

doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.2015.09.005

多重时滞离散非线性系统的鲁棒预测控制

周卫东, 郑 兰, 廖成毅, 蔡佳楠

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 150001 哈尔滨)

摘要: 为解决一类同时存在多重状态时滞、输入时滞和非线性扰动的不确定离散非线性系统的控制问题, 提出一种具有状态反馈控制结构的鲁棒模型预测控制器设计方法. 首先, 充分利用时滞的上下界信息构造一个改进的二次 Lyapunov-Krasovskii 泛函; 其次, 利用线性矩阵不等式(LMI)方法将 min-max 最优化求解困难的问题转化成具有 LMI 约束的凸优化问题, 并给出鲁棒预测控制器存在的充分条件及其表达式. 理论证明该方法设计的控制器保证闭环系统鲁棒渐进稳定. 仿真算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 非线性扰动; 时滞; 不确定性; 状态反馈; 模型预测控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2015)09-0024-07

Robust prediction control for multiple time delay discrete nonlinear system

ZHOU Weidong, ZHENG Lan, LIAO Chengyi, CAI Jianan

(College of Automation, Harbin Engineering University, 150001 Harbin, China)

Abstract: In this paper, a robust model prediction controller with state-feedback structure is constructed for a class of uncertain discrete nonlinear systems with multiple states time-delay, inputs time-delay and nonlinear perturbation. Firstly, an improved quadratic Lyapunov-Krasovskii functional is constructed by making full use of the upper and lower bounds of the time-delay information, and then the difficulty of solving min-max optimization problem is transformed into convex optimization problem with linear matrix inequality (LMI) constraints by utilizing LMI technique. Simultaneously, the sufficient conditions for the existence of robust predictive controller and the expression of the controller are given. Theoretically, it is proved that the designed controller can guarantee the closed-loop system is asymptotically stable. Finally, simulation results demonstrate the feasibility of the proposed scheme.

Keywords: time-delay; nonlinear perturbation; uncertain; state-feedback; model prediction control; liner matrix inequalities (LMIs)

模型预测控制作为一类新型的计算机控制算法已被工业界广泛应用^[1]. 鲁棒预测控制不仅具有鲁棒控制对不确定性的处理方法而且还具有预测控制的滚动优化思想, 可以有效处理模型的不确定性与时滞问题. 因此, 得到学者们的极大重视^[2]. 当时滞系统中存在非线性扰动时, 如何保证控制器的指定性能更是一个复杂的问题. 因此, 有关时滞系统的鲁棒预测控制的研究具有一定的挑战性. 为了解决时滞系统的鲁棒模型预测控制问题, 基于 LMI 方法提出的 min-max 鲁棒预测控制得到了极大的关

注^[3-7]. 文献[3]研究了时滞为常数时的具有输入约束的离散时滞系统的鲁棒模型预测控制问题; 文献[4]应用预测控制解决时滞系统的控制问题, 但是没有考虑不确定性; 文献[5]研究了带有区间时滞的离散非线性系统鲁棒预测控制问题; 文献[6]针对一类多重状态时滞不确定离散线性系统研究了其鲁棒模型预测控制问题; 文献[7]针对一类不确定广义系统研究了同时带有状态和输入时滞的鲁棒预测控制问题; 文献[8]在文献[7]的基础上, 研究了具有非线性扰动的时滞不确定连续系统的鲁棒预测控制问题; 文献[9]研究了一类同时具有状态和输入时滞的不确定离散线性系统的鲁棒预测控制问题. 然而, 关于既具有非线性扰动又同时存在多重状态和输入时滞的不确定离散非线性系统的鲁棒预

收稿日期: 2014-02-28.

基金项目: 国家自然科学基金(61102107, 61374208).

作者简介: 周卫东(1966—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 郑 兰, zhenglan000@163.com.

测控制的研究还未见报道. 本文在文献[5,9]的基础上,研究了此类系统的鲁棒预测控制器设计问题.

1 问题描述

记 \mathbf{R}^n 为 n 维欧几里德空间, $\mathbf{R}^{n \times m}$ 为 $n \times m$ 维实矩阵的集合, \mathbf{I}_n 为 $n \times n$ 维单位矩阵, $\text{diag}\{\cdot\}$ 为对角块矩阵. 符号 $*$ 表示相应的对称块矩阵.

考虑如下带有非线性扰动且同时存在多重状态和输入时滞的不确定离散非线性系统为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & \mathbf{A}_0(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i(k)\mathbf{x}(k-\tau_i) + \\ & \mathbf{B}_0(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_1(k)\mathbf{u}(k-\tau) + \\ & f(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-\tau), \mathbf{x}(k-\tau_1), \dots, \\ & \mathbf{x}(k-\tau_m)). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 为系统状态, $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为系统输入, $f(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-\tau), \mathbf{x}(k-\tau_1), \dots, \mathbf{x}(k-\tau_m))$ 为非线性扰动.

为表述方便,令 $\mathbf{f}_k := f(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-\tau), \mathbf{x}(k-\tau_1), \dots, \mathbf{x}(k-\tau_m))$, 并且满足

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k \leq & \alpha_1^2 \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \alpha_2^2 \mathbf{x}^T(k-\tau)\mathbf{x}(k-\tau) + \\ & \beta_1^2 \mathbf{x}^T(k-\tau_1)\mathbf{x}(k-\tau_1) + \dots + \beta_m^2 \mathbf{x}^T(k-\tau_m)\mathbf{x}(k-\tau_m). \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $0 < \tau < \tau_1 < \dots < \tau_m$ 为系统的时滞, $\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\varphi}(k)$, $-\tau_m \leq k \leq 0$ 为系统的初始条件. 系统(1)的系统矩阵是未知的,并且可以表示成凸组合形式,即

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_0(k) \ \mathbf{A}_1(k) \ \dots \ \mathbf{A}_m(k) \ \mathbf{B}_0(k) \ \mathbf{B}_1(k)] \in & \boldsymbol{\Omega}, \\ \boldsymbol{\Omega} = \text{Co}\{[\mathbf{A}_{0i} \ \mathbf{A}_{1i} \ \dots \ \mathbf{A}_{mi} \ \mathbf{B}_{0i} \ \mathbf{B}_{1i}], \\ & \dots, [\mathbf{A}_{0L} \ \mathbf{A}_{1L} \ \dots \ \mathbf{A}_{mL} \ \mathbf{B}_{0L} \ \mathbf{B}_{1L}]\}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: Co 为由 L 个顶点 $[\mathbf{A}_{0i} \ \mathbf{A}_{1i} \ \dots \ \mathbf{A}_{mi} \ \mathbf{B}_{0i} \ \mathbf{B}_{1i}]$, \dots , $[\mathbf{A}_{0L} \ \mathbf{A}_{1L} \ \dots \ \mathbf{A}_{mL} \ \mathbf{B}_{0L} \ \mathbf{B}_{1L}]$ 构成的凸多面体集,即存在 L 个非负系数 $0 \leq \lambda_i(k) \leq 1 (i=1,2,\dots,$

$L)$, $\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) = 1$, 使得

$$[\mathbf{A}_0(k) \ \mathbf{A}_1(k) \ \dots \ \mathbf{A}_m(k) \ \mathbf{B}_0(k) \ \mathbf{B}_1(k)] = \sum_{i=1}^L \lambda_i(k) [\mathbf{A}_{0i} \ \mathbf{A}_{1i} \ \dots \ \mathbf{A}_{mi} \ \mathbf{B}_{0i} \ \mathbf{B}_{1i}]. \quad (4)$$

针对不确定离散时滞系统(1),模型预测控制问题描述为如下的 min-max 优化问题:设计鲁棒预测控制器使不确定系统鲁棒稳定且获取如下的鲁棒性能指标,即需要考虑如下 min-max 优化问题,即

$$\min_{j=0,1,\dots,m} \max_{\substack{[\mathbf{A}_0(k+j) \ \mathbf{A}_1(k+j) \ \dots \ \mathbf{A}_m(k+j) \ \mathbf{B}_0(k+j) \ \mathbf{B}_1(k+j)] \in \boldsymbol{\Omega} \\ j \geq 0}} J_\infty(k), \quad (5)$$

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k+j|k)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k+j|k) + \mathbf{u}^T(k+j|k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k+j|k)], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+j+1|k) = & \mathbf{A}_0(k+j)\mathbf{x}(k+j|k) + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i(k+j) \\ & \mathbf{x}(k+j-\tau_i|k) + \mathbf{B}_0(k+j)\mathbf{u}(k+j|k) + \\ & \mathbf{B}_1(k+j)\mathbf{u}(k+j-\tau|k) + \mathbf{f}_{k+j}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $\mathbf{Q}_1 > \mathbf{0}, \mathbf{R} > \mathbf{0}$ 分别为性能指标中状态和控制量的对称加权矩阵. $\mathbf{u}(k+j|k)$ 为 k 时刻对 $k+j$ 时刻输入的预测, $\mathbf{x}(k+j|k)$ 为 k 时刻对 $k+j$ 时刻状态的预测,并且有 $\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k)$, $\mathbf{x}(k-j|k) = \mathbf{x}(k-j)$, $j \geq 1$. 在 min-max 优化问题(5)~(7)中,式(6)为未来控制输入的无限时域和系统预测状态的二次鲁棒性能指标,式(7)为系统的状态预测模型.

针对系统(1),设计如下的状态反馈控制律:

$$\mathbf{u}(k+j|k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k+j|k). \quad (8)$$

控制目标是求得鲁棒模型的预测控制器中的增益矩阵 \mathbf{K} ,并要求控制输入 $\mathbf{u}(k+j|k)$, $j \geq 0$,使得闭环系统渐进稳定. 针对系统(1),构造如下的 Lyapunov-Krasovskii 函数:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(k)) = & \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}_0\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{x}^T(k-i)\mathbf{P}_\tau\mathbf{x}(k-i) + \\ & \sum_{i=\tau+1}^{\tau_1} \mathbf{x}^T(k-i)\mathbf{P}_{\tau_1}\mathbf{x}(k-i) + \sum_{i=\tau_m-1+1}^{\tau_m} \mathbf{x}^T(k-i) \\ & \mathbf{P}_{\tau_m}\mathbf{x}(k-i) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\mathbf{P} = \text{diag}\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_\tau, \mathbf{P}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{P}_{\tau_m}, \mathbf{I}_n\}$, $\mathbf{P}_j > \mathbf{0}$, $j = 0, \tau, \tau_1, \dots, \tau_m$.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k) = & [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}^T(k-\tau), \mathbf{x}^T(k-\tau_1), \\ & \dots, \mathbf{x}^T(k-\tau_m), \mathbf{f}_k^T]^T. \end{aligned}$$

假设在每一个 $k \geq \tau$ 时刻是可测量的. 在 k 时刻,假设对所有的

$[\mathbf{A}_0(k) \ \mathbf{A}_1(k) \ \dots \ \mathbf{A}_m(k) \ \mathbf{B}_0(k) \ \mathbf{B}_1(k)] \in \boldsymbol{\Omega}$, $i \geq 0$, 有

$$V(\mathbf{x}(k+j+1|k)) - V(\mathbf{x}(k+j|k)) \leq -\mathbf{l}(x, u, j). \quad (10)$$

其中: $\mathbf{l}(x, u, j) = \mathbf{x}^T(k+j|k)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k+j|k) + \mathbf{u}^T(k+j|k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k+j|k)$.

为了使 $J_\infty(k)$ 有界,令 $\mathbf{w}(\infty|k) = \mathbf{0}$, 因此 $V(\mathbf{x}(\infty|k)) = \mathbf{0}$. 将不等式(10)两边同时从 $j=0$ 到 $j=\infty$ 求和得

$$-V(\mathbf{x}(k|k)) \leq -J_\infty(\mathbf{x}(k|k)). \quad (11)$$

因此

$$\max_{[\mathbf{A}_0(k) \ \mathbf{A}_1(k) \ \dots \ \mathbf{A}_m(k) \ \mathbf{B}_0(k) \ \mathbf{B}_1(k)] \in \boldsymbol{\Omega}; j \geq 0} J_\infty(\mathbf{k}) \leq V(\mathbf{x}(k|k)) \leq \gamma(k). \quad (12)$$

为了得到本文的主要定理,先给出下面的引理.

引理 1^[10] (Schur 补) 矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(x) & \mathbf{S}(x) \\ \mathbf{S}^T(x) & \mathbf{R}(x) \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (13)$$

其中: $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$, $S(x)$ 为关于 x 的仿射函数, 则式(13)等价于

$$\begin{cases} Q(x) > 0, R(x) - S^T(x) Q^{-1}(x) S(x) > 0; \\ R(x) > 0, Q(x) - S(x) R^{-1}(x) S^T(x) > 0. \end{cases}$$

引理 2^[11] 设 $W_0(x)$ 和 $W_1(x)$ 都是关于 $x \in R^n$ 的二次函数, 如果对任意的 $x \in R^n - \{0\}$, 有 $W_1(x) < 0$, 并且存在常数 $\rho > 0$ 使得下式成立, 则有 $W_0(x) < 0$, 且

$$W_0(x) - \rho W_1(x) < 0, x \neq 0. \quad (14)$$

2 主要结论

2.1 基于 LMI 的模型预测控制器设计

定理 1 考虑含有延时的不确定离散时滞系统

$$\begin{pmatrix} U_{11} & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & U_{22} & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{11} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & M_{mm} & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\rho I_n & \mathbf{0} \\ A_{0i}Q + B_{0i}Y & B_{1i}KQ_\tau & A_{1i}Q_{\tau_1} & \cdots & A_{mi}Q_{\tau_m} & I_n & -Q \end{pmatrix} < \mathbf{0}, i = 1, \dots, L. \quad (17)$$

其中:

$$w(k) = [x^T(k), x^T(k-\tau), x^T(k-\tau_1), \dots, x^T(k-\tau_m), f_k^T]^T, P = \text{diag}\{P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, I_n\},$$

$$U_{11} = \begin{pmatrix} -Q & * & * & * & * \\ Q & -Q_\tau & * & * & * \\ \alpha_1 Q & \mathbf{0} & -\frac{1}{\rho} I_n & * & * \\ Q_1^2 Q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma(k) I_n & * \\ R^2 Y & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma(k) I_n \end{pmatrix},$$

$$U_{22} = \begin{pmatrix} -Q_\tau & * & * \\ Q_\tau & -Q_{\tau_1} & * \\ \alpha_2 Q_\tau & \mathbf{0} & -\frac{1}{\rho} I_n \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -Q_{\tau_1} & * & * \\ Q_{\tau_1} & -Q_{\tau_2} & * \\ \beta_1 Q_{\tau_1} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\rho} I_n \end{pmatrix},$$

$$M_{mm} = \begin{pmatrix} -Q_m & * \\ \beta_m Q_{\tau_m} & -\frac{1}{\rho} I_n \end{pmatrix}.$$

证明 由于式(9)是性能指标的上界, 可以通过求解下面的问题把这个界减至最低

$$\min_{\gamma(k), Q, Q_\tau, Q_{\tau_i}, Y, P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, \rho} \text{tr}(\text{diag}\{P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, I_n\}),$$

(1), 同时令 $x(k|k)$ 为采样 k 时刻状态 $x(k)$ 的测量值. 如果存在标量 $\gamma(k) > 0, \rho > 0$ 及对称的正定矩阵 $Q, Q_\tau, Q_{\tau_i}, P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}$ 和适当维数的矩阵 Y 满足式(15)~(17)形式的线性矩阵不等式优化问题, 那么一定存在状态反馈控制律 u 满足性能目标(10), 其中状态反馈增益 $K = YQ^{-1}$.

$$\min_{\gamma(k), Q, Q_\tau, Q_{\tau_i}, Y, P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, \rho} \text{tr}(\text{diag}\{P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, I_n\}), \quad (15)$$

$$\text{s.t.} \begin{pmatrix} \gamma(k) & w^T(k)P^T \\ Pw(k) & P \end{pmatrix} \geq 0, \quad (16)$$

$$\text{s.t.} w^T(k)Pw(k) \leq \gamma(k). \quad (18)$$

$$w(k) = [x^T(k), x^T(k-\tau), x^T(k-\tau_1), \dots, x^T(k-\tau_m), f_k^T]^T, P = \text{diag}\{P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, I_n\}.$$

应用 Schur 补, 式(18)可写为

$$\begin{pmatrix} \gamma(k) & w^T(k) \\ Pw(k) & P^{-1} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (19)$$

将式(19)分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, P\}$, 则有

$$\begin{pmatrix} \gamma(k) & w^T(k)P^T \\ Pw(k) & P \end{pmatrix} \geq 0, \quad (20)$$

则不等式(16)成立. 下面将证明不等式(17)成立.

取 Lyapunov-Krasovskii 函数(9), 求差分有

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1|k)) - V(x(k|k)) = \sum_{i=1}^{m+2} \Delta V_i(x(k)), \quad (21)$$

$$\Delta V_1(x(k)) = w^T(k) \Pi_1^T P_0 \Pi_1 w(k) - x^T(k) P_0 x(k), \quad (22)$$

$$w(k) = [x^T(k), x^T(k-\tau), x^T(k-\tau_1), \dots, x^T(k-\tau_m), f_k^T]^T, \Pi_1 = [A_0(k) + B_0(k)K \ B_1(k)K \ A_1(k) \ \cdots \ A_m(k) \ I_n],$$

$$\Delta V_2(x(k)) = w^T(k) \text{diag}\{P_\tau, -P_\tau, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\} w(k), \quad (23)$$

$$\Delta V_{m+2}(x(k)) = w^T(k) \text{diag}\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, -P_{\tau_m}, \mathbf{0}\} w(k). \quad (24)$$

把式(22)~(24)代入到式(21), 有

$$\Delta V(x(k)) = w^T(k) (\Theta_1 + \Pi_1^T P_0 \Pi_1) w(k). \quad (25)$$

其中: $\Theta_1 = \text{diag}\{P_\tau - P_0, P_{\tau_1} - P_\tau, P_{\tau_2} - P_{\tau_1}, \dots, -P_{\tau_m}, \mathbf{0}\}$.

考虑式(10)和 $u(k) = Kx(k)$, 设

$$W_0(x) = \Delta V(x(k)) + l(x, u, k) = w^T(k) (\Theta_2 + \Pi_1^T P_0 \Pi_1) w^T(k). \quad (26)$$

其中: $\Theta_2 = \text{diag}\{P_\tau - P_0 + Q_1 + K^T R K, P_{\tau_1} - P_\tau, P_{\tau_2} - P_{\tau_1}, \dots, -P_{\tau_m}, \mathbf{0}\}$.

又因为式(2)可以写成

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \varphi_{22} & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \phi_{11} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \phi_{mm} & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\rho I_n & * \\ A_0(k) + B_0(k)K & B_1(k)K & A_1(k) & \dots & A_m(k) & I_n & -Q \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (29)$$

其中: $\varphi_{11} = Q_\tau^{-1} - Q^{-1} + \gamma^{-1}(k)(Q_1 + K^T R K) + \rho\alpha_1^2 I_n$,
 $\varphi_{22} = Q_{\tau_1}^{-1} - Q_\tau^{-1} + \rho\alpha_2^2 I_n$, $\phi_{11} = Q_{\tau_2}^{-1} - Q_{\tau_1}^{-1} + \rho\beta_1^2 I_n$,
 $\phi_{mm} = -Q_{\tau_m}^{-1} + \rho\beta_m^2 I_n$, $\rho = \gamma^{-1}(k)\lambda$.

$$W_1(x) = w^T(k) \Theta_3 w(k) < 0. \quad (27)$$

其中: $\Theta_3 = \text{diag}\{-\alpha_1^2 I_n, -\alpha_2^2 I_n, -\beta_1^2 I_n, \dots, -\beta_m^2 I_n, I_n\}$.

根据引理 2, 存在数 $\lambda > 0$ 使得 $W_0(x) - \lambda W_1(x) < 0$ 成立, 则 $W_0(x) < 0$, 即

$$\Theta_2 + \Pi_1^T P_0 \Pi_1 - \lambda \Theta_3 < 0. \quad (28)$$

令 $Q = \gamma(k)P_0^{-1}$, $Q_\tau = \gamma(k)P_\tau^{-1}$, 且 $Q_{\tau_i} = \gamma(k)P_{\tau_i}^{-1}$, 根据 Schur 补, 式(28)成立等价于

将式(29)分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{Q, Q_\tau, Q_{\tau_1}, \dots, Q_{\tau_m}, I_n, I_n\}$, 并令 $Y = KQ$, 可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{11} & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \tilde{\varphi}_{22} & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\phi}_{11} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{\phi}_{mm} & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\rho I_n & * \\ A_0(k)Q + B_0(k)Y & B_1(k)KQ_\tau & A_1(k)Q_{\tau_1} & \dots & A_m(k)Q_{\tau_m} & I_n & -Q \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (30)$$

其中: $\tilde{\varphi}_{11} = QQ_\tau^{-1}Q - Q + \gamma^{-1}(k)QQ_1Q + \rho\alpha_1^2 QQ$, $\tilde{\varphi}_{22} = Q_\tau Q_{\tau_1}^{-1} Q_\tau - Q_\tau + \rho\alpha_2^2 Q_\tau Q_\tau$, $\tilde{\phi}_{11} = Q_{\tau_1} Q_{\tau_2}^{-1} Q_{\tau_1} - Q_{\tau_1} + \rho\beta_1^2 Q_{\tau_1} Q_{\tau_1}$, $\tilde{\phi}_{mm} = -Q_{\tau_m} + \rho\beta_m^2 Q_{\tau_m} Q_{\tau_m}$.

再利用 Schur 补有

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \Gamma_{22} & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Gamma_{11} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Gamma_{mm} & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\rho I_n & * \\ A_0(k)Q + B_0(k)Y & B_1(k)KQ_\tau & A_1(k)Q_{\tau_1} & \dots & A_m(k)Q_{\tau_m} & I_n & -Q \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (31)$$

其中: $\Gamma_{11} = U_{11}$, $\Gamma_{22} = U_{22}$, $\Gamma_{33} = M_{11}$, $\Gamma_{mm} = M_{mm}$.

又因为式关于系统矩阵满足 $[A_0(k) \ A_1(k) \dots A_m(k) \ B_0(k) \ B_1(k)] \in \Omega$, 根据凸集的基本性质, 式(31)成立当且仅当对凸包 Ω 的每个顶点都成立, 换句话说, 式(31)成立当且仅当式(17)成立.

2.2 控制算法

综合上面的控制器设计过程, 对应于定理 1 给出不确定离散时滞系统(1)的状态反馈鲁棒模型预测控制算法.

第 1 步 测量当前时刻系统的状态 $x(k)$, 并

获得过去时刻的状态 $x(k-1), \dots, x(k-\tau), x(k-\tau_1), \dots, x(k-\tau_m)$.

第 2 步 令 $x(k|k) = x(k), x(k-\tau_1|k) = x(k-\tau_1), \dots, x(k-\tau_m|k) = x(k-\tau_m)$.

第 3 步 选择适当的对称正定矩阵 Q_1 和 R .

第 4 步 定义优化问题(5)~(7)中的各个变量,标量 $\gamma(k) > 0, \rho > 0$, 正定对称矩阵 $Q, Q_\tau, Q_{\tau_i}, P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}$ 和适当维数的矩阵 Y .

第 5 步 用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解优化问题(5)~(7), 得到最优解 $\gamma(k), \rho, Y, Q, Q_\tau, Q_{\tau_i}, P_0, P_\tau, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}$.

第 6 步 计算出状态反馈预测控制控制器增益矩阵 $K = YQ^{-1}$.

第 7 步 将 k 时刻的控制器 $u(k) = Kx(k|k)$ 作用于被控系统(1).

第 8 步 令 $k = k + 1$, 重复第 1 步至第 7 步.

2.3 可行性与稳定性分析

引理 3 定理 1 中 k 时刻任意的最优化的可行解对于 $t > k$ 时刻也是可行的.

证明 不难发现定理 1 中采样时刻 k 的最优解是采样时刻 $k + 1$ 可行的次最优解. 这是由于 $\delta = \{x \in R^{n_x} | x^T P_j x \leq \gamma\}$ 是预测状态 x 的一个不变椭球. 因此, 在 $k + 1$ 时刻, 最优化至少有一个可行解, 同时由于集合是凸面的, 此问题只有一个最优解.

定理 2 由定理 1 得到的可行鲁棒模型预测控制律使得闭环系统鲁棒渐进稳定.

证明 为了证明渐进稳定性, 建立 Lyapunov 函数 $V(x(k)) = w^T(k) P w(k)$, 其中 $P > 0$ 是 k 时刻的最优解, 由定理 1 的证明可知在闭环内这个函数是一个严格递减的 Lyapunov 函数. 根据离散 Lyapunov 稳定性理论可以说明闭环系统鲁棒稳定. 证毕.

定理 1 中依赖于系统状态的线性矩阵不等式(16)必然可以使得所有状态都在椭球 δ 内. 因此, 本文将状态反馈 $u = YQ^{-1}x$ 应用于任意的不为零的状态 $x(k) \in \delta$, 从而确保实时 $x^T(k+i+1)P_j x(k+i+1) < x^T(k+i)P_j x(k+i) \leq 1, i \geq 0$.

因此, $x(k+i) \in \delta, i \geq 0$ 且 $x(k) \rightarrow 0$ 时.

3 拓展情况

当不确定离散时间系统(1)不涉及输入时滞, 即 $B_1(k) = 0$ 时结论如下.

推论 1 考虑没有输入时滞的不确定离散时间系统(1)为

$$x(k+1) = A_0(k)x(k) + \sum_{i=1}^m A_i(k)x(k-\tau_i) +$$

$$B_0(k)u(k) + f(x(k), x(k-\tau_1), \dots, x(k-\tau_m)). \tag{32}$$

且 Lyapunov-Krasovskii 函数为

$$V(x(k)) = x^T(k)P_0x(k) + \sum_{i=1}^{\tau_1} x^T(k-i)P_{\tau_1}x(k-i) + \sum_{i=\tau_m-1+1}^{\tau_m} x^T(k-i)P_{\tau_m}x(k-i). \tag{33}$$

那么, 如果存在对称正定矩阵 $Q, Q_{\tau_i}, P_0, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}$ 和适当维数的矩阵 Y 满足式(34)~(36)形式的线性矩阵不等式, 则存在一个状态反馈控制律

$$u(k+j|k) = Kx(k+j|k), i \geq 0,$$

满足式(10)性能.

$$\min_{\gamma(k), Q, Q_{\tau_i}, Y, P_0, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, \rho} \text{tr}(\text{diag}\{P_0, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, I_n\}), \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma(k) & w^T(k)P^T \\ Pw(k) & P \end{pmatrix} \geq 0, \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} N_{00} & * & * & * & * & * \\ 0 & N_{11} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_{mm} & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho I_n & * \\ A_{0i}Q + B_{0i}Y & A_{1i}Q_{\tau_1} & \dots & A_{mi}Q_{\tau_m} & I_n & -Q \end{pmatrix} < 0, \tag{36}$$

$i = 1, \dots, L.$

其中:

$$w(k) = [x^T(k), x^T(k-\tau_1), \dots, x^T(k-\tau_m), f_k^T]^T, P = \text{diag}\{P_0, P_{\tau_1}, \dots, P_{\tau_m}, I_n\},$$

$$N_{11} = \begin{pmatrix} -Q_{\tau_1} & * \\ \beta_1 Q_{\tau_1} & -\frac{1}{\rho} I_n \end{pmatrix}, N_{mm} = \begin{pmatrix} -Q_{\tau_m} & * \\ \beta_m Q_{\tau_m} & -\frac{1}{\rho} I_n \end{pmatrix},$$

$$N_{00} = \begin{pmatrix} -Q & * & * & * & * \\ Q & -Q_{\tau_1} & * & * & * \\ \alpha_1 Q & 0 & -\frac{1}{\rho} I_n & * & * \\ Q_1^{\frac{1}{2}} Q & 0 & 0 & -\gamma(k) I_n & * \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & 0 & -\gamma(k) I_n \end{pmatrix}.$$

证明 证明类似定理 1 的证明, 故略.

当系统(1)只有输入延迟时, 即 $B_0(k) = 0$, 有以下结果.

推论 2 考虑具有输入延迟的不确定离散时间系统(1), 则

$$x(k+1) = A_0(k)x(k) + \sum_{i=1}^m A_i(k)x(k-\tau_i) + B_1(k)u(k-\tau) + f(x(k), x(k-\tau), x(k-\tau_1), \dots, x(k-\tau_m)). \tag{37}$$

且 Lyapunov-Krasovskii 函数为

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{x}^T(k-i) \mathbf{P}_{\tau} \mathbf{x}(k-i) + \sum_{i=\tau+1}^{\tau_1} \mathbf{x}^T(k-i) \mathbf{P}_{\tau_1} \mathbf{x}(k-i) + \sum_{i=\tau_{m-1}+1}^{\tau_m} \mathbf{x}^T(k-i) \mathbf{P}_{\tau_m} \mathbf{x}(k-i). \quad (38)$$

那么, 如果存在对称正定矩阵 $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_{\tau_i}, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{P}_{\tau_m}$ 和适当维数的矩阵 \mathbf{Y} 满足式 (39) ~ (41) 形

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22} & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{11} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_{mm} & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\rho \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{0i} \mathbf{Q} & \mathbf{B}_{li} \mathbf{K} \mathbf{Q}_{\tau} & \mathbf{A}_{li} \mathbf{Q}_{\tau_1} & \dots & \mathbf{A}_{mi} \mathbf{Q}_{\tau_m} & \mathbf{I}_n & -\mathbf{Q} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, L. \quad (41)$$

其中:

$$\mathbf{w}(k) = [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}^T(k-\tau), \mathbf{x}^T(k-\tau_1), \dots, \mathbf{x}^T(k-\tau_m), \mathbf{f}_k^T]^T,$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{\tau}, \mathbf{P}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{P}_{\tau_m}, \mathbf{I}_n\},$$

$$\mathbf{U}_{11} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Q} & * & * & * & * \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{Q}_{\tau} & * & * & * \\ \alpha_1 \mathbf{Q} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\rho} \mathbf{I}_n & * & * \\ \mathbf{Q}_{\tau}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma(k) \mathbf{I}_n & * \\ \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma(k) \mathbf{I}_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{22} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_{\tau} & * & * \\ \mathbf{Q}_{\tau} & -\mathbf{Q}_{\tau_1} & * \\ \alpha_2 \mathbf{Q}_{\tau} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\rho} \mathbf{I}_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_{\tau_1} & * & * \\ \mathbf{Q}_{\tau_1} & -\mathbf{Q}_{\tau_2} & * \\ \beta_1 \mathbf{Q}_{\tau_1} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\rho} \mathbf{I}_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{mm} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_m & * \\ \beta_m \mathbf{Q}_{\tau_m} & -\frac{1}{\rho} \mathbf{I}_n \end{pmatrix}.$$

证明 过程类似推论 1 的证明, 故省略.

4 仿真结果

考虑如下具有非线性扰动且同时带有状态和输入时滞的不确定离散非线性系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_0(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_1(k) \mathbf{x}(k-\tau_1) + \mathbf{B}_0(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_1(k) \mathbf{u}(k-\tau) +$$

式的线性矩阵不等式, 则存在一个状态反馈控制律

$$\mathbf{u}(k+j|k) = \mathbf{K} \mathbf{x}(k+j|k), \quad i \geq 0,$$

满足式 (10) 性能.

$$\min_{\gamma(k), \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_{\tau}, \mathbf{Q}_{\tau_1}, \mathbf{Y}, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{\tau}, \mathbf{P}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{P}_{\tau_m}, \rho} \Lambda, \quad (39)$$

$$\Lambda = \text{tr}(\text{diag}\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{\tau}, \mathbf{P}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{P}_{\tau_m}, \mathbf{I}_n\}),$$

$$\text{s.t.} \begin{pmatrix} \gamma(k) & \mathbf{w}^T(k) \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} \mathbf{w}(k) & \mathbf{P} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (40)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-\tau), \mathbf{x}(k-\tau_1)).$$

(42)

其中: $[\mathbf{A}_0(k) \quad \mathbf{A}_1(k) \quad \mathbf{B}_0(k) \quad \mathbf{B}_1(k)] \in \Omega,$

$$\Omega = \text{Co}\{[\mathbf{A}_{01} \quad \mathbf{A}_{11} \quad \mathbf{B}_{01} \quad \mathbf{B}_{11}], [\mathbf{A}_{02} \quad \mathbf{A}_{12} \quad \mathbf{B}_{02} \quad \mathbf{B}_{12}]\}.$$

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0 & -0.36 \\ 0.07 & 0.9 & 0 \\ 0.05 & 0.2 & 0.77 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{01} = \begin{pmatrix} 0.33 \\ 0 \\ 0.67 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{02} = \begin{pmatrix} 0.71 & 0 & -0.45 \\ 0.07 & 0.9 & 0 \\ -0.05 & 0.2 & 0.64 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{02} = \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0 \\ 0.51 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 0.13 \\ -0.2 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} 0.07 \\ -0.2 \\ -0.03 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-\tau), \mathbf{x}(k-\tau_1)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3x_2(k-\tau)0.2x_1(k-\tau) \\ 0.4x_3(k-\tau_1)\sin(x_1(k-\tau_1)) \end{bmatrix}.$$

假设初始状态为 $\mathbf{x}(-2) = [0.5 \quad 0 \quad 0]^T,$

$\mathbf{x}(-1) = [1 \quad 0 \quad 0]^T, \mathbf{x}(0) = [1.5 \quad 0 \quad 0]^T.$

根据式 (2), 取 $\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.2, \beta_1 = 0.4,$ 非线性扰动满足式 (2), 要求设计控制器满足性能指标 (5). 时滞 $\tau_1 = 4, \tau = 1,$ 权重矩阵分别为 $\mathbf{Q}_1 = \text{diag}\{1, 1, 1\}, R = 0.3,$ 凸多面体中 $\lambda_1 = 0.4, \lambda_2 = 0.6,$ 则可以得到 $\gamma(k) = 41.7064.$ 图 1~3 分别给出了状态 $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$ 的变化曲线, 图 4 为控制器曲线图, 可以看出在该控制器的作用下, 系统是

稳定的而且性能也很好.

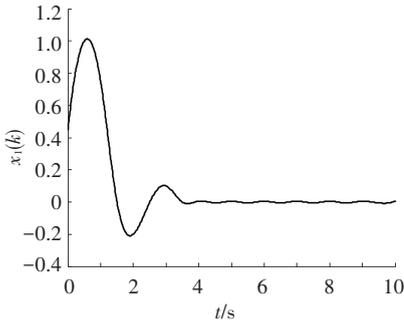


图1 状态 $x_1(k)$ 的时间响应曲线

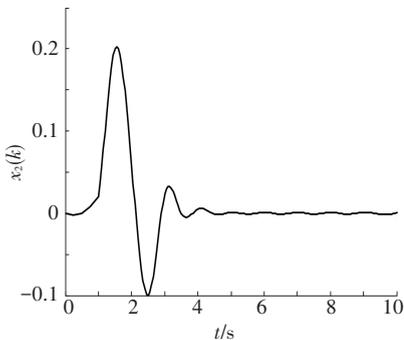


图2 状态 $x_2(k)$ 的时间响应曲线

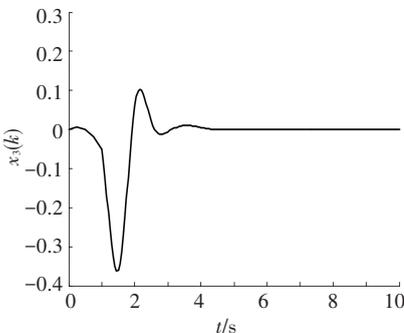


图3 状态 $x_3(k)$ 的时间响应曲线

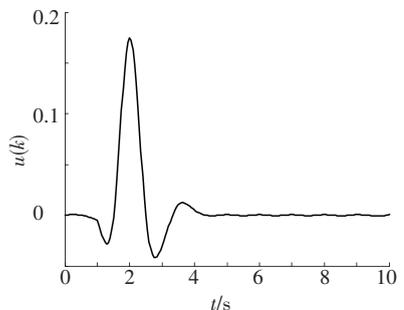


图4 控制输入曲线

5 结论

1) 提出一种基于 LMI 的时滞离散非线性系统的鲁棒预测控制算法,解决了带有非线性扰动和时滞的不确定离散非线性系统的控制器设计问题.

2) 算法采用状态反馈控制结构,应用 LMI 技术,将无限时域 min-max 优化问题转化为具有 LMI 约束的凸优化问题,得到了反馈控制律存在的新判据,并且分析了控制算法的可行性,证明了系统的鲁棒性.

3) 通过仿真,结果表明了此方法的有效性.

参考文献

- [1] 何德峰, 丁宝苍, 于树友. 非线性系统模型预测控制若干基本特点与主题回顾[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(3): 273-287.
- [2] KOTHARE M, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [3] CHEN Qiuxia, HE Defeng, YU Li. Input-to-state stability of min-max MPC scheme for nonlinear time-varying delay systems [J]. Asian Journal of Control, 2012, 14(2): 489-501.
- [4] KWON W H, LEE Y S, HAN S H. General receding horizon control for linear time-delay systems [J]. Automatica, 2004, 40(9): 1603-1611.
- [5] LI Jianxiong, FANG Yiming, SHI Shengli. Robust MPC algorithm for discrete-time systems with time-varying delay and nonlinear perturbations[C]//Proceedings of the 29th Chinese control conference. Beijing: IEEE Press, 2010: 3128-3133.
- [6] ZHAO Juncheng, FANG Yiming, LI Jianxiong. Robust predictive control for a class of uncertain discrete system with multiple state delays [C]//Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai: IEEE Press, 2011: 3372-3376.
- [7] 刘晓华, 王利杰. 带有状态和输入时滞的不确定广义系统的鲁棒预测控制[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(4): 527-532.
- [8] 苏成利, 赵家程, 李平. 一类具有非线性扰动的多重时滞不确定系统鲁棒预测控制[J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 644-649.
- [9] ZHANG Yuxian, LIU Min, WANG Janhui, et al. Robust model predictive control for uncertain discrete-time system with both states and input delays [C]//2008 Chinese Control and Decision Conference (CCDC 2008). Yantai: IEEE Press, 2008: 279-284.
- [10] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 8.
- [11] MA X J, XIANG S H, XU B G, et al. H-infinity robust stability for uncertain systems with multiple time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2006, 23(4): 631-635.

(编辑 魏希柱)