DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201604121

一种用于结构可靠性分析的 Kriging 学习函数

孙志礼, 李 瑞, 闫玉涛, 王 健

(东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819)

摘 要: 为提高基于 Kriging 模型的结构可靠性分析方法的效率,分析现有学习函数的不足,提出一种新的自适应学习函数 *VF*. 该学习函数同时考虑学习点的 Kriging 方差和联合概率密度函数值对失效概率估计精度的影响,避免对概率密度函数值过小的区域抽样造成的样本点浪费,提高了学习效率. 根据 Monte Carlo 方法生成大量候选样本点,定义学习函数最大值点为最佳样本点;提出一种适合该学习函数的学习停止条件,既保证失效概率的精度又保证学习选点次数较少;分析两个数值算例. 结果表明:与其他方法相比,所提出方法能够在较少样本数量的情况估计出较准确的失效概率值,其在迭代收敛速度、准确性及稳定性方面都具有较好的效果,且该方法能够应用于工程中隐式且非线性程度较高情况.

关键词: 结构可靠性;Kriging 模型;失效概率;主动学习;蒙特卡罗方法

中图分类号: TB114.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2017)07-0146-06

A Kriging based learning function for structural reliability analysis

SUN Zhili, LI Rui, YAN Yutao, WANG Jian

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: To improve the efficiency of Kriging based structural reliability analysis, a new adaptive learning function *VF* is proposed after analyzing the weakness of existing learning functions. The learning function VF combines variance and joint probability density function both of which can affect the accuracy of estimated failure probability. This method can avoid wasting samples caused by sampling in the area where the value of joint probability density function is low, and increase learning efficiency. Firstly, a large number of candidate sample points are generated by Monte Carlo method, and the point that maximizes the proposed learning function value is defined as the best one. Secondly, a suitable stopping condition is proposed, which can not only ensure the accuracy of failure probability but also reduce iterations dramatically. Finally, two numerical examples are analyzed to show that the proposed method requires fewer calls to the performance function than other methods and it has high convergence speed, good accuracy and stability. And the method can be used in engineering problems with implicit and high nonlinear performance function.

Keywords: structural reliability; Kriging model; failure probability; active learning; Monte Carlo method

一次二阶矩法、二次可靠性方法、Monte Carlo 方法[1]等广泛应用于可靠性分析中. 但是,一次二阶矩方法、二次可靠性方法等只适用于显式功能函数,而对于工程问题,大多数情况下功能函数是隐式函数,这时可以应用数值模拟的方法进行分析. 基于数值模拟的可靠性分析方法如 Monte Carlo 方法是求解失效概率直观、精确的一种方法,但是它需要大量的随机样本,无法在短时间内进行可靠性评估. 代理模型的方法在一定程度上解决了这类隐式可靠性分析问题, 如响应面法[2-6]、人工神经网络方法[6-7]、支持向量机、Kriging 方法等[8-12]. Kriging 模型作为一种新的代理模型,最初应用于地质统计学中,现在,它被应用在可靠性评估中. Kriging 方法最大的特点是不需要建立一个特定的数学模型,即是一种包含了多项式和变差函数的模型,避免了只有多项式模型对结构可靠度计算精度的影响. 近十几年,Kriging 方法在工程领域得到了广泛应用[13].

由于 Kriging 模型采用 Gaussian 随机过程模拟,样本集 Ω 在构造 Kriging 预测模型过程中发挥重要作用, Ω 的构成对 $\hat{G}(x)$ 精度有很大影响. 通常情况下,增加 Ω 中样本点数有益于降低代理模型误差,改善 $\hat{P}_f$ 准确性;然而,样本点数过多会同时增加有限元数值仿真及 Monte Carlo 方法近似计算 P_f 的计算量. 因此,需要一种高效抽取样本点的方法,在控制 Ω 样本点数情况下得到足够精度的代理模型及 $\hat{P}_f$. 为此,学者提出学习函数帮助提高抽取样本的效率.

基于 Kriging 模型的学习函数中,应用最广泛的是 Bichon 等[14]提出的 *EFF* (Expected Feasibility

收稿日期: 2016-04-25
基金项目: 国家科技重大项目(2013ZX04011-011)
作者简介: 孙志礼(1957—),男,教授,博士生导师
通信作者: 孙志礼,zhlsun@mail.neu.edu.cn

Function）函数及 Echard 等[15-16]提出的 U 函数. EFF 函数能够用来度量点 $\boldsymbol{x}$ 落在真实极限状态函数 $G(\boldsymbol{x})=0$ 附近的期望，而 U 函数是点 $\boldsymbol{x}$ 系统响应被错误分类可能性的度量. EFF 和 U 在输入变量 $\boldsymbol{X}$ 维数不高情况下效率很高，随着维数的增加效率会逐渐降低，因此，不适合用于多维情况的可靠性分析中.

本文基于 Kriging 模型，根据现有模型的不足，考虑联合概率密度函数对失效概率预测准确性的影响，提出了一种新的学习函数及相应的学习停止条件，将学习函数和学习停止方法与 Monte Carlo 方法相结合，提出一种新学习方法，并通过两个例子对几种学习方法进行比较.

1　Kriging 模型

Kriging 模型是一种高效的插值方法，包含确定性和随机两个部分，确定性部分一般采用最小二乘多项式拟合，随机部分为高斯过程. 以最小方差无偏估计保证差值精度，通过最大似然法或交叉验证法确定高斯过程相关性参数.

Kriging 模型假设功能函数 $G(x)$ 可表示为

$$G(\boldsymbol{x})=\sum_{h=1}^{p}\beta_h g_h(\boldsymbol{x})+z(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}+z(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{g}(x)=[g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,g_p(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$ 是定义在输入变量 $\boldsymbol{X}$ 空间内的基函数，$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,\cdots,\beta_p]^{\mathrm{T}}$ 为与 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 对应的回归系数. 本文中暂定 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 为一次多项式. 式(1) 中 $z(\boldsymbol{x})$ 为零均值同方差高斯过程，$z(\boldsymbol{x}_i)$、$z(\boldsymbol{x}_j)$ 的协方差为

$$\mathrm{Cov}[z(\boldsymbol{x}_i),z(\boldsymbol{x}_j)]=\sigma^2R(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j;\boldsymbol{\theta}). \tag{2}$$

式中：σ^2 是高斯过程的方差. $R(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j;\boldsymbol{\theta})$ 表示 $z(\boldsymbol{x}_i)$ 和 $z(\boldsymbol{x}_j)$ 的相关系数，$\boldsymbol{\theta}$ 是相关函数 $R(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j;\boldsymbol{\theta})$ 的参数. 目前应用最广泛的是高斯相关函数：

$$R(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j;\boldsymbol{\theta})=\prod_{m=1}^{M}\exp[-\theta_m(x_i^m-x_j^m)^2]. \tag{3}$$

其中，x_i^m 表示向量 $\boldsymbol{x}_i$ 的第 m 个元素.

若已知样本集

$$\boldsymbol{\Omega}=\{(\boldsymbol{x}_i,y_i),i=1,2,\cdots,N\},$$

式(1)～(3)中未知参数 $\boldsymbol{\beta}$、σ^2、$\boldsymbol{\theta}$ 可通过极大似然法估计得到，

$$\max L(\boldsymbol{\theta})=-(N\ln(\hat{\sigma}^2)+\ln[\det(\boldsymbol{R})]).$$

式中：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}),$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Y},$$

$$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2),\cdots,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_N)]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{R}=(R(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j;\boldsymbol{\theta}))_{N\times N}.$$

分别用 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$、$\hat{\boldsymbol{\beta}}$、$\hat{\sigma}^2$ 表示 $\boldsymbol{\theta}$、$\boldsymbol{\beta}$、σ^2 的极大似然估计值. 点 $\boldsymbol{x}$ 的 Kriging 预测值可表示为 $\boldsymbol{Y}$ 的线性组合形式，

$$\hat{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}. \tag{4}$$

结合式(1)、(4)的估计误差为

$$\hat{G}(\boldsymbol{x})-G(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}-G(\boldsymbol{x})=$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Z}-z+(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

式中：$\boldsymbol{Z}=(z_1,z_2,\cdots,z_N)^{\mathrm{T}}$. 要实现 $\hat{G}(\boldsymbol{x})$ 的最小方差无偏性[11]，则 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ 需满足，

$$\begin{cases}\min\ \mathrm{var}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Z}-z),\\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}c(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=0.\end{cases} \tag{5}$$

求式(5)的最优解可得 $\hat{G}(\boldsymbol{x})$ 的 Kriging 表达式为

$$\mu_G(\boldsymbol{x})=\hat{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{\beta}}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma},$$

$$\sigma_G^2(\boldsymbol{x})=\hat{\sigma}^2(1+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})).$$

式中：

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})=[R(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{\theta}}),\cdots,R(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{\theta}})],$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$$

2　Monte Carlo 方法

$\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数为 $f(\boldsymbol{x})$，不失一般性，本文中假设 $\boldsymbol{X}$ 服从 M 维正态分布. 功能函数 $G(\boldsymbol{x})$ 将 $\boldsymbol{X}$ 空间分为两部分，即安全域 $S_{\mathrm{s}}=\{\boldsymbol{x}\mid G(\boldsymbol{x})>0,\ x\in R^M\}$ 和失效域 $S_{\mathrm{f}}=\{\boldsymbol{x}\mid G(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\ x\in R^M\}$. 则失效概率为

$$P_{\mathrm{f}}=\int\cdots\int_{G(x)\leqslant 0}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由样本集 $\boldsymbol{\Omega}$ 得到的 Kriging 预测模型 $\hat{G}(\boldsymbol{x})$ 估计失效概率 P_{f} 值为

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}=\int\cdots\int_{\hat{G}(x)\leqslant 0}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Monte Carlo 方法，以大数定律为理论基础，通过随机抽样以随机样本失效频率估计失效概率，当随机样本 N_{MC} 足够大时，能够得到足够精度的 $\hat{P}_{\mathrm{f}}$ 值. 在计算量处于可以接受情况下，Monte Carlo 方法是鲁棒性最强随机抽样方法. 因此本文中采用 Monte Carlo 方法近似计算 $\hat{P}_{\mathrm{f}}$：

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}\approx\frac{1}{N_{\mathrm{MC}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{MC}}}I_{\mathrm{f}}(\hat{G}(\boldsymbol{x})).$$

式中：$I_{\mathrm{f}}(\cdot)$ 是失效域指示函数，通常表示为

$$I_f(\hat{G}(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}1, & \hat{G}(\boldsymbol{x})\leqslant 0;\\ 0, & \hat{G}(\boldsymbol{x})>0.\end{cases}$$

$\hat{P}_f$ 的变异系数表示为

$$\delta_{MC}=\frac{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{P}_f)}}{\hat{P}_f}=\sqrt{\frac{1-\hat{P}_f}{N_{MC}\hat{P}_f}}. \tag{6}$$

3 学习方法

3.1 学习函数

目前,确定样本集 Ω 的方法可分为两类:

1) 随机抽样法. 该方法主要是首先给定 Ω 中样本量 N_0,采用 Monte Carlo、拉丁超立方等随机抽样方法确定 Ω. 此类方法简单易懂,操作方便,但效率低,容易造成样本点浪费. 特别是输入变量数维数较大时无法保证 Ω 中各点均匀分布在变量空间内.

2) 连续抽样法. 此类方法首先通过随机抽样确定初始样本 Ω_0,根据 Ω_0 构造初始代理模型;再根据初始模型提供的统计信息构造“学习函数”,在输入变量空间或给定样本中寻找学习函数的最大值点或最小值点,将其加入 Ω_0 中,重新构造代理模型. 重复以上过程,直至代理模型或 $\hat{P}_f$ 满足一定条件. 该类方法中,构造恰当的学习函数能够明显加快算法的收敛速度. 本文基于第 2 种方法,提出一种新的学习函数.

由式 $P_f=\int_{G(\boldsymbol{x})\leqslant 0} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 可知,结构失效概率估计值 $\hat{P}_f$ 的精度取决于 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$ 与 $G(\boldsymbol{x})=0$ 间的“距离”,在 $\hat{G}(\boldsymbol{x})\neq 0$ 的区域,只要 $\hat{G}(\boldsymbol{x})$ 与 $G(\boldsymbol{x})$ 的符号相同,就不会对 $\hat{P}_f$ 的精度产生影响,当 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$ 与 $G(\boldsymbol{x})=0$ 完全重合时,$\hat{P}_f=P_f$. 因此,本文中提出在 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$ 上选取具有“代表性的”点,计算这些点的结构相应值,更新 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$,在迭代过程中使 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$ 逐渐接近 $G(\boldsymbol{x})=0$ 直至满足收敛条件.

Echard B 提出如下 U 函数:

$$U(\boldsymbol{x})=|\mu_G(\boldsymbol{x})|/\sigma_G(\boldsymbol{x}).$$

U 的值越小,点 $\boldsymbol{x}$ 符号预测错误的概率越大,如果点 $\boldsymbol{x}$ 在 Kriging 预测的曲线 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$ 上,则该点符号预测错误的概率最大(为 50%). 这时,$|\mu_G(\boldsymbol{x})|=0$,则 $\sigma_G(\boldsymbol{x})$ 越大,点 $\boldsymbol{x}$ 符号预测错误的概率越大. $G(\boldsymbol{x})$ 的概率密度函数 $f_G(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 点对失效概率影响的大小的重要判断依据. $f_G(\boldsymbol{x})$ 越大,点 $\boldsymbol{x}$ 对失效概率的影响越大. 因此,本文中将这两个指标相结合,提出一种新的学习函数 VF,且

$$VF=\sigma_G\cdot f_G(\boldsymbol{x}).$$

其中 $f_G(\boldsymbol{x})$ 是概率密度函数.

3.2 学习停止条件

根据文献[12,15],用 $P_R=\Phi(U)$ 表示点 $\boldsymbol{x}$ 符号预测正确的概率,则 $P_W=\Phi(-U)$ 表示该点符号预测错误的概率. AK-MCS/AK-IS 的学习停止条件是 $U_{min}>U_T$,其中,$\Phi(U_T)=0.997$,$U_T=2$.

但是这种学习停止条件过于严格,增加不必要的迭代次数. 然而,一次计算中,样本点中符号预测的不确定性与 $\hat{P}_f$ 的许用误差有关,因此提出一种新的学习停止条件,表达式为

$$2\left(\frac{N_{U<P}}{2}+N_{P\leqslant U\leqslant Q}\cdot\Phi(-U)\right)\leqslant\alpha\cdot N_f.$$

式中:用 $N_{U<P}$ 表明点 $\boldsymbol{x}$ 的符号的错误概率高,这样的点作为抽样中一定失效的点. $N_{P\leqslant U\leqslant Q}$ 表明点 $\boldsymbol{x}$ 的符号的错误概率较高,这样的点可用 $N_{P\leqslant U\leqslant Q}\cdot\Phi(-U)$ 表明其失效的可能性. α 是 $\hat{P}_f$ 的许用误差,在一次抽样中,失效概率的计算方法为

$$\hat{P}_f=N_f/N_{MC}.$$

如果符号的错误点与失效点相比非常少,就可以确定失效概率的计算是准确的.

$$N_u=2\left(\frac{N_{U<P}}{2}+N_{P\leqslant U\leqslant Q}\cdot\Phi(U)\right),$$

$$N_u/N_f\leqslant\alpha. \tag{7}$$

本文中,$P=1$,$Q=2$,$\alpha=0.03$.

3.3 本文提出的学习方法

提出的选取样本点方法的主要步骤为:

步骤 1 应用拉丁超立方抽样方法随机产生初始样本点 $\boldsymbol{X}_{DoE}=[\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^N]$.

步骤 2 用真实的 $G(\boldsymbol{x})$ 计算 $\boldsymbol{Y}_{DoE}$.

步骤 3 用 $\boldsymbol{X}_{DoE}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{DoE}$ 建立 Kriging 预测模型,这里用到的工具是 MATLAB 中的 DACE 工具箱.

步骤 4 用 Monte Carlo 方法生成样本空间 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^{MC}]$,计算失效概率 $\hat{P}_f$ 和变异系数,变异系数的计算方法为式(6). 如果变异系数 $\delta_{P_f}<[\delta]$,转到下一步,否则扩大样本空间 $\boldsymbol{X}$ 继续计算.

步骤 5 在变异系数满足条件时计算 N_u/N_f.

步骤 6 如果 N_u/N_f 的值满足学习停止条件见式(7),结束学习过程,否则转到下一步.

步骤 7 通过 Monte Carlo 方法在 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$ 上抽取 K 个点. 由于这样实现非常困难,给定 $U<0.03$,计算点 $\boldsymbol{x}$ 的 U 值,当点满足 $U<0.03$,即认为点在 $\hat{G}(\boldsymbol{x})=0$ 上. 计算 K 个点的 VF 值,取得到最大值的点加入到样本空间 X_{DoE} 中,更新样本空间,转到步骤 3 建立新的 Kriging 预测模型.

4　算例分析

4.1　二维模型

这是一个 2 维随机变量小失效概率的例子，选自文献[17]，功能函数如下：

$$G(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 1\ 500.$$

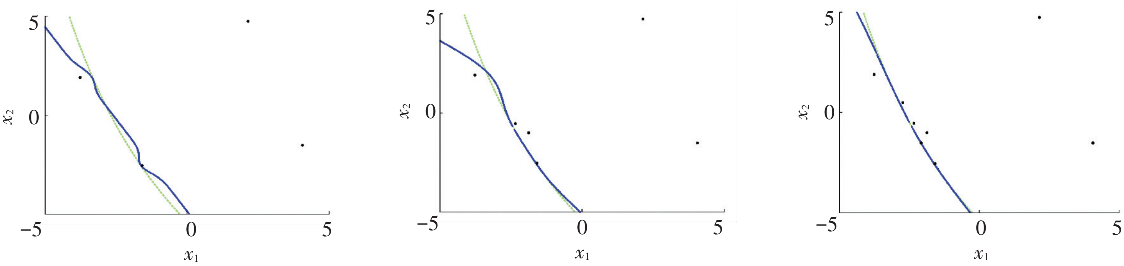
其中：x_1、x_2 服从正态分布，且相互独立. $\mu_{x_1} = 38$, $\sigma_{x_1} = 3.8$, $\mu_{x_2} = 54$, $\sigma_{x_2} = 2.7$. 算例结果见表 1.

表 1　二维模型算例结果

Tab.1　Results of example with 2- dimension

方法	N_{call}	$\hat{P}_{\text{f}}/10^{-3}$	$\delta_{P_{\text{f}}}/\%$	$\varepsilon_{P_{\text{f}}}/\%$
MCS	3×10^5	6.303	2.29	–
ABC-Kriging	36	6.500	2.43	3.13
AK-SSIS	9	6.303	2.29	<0.1
Proposed method	4+4	6.3	0.42	<0.1
	4+6	6.3	0.43	<0.1
	4+4	6.3	0.43	<0.1
	4+6	6.3	0.43	<0.1

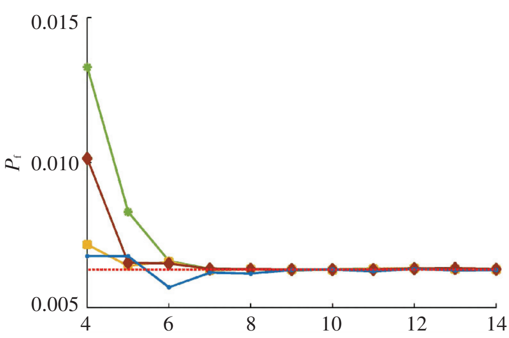
根据本文算法流程编制 MATLAB 程序，首先用拉丁超立方的方法选择 4 个初始样本点，建立 Kriging 模型，通过主动学习，更新初始的样本空间，重新建立了新的 Kriging 模型. 本算例在调用学习函数 4 次时，到达学习停止条件. 由于本算法使用较少的样本空间，因此有较好的效率，在进行 4 次运算时，样本空间数量少且稳定，得到的失效概率也非常一致，从而证明了本文提出的算法有较高的稳定性. 图 1 描述了不同的调用次数时 Kriging 拟合的功能函数与真实的功能函数的匹配情况，如图 1(c)所示在调用学习函数 4 次时，两条曲线基本重合. 图 2(a)描述了在调用学习函数过程中失效概率的变化. 图 2(b)描述了在调用学习函数过程中学习停止条件值的变化. 从图 2 中可以看出，学习停止条件到达时，失效概率刚好收敛，可见本文提出的学习停止条件是实用的.



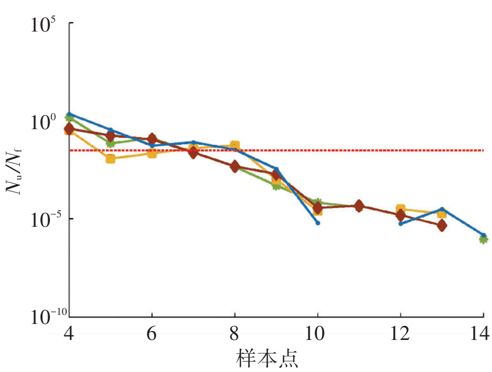
(a)调用 0 次学习函数时曲线　(b)调用 2 次学习函数时曲线　(c)调用 4 次学习函数时曲线

图 1　预测极限状态的收敛情况

Fig.1　The convergence procedure of predicted limit state



(a)失效概率的变化



(b)学习停止条件值的变化

图 2　初始样本点为 4 时失效概率和学习停止条件折线图

Fig.2　Broken line graph of $\hat{P}_{\text{f}}$ and $N_{\text{u}}/N_{\text{f}}$ with initial DoE = 4

4.2　六维模型

6 维随机变量非线性系统例子见文献[2-3,7-8,15]，系统如图 3 所示，功能函数如下：

$$g(C_1, C_2, M, R, T_1, F_1) = 3R - \left| \frac{2F_1}{M\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0 T_1}{2}\right) \right|.$$

式中 $\omega_0 = \sqrt{(C_1 + C_2)/M}$. 各变量的分布参数见表 2.

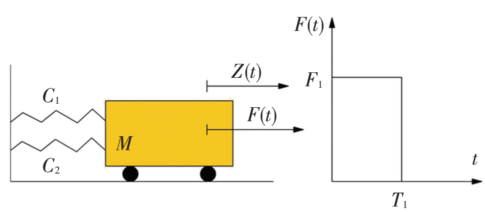


图 3　非线性系统

Fig.3　Nonlinear system

表 2　变量分布信息

Tab.2　Information of random variables

变量	分布	均值	标准差
C_1	正常	1.0	0.1
C_2	正常	0.10	0.01
M	正常	1.00	0.05
R	正常	0.50	0.05
T_1	正常	1.0	0.2
F_1	正常	0.450	0.075

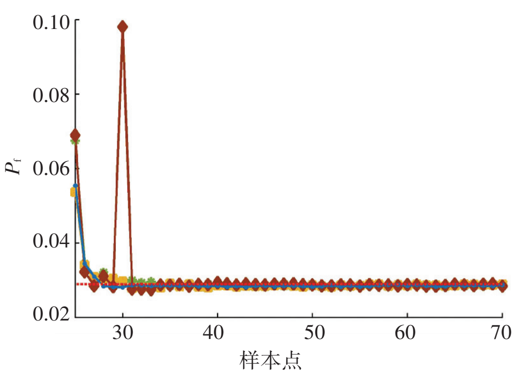
首先,用拉丁超立方的方法选择 15 个初始样本点,建立 Kriging 模型,通过主动学习,更新初始的样本空间,重新建立了新的 Kriging 模型. 本算例进行 4 次计算,结果列于表 3 和图 4. 与其他方法相比,本文提出的方法需要更少的迭代步骤,且具有较高的稳定性.

然后,分别用用拉丁超立方的方法选择 10 和 20 个初始样本点,计算结果列于表 3 和图 5. 图 5 描述了在不同数量的初始样本空间时,函数的收敛情况. 由图 5 可见,初始样本空间的数量对收敛数度有一定的影响,但是影响不大,且都在样本数为 50 左右收敛.

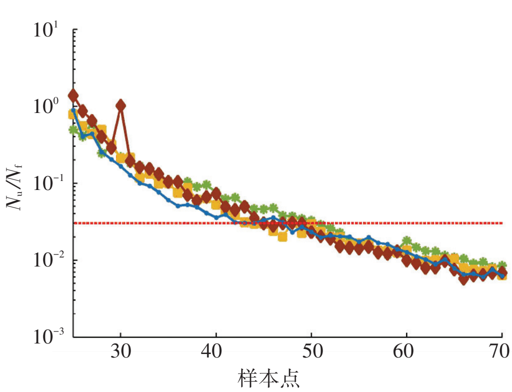
表 3 六维模型算例结果

Tab.3 Results of example with 6-dimension

方法	N_{call}	$\hat{P}_{\mathrm{f}}/10^{-2}$	$\delta_{P_{\mathrm{f}}}/\%$	$\varepsilon_{P_{\mathrm{f}}}/\%$
MCS	7×104	2.834	2.20	-
AK-MCS+U	58	2.834	2.20	<0.10
AK-IS+U	29+38	1.530	2.70	-46.01
AK-SSIS+U	29+27	1.540	2.59	-45.60
AK-MCS+EFF	56	2.850	2.20	0.16
Proposed method	10+38	2.860	0.59	0.92
	15+37	2.830	0.59	-0.14
	15+30	2.840	0.59	0.21
	15+32	2.900	0.59	2.33
	15+34	2.850	0.59	0.56
	20+31	2.870	0.59	1.27



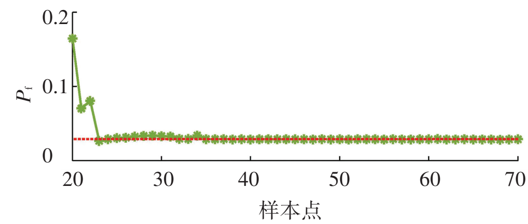
(a)失效概率的变化



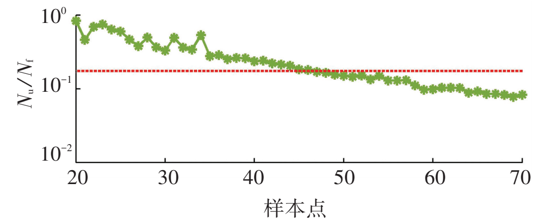
(b)学习停止条件值的变化

图 4 初始样本点=15 时失效概率和学习停止条件折线图

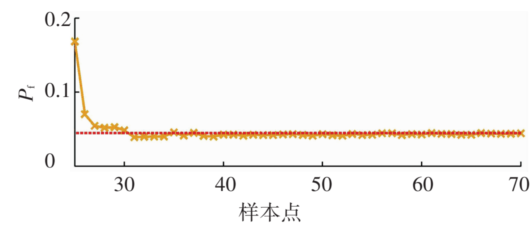
Fig.4 Broken line graph of $\hat{P}_{\mathrm{f}}$ and $N_{\mathrm{u}}/N_{\mathrm{f}}$ with initial DoE=15



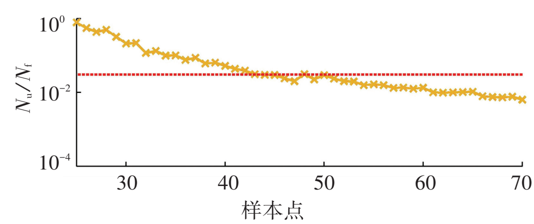
(a)初始 DoE 为 10 时失效概率的变化



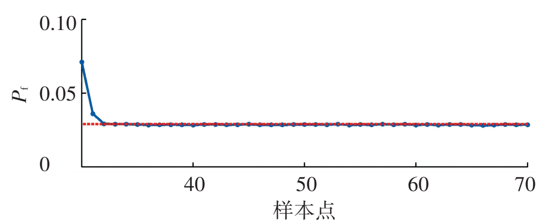
(b)初始 DoE 为 10 时学习停止条件值的变化



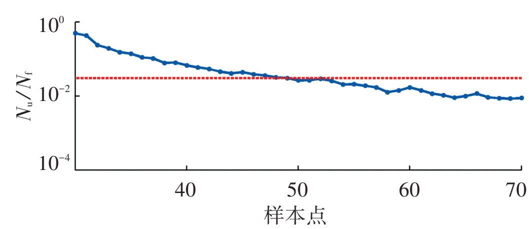
(c)初始 DoE 为 15 时失效概率的变化



(d)初始 DoE 为 15 时学习停止条件值的变化



(e)初始 DoE 为 20 时失效概率的变化



(f)初始 DoE 为 20 时学习停止条件值的变化

图 5 不同初始样本点时失效概率和学习停止条件折线图

Fig.5 Broken line graph of $\hat{P}_{\mathrm{f}}$ and $N_{\mathrm{u}}/N_{\mathrm{f}}$ with different initial DoE

5 结 论

1)本文利用 Kriging 随机特性,结合现有学习函数的不足,提出了一种新的学习函数 VF, 该方法将

方差与联合概率密度函数相结合,提高选点的效率和稳定性.

2)提出一种学习停止条件,既能保证失效概率计算的准确性,又不至于过于严格而造成不必要的迭代. 并结合学习函数 VF 提出一种学习选点方法.

3)数值算例计算结果表明,本文提出的学习方法具有较高的效率,稳定性和精度.

4)本文方法在建模迭代过程中没有对结构功能函数线性、非线性形式,及隐式、显式情况做特定假设,因此,理论上该方法能够应用于工程中隐式且非线性程度较高情况.

参考文献

[1] 王丹,周亮,孙志礼,等. 基于蒙特卡洛方法的滚珠丝杠副运动可靠性分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2012 (8): 1179-1181, 1185.
WANG Dan, ZHOU Liang, SUN Zhili, et al. Motion reliability analysis of ball screw pair based on Monte Carlo method [J] Journal of Northeastern University (Natural Science), 2012 (8): 1179-1181, 1185.

[2] RAJASHEKHAR M R, ELLINGWOOD B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis[J]. Structural safety, 1993, 12(3): 205-220. DOI:10.1016/0167-4730(93)90003-J.

[3] GAYTON N, BOURINET J M, LEMAIRE M. CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliabilityanalysis [J]. Structural safety,2003,25(1):99-121.DOI:10.1016/S0167-4730(02)00045-0.

[4] 闫明,孙志礼,杨强. 基于响应面方法的可靠性灵敏度分析方法[J]. 机械工程学报, 2007, 43(10): 67-70. DOI:10.3321/j.issn:0577-6686.2007.10.013.
YAN Ming, SUN Zhili, YANG Qiang. Analysis method of reliability sensitivity based on response surface methods[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(10): 67-70. DOI: 10.3321/j.issn:0577-6686.2007.10.013.

[5] ALIBRANDI U, ALANI A M, RICCIARDI G. A new sampling strategy for SVM-based response surface for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2015, 41: 1-12. DOI: 10.1016/j.probengmech.2015.04.001.

[6] BUCHER C, MOST T. A comparison of approximate response functions in structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2008, 23(2): 154-163.DOI:10.1016/j.probengmech.2007.12.022.

[7] SCHUEREMANS L, VANGEMERT D. Benefit of splines and neural networks in simulation based structural reliability analysis[J].Structural safety, 2005, 27(3):246-261.DOI:10.1016/j.strusafe.2004.11.001.

[8] 佟操,孙志礼,杨丽,等.一种基于 Kriging 和 Monte Carlo 的主动学习可靠度算法[J].航空学报, 2015, 36(9): 2992-3001.620-626.
TONG Cao, SUN Zhili, YANG Li, et al. An active learning reliability method based on Kriging and Monte Carlo[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2015, 36(9): 2992-3001.620-626.

[9] 张崎,李兴斯.基于 Kriging 模型的结构可靠性分析[J]. 计算力学学报, 2006 (2): 175-179. DOI:10.3969/j.issn.1007-4708.2006.02.009.
ZHANG Qi, LI Xingsi. Analysis of structural reliability based on Kriging model[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006 (2): 175-179. DOI:10.3969/j.issn.1007-4708.2006.02.009.

[10] GASPAR B, TEIXEIRA A P, SOARES C G. Assessment of the efficiency of Kriging surrogate models for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2014, 37: 24-34. DOI:10.1016/j.probengmech.2014.03.011.

[11] LV Z, LU Z, WANG P. A new learning function for Kriging and its applications to solve reliability problems in engineering[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70(5): 1182-1197. DOI:10.1016/j.camwa.2015.07.004.

[12] TONG C, SUN Z, ZHAO Q, et al. A hybrid algorithm for reliability analysis combining Kriging and subset simulation importance sampling[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2015, 29 (8): 3183-3193.DOI:10.1007/s12206-015-0717-6.

[13] 高月华. 基于 kriging 代理模型的优化设计方法及其在注塑成型中的应用[D]. 大连:大连理工大学, 2009.
GAO Yuehua. Optimization methods based on Kriging surrogate model and their application in injection molding[D]. Dalian : Dalian University of Technology, 2009.

[14] BICHON B J, ELDRED M S, SWILERL L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions [J]. AIAA journal, 2008, 46(10):2459-2468.DOI:10.2514/1.34321.

[15] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. Structural Safety,2011,33(2):145-154.DOI:10.1016/j.strusafe.2011.01.002.

[16] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M, et al. A combined importance sampling and Kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 111: 232-240. DOI:10.1016/j.ress.2012.10.008.

[17] 刘瞻,张建国,王灿灿,等. 基于优化 Kriging 模型和重要抽样法的结构可靠度混合算法[J]. 航空学报, 2013,3(6):1347-1355. DOI:10.7527/S1000-6893.2013.0235.
LIU Zhan, ZHANG Jianguo, WANG Cancan, et al. Hybrid structure reliability method combining optimized Kriging model and importance sampling[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 3(6): 1347-1355. DOI:10.7527/S1000-6893.2013.0235.

(编辑　杨　波)