际探测任务的小行星无法得到精确值.

针对小行星球谐系数的获取问题,大多采用三轴椭球体模型法,计算由小行星简化的椭球体的球谐系数,以此近似代替小行星的球谐系数[9].可见小行星的形状越不规则,误差将越大.Scheeres[9]和胡维多等[10]以小行星二阶二次重力场为出发点对小行星附近的动力学情况进行了研究,并利用小行星的三个主轴转动惯量唯一确定球谐系数的二阶项,但未给出高阶项结果.张振江等[12]提出一种基于多面体模型的不规则形状小行星重力场球谐系数求取方法,不仅提高了重力场建模的精度,同时可求其高阶系数.但就计算过程中检验点的选取规则、多面体模型的划分形式以及局部重力场建模等问题并未进行讨论.较小行星重力场问题而言,地球的重力场研究已很成熟.众多优秀学者[13-14]先后研究了适于描述地球重力场全球特性的全球模型和能够精确构建局部地区重力场的局部模型.

鉴于此,本文在已有研究基础上进一步研究了小行星重力场球谐系数的计算及优化问题.首先,分析说明了检验点的均匀分布形式和等面划分的均匀多面体模型可以提高全球球谐系数的计算精度.随后,为获得高精度的局部重力场模型,提出局部球谐系数概念,并通过建立新的性能指标检验基于此组系数的球谐函数法在布里渊球域内的可行性,有效拓展了球谐函数法的应用范围.最后,以小行星 Eros433 为实际算例,计算了全球及局部球谐系数,验证本文方案的有效性和准确性.

1 重力场模型与球谐系数的求取

1.1 重力场模型

1) 球谐函数模型. 利用球谐函数描述的重力势能函数为[5]

$$U=\frac{GM}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_0}{R}\right)^n\bar{P}_{nm}(\sin\phi)(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\bar{S}_{nm}\sin m\lambda).\tag{1}$$

其中:G 是万有引力常数;M 是小行星质量;R_0 是布里渊球半径;$\bar{P}_{nm}$ 是标准缔合勒让德多项式;$\bar{C}_n^m$、$\bar{S}_n^m$ 是标准球谐系数;n、m 是多项式阶数、次数;R、ϕ、λ 是检验点到中心天体质心的距离、纬度和经度.

将 U 对位置矢量求一阶偏导数,可得重力加速度为

$$\boldsymbol{g}(R,\phi,\lambda)=\nabla U=\frac{\partial U}{\partial r}R+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\phi}\phi+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial U}{\partial\lambda}\lambda.\tag{2}$$

其中:

$$\frac{\partial U}{\partial R}=-\frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{(n+1)\left(\frac{R_0}{R}\right)^n\bar{P}_{nm}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\right\}$$

$$\frac{\partial U}{\partial\phi}=\frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left(\frac{R_0}{R}\right)^n[\bar{P}_{nm+1}-m\tan\phi\bar{P}_{nm}]\cdot(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\right\},$$

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda}=\frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left(\frac{R_0}{R}\right)^n m\bar{P}_{nm}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda-\bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\right\}$$

2) 多面体模型. 利用多面体模型描述的重力势能函数为[7]

$$U=\frac{1}{2}G\sigma\sum_{e\in E_{\text{edges}}}\boldsymbol{r}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_e\boldsymbol{r}_e\cdot L_e^f-\frac{1}{2}G\sigma\sum_{f\in F_{\text{faces}}}\boldsymbol{r}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_f\boldsymbol{r}_f\cdot\omega_f.\tag{3}$$

其中 E_{edges} 和 F_{faces} 分别表示多面体模型的边集合与面集合.

对应重力加速度函数为

$$\boldsymbol{g}(x,y,z)=\nabla U=-G\sigma\sum_{e\in E_{\text{edges}}}L_e\boldsymbol{E}_e\boldsymbol{r}_e+G\sigma\sum_{f\in F_{\text{faces}}}\omega_f\boldsymbol{F}_f\boldsymbol{r}_f.\tag{4}$$

其中:σ 为天体密度;e 表示边;f 表示面,向量是由检验点指向表面任一点的位置矢量;$\boldsymbol{r}_e$ 是由检验点指向多面体边上任一点的位置矢量.

$$\omega_f=2\arctan\left(\frac{\det[\boldsymbol{r}_i\ \boldsymbol{r}_j\ \boldsymbol{r}_k]}{r_ir_jr_k+r_i\boldsymbol{r}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_k+r_j\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_i+r_k\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_j}\right),$$

$$L_e^f\equiv\int_e r^{-1}\mathrm{d}s=\ln\frac{r_{e1}+r_{e2}+e_{12}}{r_{e1}+r_{e2}-e_{12}},$$

$$\boldsymbol{E}_e=\hat{\boldsymbol{n}}_A(\hat{\boldsymbol{n}}_{12}^A)^{\mathrm{T}}+\hat{\boldsymbol{n}}_B(\hat{\boldsymbol{n}}_{21}^B)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F}_f=\hat{\boldsymbol{n}}_f\hat{\boldsymbol{n}}_f^{\mathrm{T}}.$$

式中:$\hat{\boldsymbol{n}}_A$、$\hat{\boldsymbol{n}}_B$ 是面 A、B 的单位外法向方向矢量;$\hat{\boldsymbol{n}}_f$ 是多面体面 f 的外法向方向矢量;$\hat{\boldsymbol{n}}_{12}^A$、$\hat{\boldsymbol{n}}_{21}^B$ 是面 A、B 内的边 e 单位外法向方向矢量;$\boldsymbol{r}_i$、$\boldsymbol{r}_j$、$\boldsymbol{r}_k$ 是由检验点指向平面三角形3个相对应顶点的矢量;r_{e1}、r_{e2}、e_{12} 分别为检验点到边 e 两端点的距离、边 e 的长度.

1.2 球谐系数计算方法

对于未探测的星体,在小行星固连坐标系下,通过引入势能值的虚拟观测量,求解由球谐函数描述的势能的拉普拉斯方程即可得到球谐系数.

任给一检验点 $\boldsymbol{R}^i=(\lambda^i,\varphi^i,r^i)$,对于不规则形状小行星利用多面体模型算得该检验点处的势能作

为势能虚拟观测量 U^i,对于形状规则的、势能可解析表达的小行星,U^i 用解析值代替,根据式(1),则可构造一个以 $\bar{C}_{nm}$ 和 $\bar{S}_{nm}$ 为变量的方程[12]:

$$U^i = \frac{GM}{r^i}\sum_{n=0}^{l}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_0}{r^i}\right)^n \bar{P}_{nm}(\sin\phi^i)\left[\bar{C}_{nm}\cos(m\lambda^i) + \bar{S}_{nm}\sin(m\lambda^i)\right] + \eta. \tag{5}$$

其中方程未知量的个数为 $l(l+2)$($\bar{S}_{n0}$ 无意义,为 0,$\bar{C}_{00}$ 为 1).理论上只要在小行星势能场中选取 $l(l+2)$ 个不同的检验点建立线性方程组,构成 $Ax=b$ 形式,就可以求解出共 $l(l+2)$ 个的变量 $\bar{C}_{nm}$ 和 $\bar{S}_{nm}$. 但由于方程系数存在因子 $(R_0/r^i)^n\bar{P}_{nm}(\sin\phi^i)$,使得检验点选取时无法确保方程线性无关.所以在实际计算过程中,通过增加方程个数组成超定方程,再求出此超定方程的最小二乘解来解决上述问题.

2　全球球谐系数

本文将基于小行星全球信息得到的球谐系数称为全球球谐系数,即传统意义上的球谐系数,其流程如图 1.因其满足球谐函数的基函数具有整个空间域上的正交性,因此用它来描述的函数刻画的都是全空间上的性质,适用于小行星布里渊球域外任意位置.利用精确的全球球谐系数表示的重力场全球模型可以比较直观地反映出小行星某些全球性特征.

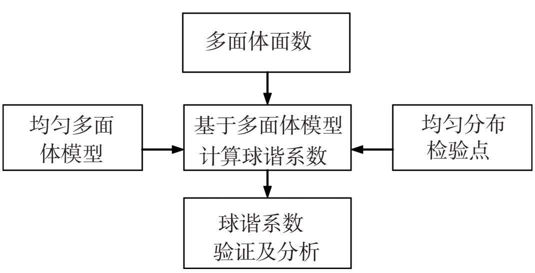

图 1　全球球谐系数研究流程

2.1　多面体模型面数的选取

鉴于匀质三轴椭球体重力场具有解析表达且存在高阶球谐系数,以椭球体为例进行分析和验证.

椭球体的球谐系数解析表达式如下[12]:

1) 当 n、m 为所有正整数时,$S_{nm}=0$;

2) 当 n 或 m 为奇数时,$C_{nm}=0$;

3) 当 n、m 为其他情况时

$$C_{nm} = \frac{3}{R_0}\frac{(n/2)!\,(n-m)!}{2^m(n+3)(n+1)!}(2-\delta_{0m})\times \sum_{i=0}^{\mathrm{int}\left(\frac{n-m}{4}\right)}\frac{(a^2-b^2)^{\left(\frac{m+4i}{2}\right)}\left[c^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right]^{\frac{n-m-4i}{2}}}{16^i\left(\frac{n-m-4i}{2}\right)!\left(\frac{m+2i}{2}\right)!\,i!}.$$

式中克罗内克符号

$$\delta_{0m} = \begin{cases}0,\ m=1;\\1,\ m=0.\end{cases}$$

取椭球体半长轴 a、b、c 分别为16、8、6 km,密度为 2.7 g/cm^3,则布里渊球半径 R_0 为16 km.本文将星体表面用面积大小相当的三角形剖分得到的多面体模型称为均匀多面体模型,上述椭球体多面体模型如图 2.分别取面数 N 为 760、20 000 和 54 000,计算椭球体球谐系数,结果见表 1.

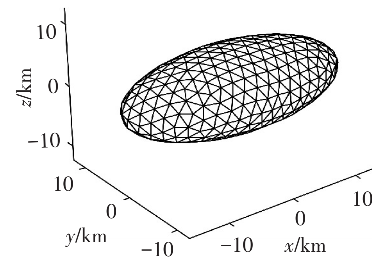

图 2　匀质椭球体均匀多面体模型

表 1　椭球体不同面数球谐系数计算结果

球谐	解析值	$N=760$	$N=20\ 000$	$N=54\ 000$
$\bar{C}_{10}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{11}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{20}$	−0.043 324	−0.049 330	−0.043 458	−0.043 351
$\bar{C}_{21}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{22}$	0.058 095	0.054 758	0.058 058	0.058 107
$\bar{C}_{30}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{31}$	0	0.000 225	0.000 062	0.000 002
$\bar{C}_{32}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{33}$	0	0.000 957	−0.000 048	0.000 012
$\bar{C}_{40}$	0.008 712	0.006 338	0.008 845	0.008 687
$\bar{C}_{41}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{42}$	−0.011 604	−0.011 110	−0.011 712	−0.011 599
$\bar{C}_{43}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{44}$	0.011 885	0.010 113	0.011 933	0.011 867

注:所有的 $\bar{S}$ 项均为 0,故表中未列出.

由表 1 结果可知,随着多面体模型面数的增加,模型越逼近真实形状,计算得到的球谐系数结果也越精确,但以牺牲计算效率为代价.

2.2　检验点选取方式

大量计算表明,检验点选取方式将直接影响球谐系数的计算精度.图 3 给出了检验点的四种选取方式,固定相同的检验点个数(总数均为700 个)和包络体形状(球体,且半径为 20 km),图中网格交点即为检验点:1)检验点均匀分布在球面上;2)检验点集中 z 轴两端,对应椭球体南北两极附近;3)检验点集中在 x 轴两端,对应椭球体长轴两端;4)检验点集中在椭球体北极上空.

采用上述检验点选取方式求解椭球体球谐系数,其中多面体模型面数 N 为 54 000,所有选取方式对应的计算结果见表 2.

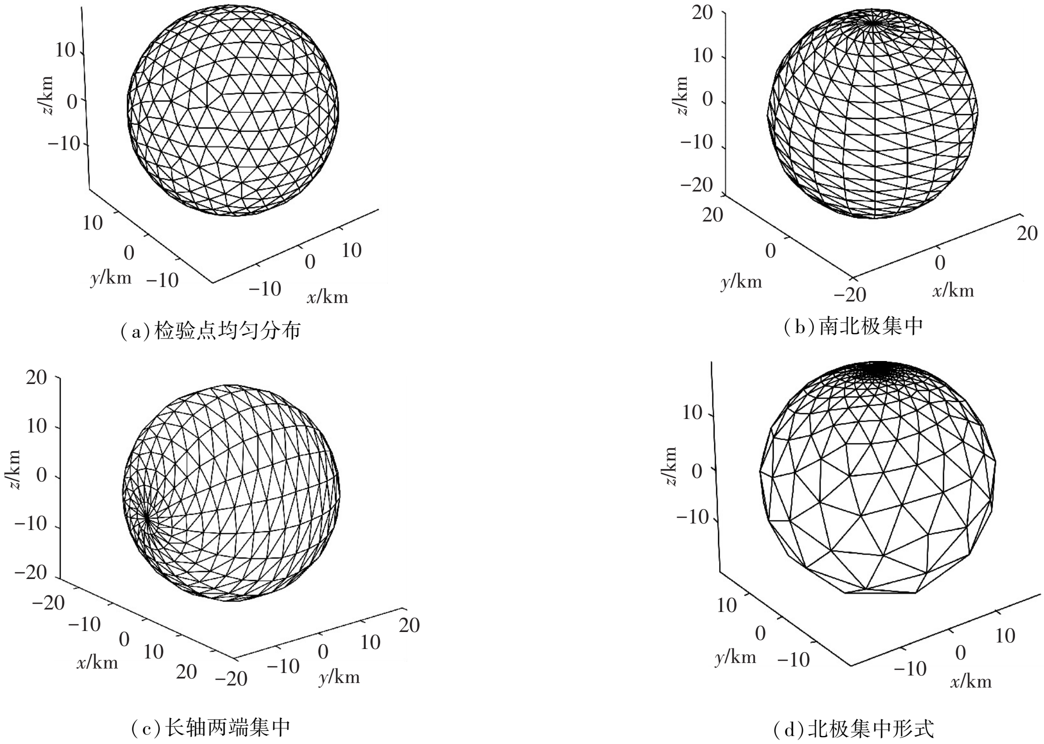

图 3　检验点选取方式

表 2　椭球体不同检验选取方式求解椭球体球谐系数

球谐	解析值	N = 54 000			
		检验点 1)	检验点 2)	检验点 3)	检验点 4)
$\bar{C}_{10}$	0	0	0	0	0
$\bar{C}_{11}$	0	0	0	0	0.000 005
$\bar{C}_{20}$	− 0.043 324	− 0.043 351	− 0.043 513	− 0.043 485	− 0.043 697
$\bar{C}_{21}$	0	0	0	0	0
$\bar{C}_{22}$	0.058 095	0.058 107	0.054 635	0.058 026	0.058 313
$\bar{C}_{30}$	0	0	0	0	0
$\bar{C}_{31}$	0	0.000 002	− 0.000 001	0.000 041	0.000 027
$\bar{C}_{32}$	0	0	0	0	0
$\bar{C}_{33}$	0	0.000 012	0.000 048	− 0.000 013	0.000 069
$\bar{C}_{40}$	0.008 712	0.008 687	0.008 666	0.008 776	0.008 981
$\bar{C}_{41}$	0	0	0	0	0
$\bar{C}_{42}$	− 0.011 604	− 0.011 599	− 0.008 655	− 0.011 671	− 0.011 718
$\bar{C}_{43}$	0	0	0	0	0
$\bar{C}_{44}$	0.011 885	0.011 867	0.008 710	0.011 888	0.011 961

注：所有的 $\bar{S}$ 项均为 0,故表中未列出.

由表 2 计算结果易知,选取均匀分布的检验点(1)进行计算,可以得到相对其他方式更加精确的结果,各项相对误差更小,全局取点方式优于局部取点方式.

2.3　多面体模型划分形式

下面将椭球体表面由经纬度信息构成的四边形网格结构分割成三角形,由此得到的多面体模型表面各三角形大小不一,这里简称为非均匀多面体模型,如图 4 所示.为与均匀多面体模型进行比较分析,计算 $N = 54\ 000$的非均匀多面体模型球谐系数,结果见表 3.

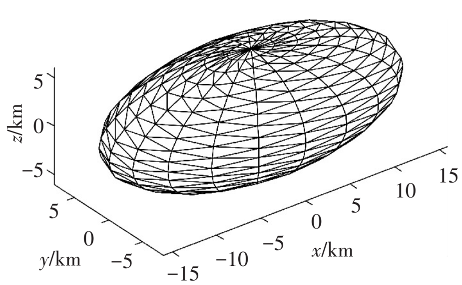

图 4　非均匀多面体模型

由表 3 可知,均匀多面体模型要优于非均匀多面体模型,前者 $\bar{C}_{20}$、$\bar{C}_{22}$ 相对误差仅为0.062 3%、0.020 7%,而后者结果分别为 0.203 1% 和

0.084 3%.非均匀多面体的三角形面积大小不均，位于南北两极的三角形面积极小且相当密集，而在赤道附近，尤其长轴两端处，三角形面积较大，分布稀疏，这就使得在相同面数条件下均匀模型更加精准的逼近小行星不规则形状，进而得到更加精确的重力场模型.不过，理想椭球体仅为一特殊情况，对于实际的小行星而言，如何逼近其真实形状的划分方法并不绝对，如在平坦地区可以采用大三角块，而在崎岖地区建议细化分割.

表 3　椭球体不同多面体模型球谐系数计算结果

球谐	解析值	N = 54 000	
		均匀多面体模型	非均匀多面体模型
$\bar{C}_{10}$	0	0	0
$\bar{C}_{11}$	0	0	0
$\bar{C}_{20}$	− 0.043 324	− 0.043 351	− 0.043 412
$\bar{C}_{21}$	0	0	0
$\bar{C}_{22}$	0.058 095	0.058 107	0.058 046
$\bar{C}_{30}$	0	0	0
$\bar{C}_{31}$	0	0.000 002	0.000 003
$\bar{C}_{32}$	0	0	0
$\bar{C}_{33}$	0	0.000 012	0.000 015
$\bar{C}_{40}$	0.008 712	0.008 687	0.008 679
$\bar{C}_{41}$	0	0	0
$\bar{C}_{42}$	− 0.011 604	− 0.011 599	− 0.011 597
$\bar{C}_{43}$	0	0	0
$\bar{C}_{44}$	0.011 885	0.011 867	0.011 861

注：所有 $\bar{S}$ 项均为 0，表中未列出.

3　局部球谐系数

针对探测器活动在某一特定空间范围时，特别是在布里渊球域内，全局球谐系数往往不能满足精度和效率的计算需求.因此本文借鉴地球重力场局部模型的概念，通过在特定活动区域集中选取检验点，求取局部球谐系数.引入局部球谐系数不旨在得到更加精确的全球重力场，而是以提高该局部区域重力场计算精度、增强轨道定轨和预报精度为目的.传统的球谐函数法只适用于布里渊球域之外，而局部球谐系数模型可用于任意局部空间，不存在任何局限性.

为验证局部球谐系数模型的性能优势，在探测器活动区域选取轨道，抽取测试点，利用局部球谐系数模型求其势能值，并与真实值进行分析比较.其研究流程如图 5 所示.

为衡量局部球谐系数对局部活动区域势能场的拟合程度，定义性能指标如下：

$$\mathrm{PI} = \left(1 - \sum_{n=1}^{N} |\tilde{U}_n - U_n| / U_n\right) \times 100\%. \quad (6)$$

其中：N 为轨道上测试点的抽取数目；$\tilde{U}$ 是局部球谐系数模型计算得到的测试点势能值；U 是测试点的真实势能值，若小行星形状规则，使用其解析解，若小行星形状不规则，利用多面体模型结果近似代替真实值.PI 越接近于 1，说明结果拟合程度越高.

下面，仍以椭球体为例进行讨论.

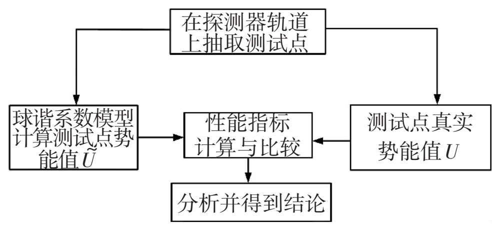

图 5　局部球谐系数研究流程

3.1　布里渊球域外局部球谐系数

以探测器活动区域集中在椭球体北极上空为例.因椭球体势能场是解析的，此处，以其解析值[5]为式(5)左侧的势能虚拟观测值，并利用图 3 的(a)、(b)、(c)三种检验点方式，算得球谐系数见表 4.为考察局部球谐系数性能，选取椭球体北纬 85°，高度 25 km 处的盘旋轨道(见图 6)，分别抽取不同数目的测试点，计算 PI，结果见表 5.

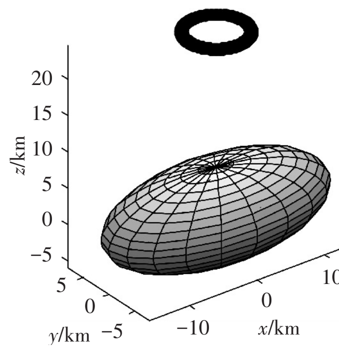

图 6　北极上空盘旋轨道

表 4　球谐系数计算结果

球谐	解析值	以椭球体势能解析值为势能虚拟观测量		
		检验点方式(1)	检验点方式(2)	检验点方式(4)
$\bar{C}_{10}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{11}$	0	0	0	0.000 005
$\bar{C}_{20}$	− 0.043 324	− 0.043 326	− 0.043 309	− 0.043 798
$\bar{C}_{21}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{22}$	0.058 095	0.058 095	0.058 117	0.058 607
$\bar{C}_{30}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{31}$	0	0.000 006	0.000 032	0.000 068
$\bar{C}_{32}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{33}$	0	− 0.000 004	− 0.000 033	0.000 069
$\bar{C}_{40}$	0.008 712	0.008 707	0.008 822	0.008 981
$\bar{C}_{41}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{42}$	− 0.011 604	− 0.011 599	− 0.011 675	− 0.011 718
$\bar{C}_{43}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{44}$	0.011 885	0.011 878	0.011 938	0.011 961

表 5　椭球体北极盘旋轨道 PI 计算结果

抽取轨道测试点数目/个	性能指标 PI/%		
	检验点方式(1)	检验点方式(2)	检验点方式(4)
80	99.251 0	99.669 9	99.825 0
350	96.290 9	98.370 4	99.266 0
1 800	82.950 5	91.930 5	97.145 4
2 200	81.574 0	89.622 2	96.808 7

由表 4、5 结果知，检验点方式(1)、(2)到(4)，检验点逐步集中于椭球体北极，球谐系数与真实值的偏差增大，但对该活动区域的重力场建模精度显著提高.随着测试点的增多，局部球谐系数模型建模偏差积累效应明显比全局球谐模型小的多.针对局部活动区域得到的局部球谐系数模型对该区域的重力场建模精度可以大大提高.

3.2 布里渊球域内局部球谐系数

假设探测器需要在图 7 所示的近小行星区域进行低轨绕飞以获得到高精度观测数据，高度为 10 km，处于布里渊球域内.

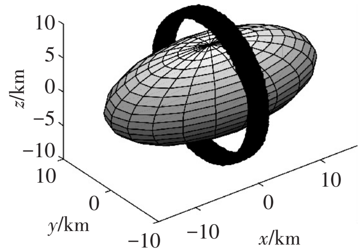

图 7 探测器局部活动区域

集中在图 7 所示的局部活动区域内选取均匀分布形式的检验点，共计 700 个. 求取球谐系数，见表 6. 选用图 8 所示的绕飞轨道进行验证.分别利用上述局部球谐系数和由检验点方式(1)得到的全球球谐系数对轨道抽取的测试点计算 PI，结果见表 7.由结果可知，局部球谐系数模型仍有极高的重力场拟合程度，而全球球谐系数已经发散，无法在该区域使用.

表 6 局部球谐系数计算结果

球谐	解析值	局部球谐系数
$\bar{C}_{10}$	0	0
$\bar{C}_{11}$	0	0
$\bar{C}_{20}$	− 0.043 324	− 0.037 320
$\bar{C}_{21}$	0	0
$\bar{C}_{22}$	0.058 095	0.050 362
$\bar{C}_{30}$	0	0
$\bar{C}_{31}$	0	0
$\bar{C}_{32}$	0	0
$\bar{C}_{33}$	0	0
$\bar{C}_{40}$	0.008 712	0.003 408
$\bar{C}_{41}$	0	0
$\bar{C}_{42}$	− 0.011 604	− 0.004 450
$\bar{C}_{43}$	0	0
$\bar{C}_{44}$	0.011 885	0.004 886

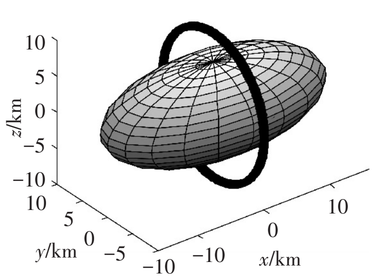

图 8 探测器绕飞轨道

表 7 椭球体统飞轨道 *PI* 计算结果

抽取轨道测试数目/个	性能指标 PI/%	
	局部球谐系数	全球球谐系数
200	99.485 2	52.046 1
700	97.954 3	167.903 4
2 000	94.950 5	505.095 8

4 小行星 Eros 球谐系数的求取

Eros433 小行星于 1989 年发现，美国国家航空航天局(NASA)的 NEAR−Shoemaker 探测器对其进行了探测.据 NASA 公布，其质量$(6.690\ 4\pm0.003)\times10^{15}$ kg，体积 $2\ 503\pm25$ km^3，平均密度 $2.67\pm0.000\ 3$ g · cm^{-3}，大小 34.4×11.2×11.2 km，均匀多面体模型如图 9 所示[15].

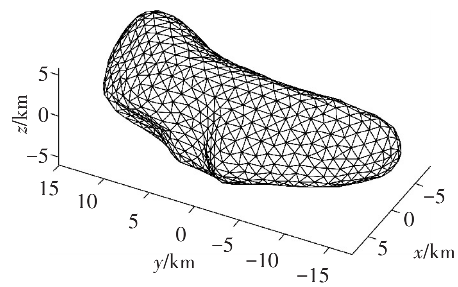

图 9 Eros 多面体模型

4.1 全球球谐系数结果

利用本文方法求解其前 15 阶全球球谐系数，结果见表 8. 将结果与传统的三轴椭球体法和 NEAR-Shoemaker 实际环绕探测解算出的球谐系数相比较.计算过程中采用面数 N 分别为 49 152 和 196 608 的两种 Eros 均匀多面体模型.

表 8 Eros 球皆系数求取结果

球谐	实际探测结果	三轴椭球体模型	N = 49 152	N = 196 608
$\bar{C}_{10}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{11}$	0	0	0	0
$\bar{C}_{20}$	− 0.052 478	− 0.043 324	− 0.052 576	− 0.052 465
$\bar{C}_{21}$	0	0	0.000 054	0.000 053
$\bar{C}_{22}$	0.082 538	0.058 095	0.083 001	0.083 073
$\bar{C}_{30}$	− 0.001 400	0	− 0.001 378	− 0.001 403
$\bar{C}_{31}$	0.004 055	0	0.003 999	0.004 027
$\bar{C}_{32}$	0.001 792	0	0.001 788	0.001 789
$\bar{C}_{33}$	− 0.010 337	0	− 0.010 460	− 0.010 506
$\bar{C}_{40}$	0.012 900	0.008 712	0.013 257	0.013 335
$\bar{C}_{41}$	− 0.000 106	0	− 0.000 150	− 0.000 147
$\bar{C}_{42}$	− 0.017 495	− 0.011 604	− 0.017 615	− 0.017 666
$\bar{C}_{43}$	− 0.000 319	0	− 0.000 227	− 0.000 278
$\bar{C}_{44}$	0.017 587	0.011 885	0.017 647	0.017 698
$\bar{S}_{11}$	0	0	0	0
$\bar{S}_{21}$	0	0	0.000 009	− 0.000 009
$\bar{S}_{22}$	− 0.027 745	0	− 0.028 349	− 0.028 370
$\bar{S}_{31}$	0.003 379	0	0.003 425	0.003 429
$\bar{S}_{32}$	− 0.000 686	0	− 0.000 727	− 0.000 729
$\bar{S}_{33}$	− 0.012 134	0	− 0.012 270	− 0.012 288
$\bar{S}_{41}$	0.000 136	0	0.000 142	0.000 142
$\bar{S}_{42}$	0.004 542	0	0.004 663	0.004 668
$\bar{S}_{43}$	− 0.000 141	0	− 0.000 136	− 0.000 136
$\bar{S}_{44}$	− 0.008 939	0	− 0.009 198	− 0.009 203

4.2　局部球谐系数结果

以探测器活动在高度为 25 km 的 Eros 北极上空为例,利用图 3 检验点方式(1)、(2)、(4),基于 Eros 多面体模型求解球谐系数,并选取图 6 所示的轨道进行验证,计算 PI,结果见表 9.可见,对不规则形状小行星,由探测器局部活动区域得到的局部球谐系数相比全球球谐系数对该区域的重力场拟合程度更高.

以探测器活动在图 7 所示的局部区域为例,集中在此区域选取检验点,基于 Eros 多面体模型计算局部球谐系数,利用图 3 检验点方式(1)求取其全球球谐系数,并选择图 8 所示的绕飞轨道进行验证,计算 PI,结果见表 10.可见,基于局部球谐系数的球谐函数法在布里渊球域内针对该局部活动区域仍能保证较高的重力场建模精度.

表 9　Eros 北极盘旋轨道 PI 计算结果

抽取轨道测试点数目/个	性能指标 PI/%		
	检验点方式(1)	检验点方式(2)	检验点方式(4)
100	96.963 3	99.479 1	99.669 9
700	85.984 9	98.067 6	99.385 1
2 000	79.084 4	95.190 1	96.796 8

表 10　Eros 绕飞轨道 PI 计算结果

抽取轨道测试数目/个	性能指标 PI/%	
	绕飞区域选取检验点	检验点方式(1)
200	99.627 9	63.035 1
700	96.482 7	180.682 5
2 000	93.765 8	567.093 7

5　结　语

本文讨论了小行星球重力场球谐系数计算相关问题.通过定性讨论和定量分析,结果表明均匀多面体模型和均匀分布的检验点保证了高精度的全球球谐系数的获得.针对探测器在某一特定区域活动情况,提出局部球谐系数概念,提高了局部区域重力场建模精度,扩展了球谐函数法的应用范围.

重力场模型提供分析、描述和设计地球表面及其外空间一切物体力学行为的先验重力场约束.精细的重力场信息为小行星探测任务的成功提供保障.而到目前为止,小行星重力场描述虽然众多,但都存在一定缺陷.因此,寻找一种以动态观、整体论的方法描述的具有普适意义重力场模型,更加直观地解释分析小行星重力场特性,具有一定的必要性和紧迫性,也将成为未来小行星探测的一大挑战.

参考文献

[1] ZUBER M T, SMITH D E, CHENG A F, et al. The shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker laser rangefinder [J]. Science, 2000, 289(5487): 2097-2101.

[2] BROSCHART S B, SCHEERES D J. Control of hovering spacecraft near small bodies: application to asteroid 25143 Itokawa [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28(2): 343-354.

[3] YANO H, KUBOTA T, MIYAMOTO H, et al. Touchdown of the hayabusa spacecraft at the Muses Sea on Itokawa [J]. Science, 2006, 312(5778): 1350-1353.

[4] 徐伟彪, 赵海斌. 小行星深空探测的科学意义和展望 [J]. 地球科学进展, 2005, 20(11): 1183-1190.

[5] CASTOTTO S, MUSOTTO S. Methods for computing the potential of an irregular, homogeneous, solid body and its gradient [J]. AIAA Paper, 2000, 4023:82-96.

[6] KAULA W M. Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy [M]. Mineola: Dover Publications, 2000:4-8.

[7] WERNER R A, SCHEERES D J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 castalia [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1997, 65(3):313-344.

[8] PARK R S, WERNER R A, BHASKARAN S. Estimating small-body gravity field from shape model and navigation data [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(1): 212-221.

[9] SCHEERES D J. Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: applications to asteroids [J]. Icarus, 1994, 110(2): 225-238.

[10] HU W, SCHEERES D J. Numerical determination of stability regions for orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields [J]. Planetary and Space Science, 2004, 52(8): 685-692.

[11] SCHEERES D J. Orbit mechanics about asteroids and comets [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2012, 35(3): 987.

[12] 张振江, 崔祜涛, 任高峰. 不规则形状小行星引力环境建模及球谐系数求取方法[J]. 航天器环境工程, 2010, 27(3): 383-388.

[13] 宁津生. 地球重力场模型及其应用[J]. 冶金测绘, 1994, 3(2): 2-6.

[14] LI J C, CHAO D B, NING J S. Spherical cap harmonic expansion for local gravity-field representation [J]. Manuscripta geodaetica, 1995, 20(4): 265-277.

[15] National Aeronautics and Space Administration. http://sbn.psi.edu/pds/resource/rshape.html. 2010-4-20.

(编辑　张　宏)