

DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201704099

翻滚目标安全走廊内的碰撞可能性判断方法

王 逍¹,温昶煊²,赵育善¹,师 鹏¹

(1.北京航空航天大学 宇航学院,北京 100191;2.中国科学院太空应用重点实验室
(中国科学院空间应用工程与技术中心),北京 100094)

摘 要: 在接近空间带大附件翻滚目标过程中,由于目标章动运动,空间会被划分为目标扫过的危险区与不被扫过的安全区。追踪星在目标安全区内飞行过程中,为规避航天器间的碰撞,应判断追踪星与目标安全区之间是否存在碰撞可能性。为解决这一问题,参考区域判定法思想,将判断碰撞可能性的问题转化为目标安全区与追踪星轨迹的位置判定问题。通过分析目标安全区特征与追踪星轨迹特点,分别建立锥面状的目标星安全走廊和椭球状的追踪星位置误差曲面,从而进一步将问题转化为目标星安全走廊锥面与追踪星位置误差椭球的位置判定问题。经过射影变换和平面投影过程,原锥面与椭球在不改变位置关系的前提下分别被转化为平面上圆与椭圆。利用平面曲线位置判据,判定圆与椭圆的位置关系,反推出锥面与椭球的位置关系,从而判断追踪星在目标安全走廊内飞行有无碰撞可能性。数值仿真表明,该方法可以准确判断锥面与椭球的空间位置关系,并可用于目标安全走廊内的碰撞可能性判断。

关键词: 翻滚目标;安全走廊;二次曲面;碰撞判断;射影变换

中图分类号: V526 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2018)04-0094-08

Collision possibility detection in the safe corridor of a tumbling target

WANG Xiao¹, WEN Changxuan², ZHAO Yushan¹, SHI Peng¹

(1.School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China; 2.Key Laboratory of Space Utilization (Technology and Engineering Center for Space Utilization, Chinese Academy of Sciences), Beijing 100094, China)

Abstract: In the mission of approaching to a disabled tumbling target, the space will be divided into the safe zone and the unsafe zone because of the nutation of the target. During the chaser's flight in the safe zone of the target, the collision possibility between the target and the chaser should be determined to avoid the collision accident. To solve this problem, the region judgment method is used to transform the task into the position relation determination problem between the safe zone of the target and the trajectory of the chaser. By analyzing characteristics of the safe zone of the target as well as the trajectory of the chaser, both the conical safe corridor model of the target and ellipsoidal position error model of the chaser are established. As a result, the problem is further transformed into the issue of position relation determination between the cone and the ellipsoid. Through projective transformation and plane projection, the original cone and ellipsoid are transformed into a circle and an ellipse on the plane with the unchangeable position relation. Using the location criterion of plane curves, the position relation between the circle and ellipse would be determined, and then, the position relation between the cone and ellipsoid could be deduced, which is expected to determine whether the collision risk exists or not. Simulation experiment shows that this method is accurate to determine the position relation between the conical surface and the ellipsoidal surface, and it can be used to detect the collision possibility in the flight during the safe corridor of the target.

Keywords: tumbling target; safe corridor; quadratic surface; collision detection; projective transformation

人类航天活动的逐渐频繁,使得目前空间中存在的失效航天器日益增多,对失效航天器进行相应空间操作如维修、补给、抓捕等,可使其工作寿命延长、回收关键零部件或减少太空垃圾,这对航天技术的长远发展意义重大。在这一过程中,需要运用航天

器近距离交会对接技术使得追踪星接近失效目标^[1]。在交会对接任务中,失效目标由于在空间中呈翻滚状态,同时不能提供信息且不可控制,对接近过程尤其是近距离接近过程造成许多困难,相比于合作目标,对失效目标的接近危险程度更高,复杂程度也更高。所以,对于接近失效目标的任务,航天器间出现碰撞的可能性更大。为了更安全地接近失效目标,就必须对其接近轨迹的安全性进行分析,规避碰撞风险。

针对这一问题,国内外学者尝试用多种方法判别

收稿日期: 2017-04-19
基金项目: 国家自然科学基金(11572019);中国科学院太空应用重点实验室开放基金(LSU-2016-07-01)
作者简介: 王 逍(1993—),女,博士研究生;
赵育善(1957—),男,教授,博士生导师
通信作者: 师 鹏,shipeng@buaa.edu.cn

碰撞,主要分为区域判定法(Box法)和碰撞概率法.Box法主要思想是对区域进行划分,将进入设定预警区域的行为均视为危险^[2].近年来,国内学者分别对碰撞概率显示表达式及灵敏度分析^[3]、碰撞模型及概率快速算法^[4]和碰撞概率的数值计算方法^[5]进行了较为深入的研究,国外学者则对空间碎片与航天器间的碰撞概率^[6]、近地微小碎片间的碰撞概率^[7],紧急情况下最大碰撞概率^[8]和高斯误差分布下的球形航天器间碰撞概率^[9]分别展开了研究.

前期的碰撞研究,包括航天器间或空间碎片间,主要是以被研究目标初始位置相距较远为前提进行碰撞预警或碰撞概率计算,主要起到轨道预报的作用.而对于交会对接的最后段,对目标安全走廊内碰撞问题研究较少,然而在对失效目标的最后抓捕段,接近危险程度高,所以最后对碰撞预警、碰撞预判和碰撞规避的需求也同样存在.张大伟等^[10]将人工势函数法与椭圆蔓叶线函数结合,提出了目标安全走廊内的制导方法,但对于安全走廊内的碰撞判断问题,目前还未有较为全面细致的方法.

为了对空间翻滚目标安全走廊内的碰撞问题进行判断,本文参考Box法的思想,建立了目标安全走廊锥面模型及追踪星位置误差椭球模型,通过判断椭球是否与锥面相交来判断安全走廊内的运动是否危险.将锥面模型首先射影变换为圆柱面,并将同样变换施加到椭球面上,再将变换所得的圆柱面和椭球变换后对应的曲面分别向平面投影,并标准化,得平面标准圆与椭圆.由于射影变换与仿射变换空间曲面、曲线位置不变,利用平面曲线位置判据,可以判别标准圆与椭圆的位置关系,反推获得原锥面与误差椭球的位置关系,从而判断是否存在碰撞危险.

1 问题描述

为方便问题描述,采用如下坐标系:ECI坐标系,记为 I 系;目标航天器LVLH坐标系,记为 L 系.

1.1 非合作目标安全走廊模型

由文献[11]可知轴对称自由刚体在惯性空间绕它对质心的动量矩 H_I 作圆锥运动, H_I 为守恒量,在惯性空间方向不变.虽然航天器一般不满足轴对称性质,但此处不需关心目标星在空间中具体运动规律,只需确定它在空间中可能扫过的范围即可.

本文以空间中带大附件的翻滚目标为目标星,为方便建模,将目标星简化为主体为立方体、两侧带长方体帆板的对称卫星,其平面图如图1中简化卫星模型所示.

假设目标星的最大惯量主轴所在方向为 $\hat{x}$,章动角 ϑ ($\vartheta > 0$) 为 $\hat{x}$ 与 H_I 之间的夹角,满足: $\vartheta =$

$\arccos(\hat{x} \cdot H_I / (|\hat{x}| |H_I|))$.取 ϑ 最大值 ϑ_m ,由于章动角越大,目标的转动越剧烈,假设 $\hat{x}$ 在空间中绕 H_I 以 ϑ_m 为半锥角做圆锥运动,这种情况下已将 ϑ 为其他值的情况全部包含在内.选取目标星章动最大的状态作为模型基础,可使得结果更加安全.

$\hat{x}$ 在空间中绕 H_I 以 ϑ_m 为半锥角做圆锥运动时,目标星两翼帆板在空间中扫过的区域均是危险的,剩下未扫过的区域为以目标星质心为顶点的对称锥面区域.考虑到追踪星只能从目标星的一侧接近,去掉另一侧锥面区域后,目标星的安全区为单侧锥面区域.设 $\hat{x}$ 与帆板边缘间的夹角为 η ,易得目标星单侧锥面安全区的半锥角为 $\theta_m = \eta - \vartheta_m$,则目标在空间中由旋转所划分的安全区与危险区平面示意如图1所示.

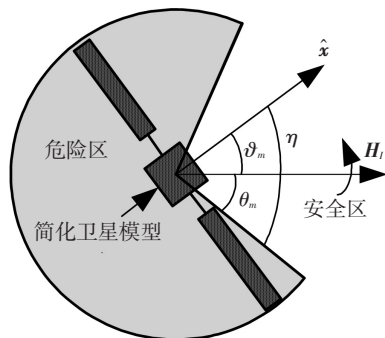


图1 目标安全区平面示意

Fig.1 Plan sketch of the target safe zone

图1中对于不围绕最大惯量主轴旋转的目标,同理,确定目标转轴到其两侧边缘夹角和最大章动角,按照旋转规律确定安全锥面即可.

虽然 H_I 在 I 系中为常矢量,但由于接近问题许多情况下要在 L 系下考虑.记 L 系下的目标自旋角动量为 H_L , I 系到 L 系的转换矩阵为 C_I^L ,则有: $H_L = C_I^L H_I$.由于 C_I^L 是随时间变化的,经分析可知, H_L 的运动规律为绕 L 系 z 轴做圆锥运动,运动周期等于目标星轨道周期,因此,安全走廊的设计应考虑时间因素.对于追踪星在目标安全区内停留的时间段 $t_1 \sim t_2$, H_L 在 L 系中的方向是变化的,如图2所示.

图2中的长点划线和短点划线分别表示 t_1 时刻与 t_2 时刻目标的安全区,考虑到对目标建模过程中可能存在测量误差或近似误差,取误差角 ε ($\varepsilon > 0$),去掉误差角 ε 后,实线表示 t_1 时刻的去误差安全区边界,虚线表示 t_2 时刻的去误差安全区边界.对于追踪星在目标安全走廊内飞行时间相对较短的情况,即 $H_L(t_1)$ 与 $H_L(t_2)$ 有较大交集时,可取 $H_L(t_1)$ 与 $H_L(t_2)$ 的交集作为安全走廊,交集所形成的新锥面的中心线方向及半锥角可取为

$$\begin{cases} n = H_L \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) / \left\| H_L \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right\|, \\ \theta = \theta_m - \varepsilon - \arccos \left(\frac{H_L(t_1) \cdot H_L(t_2)}{\|H_L(t_1)\| \|H_L(t_2)\|} \right) / 2. \end{cases}$$

通过取交集作为安全走廊的方法,可在计算过程中使得走廊中心线 n 在 L 系下固定,方便追踪星的运动规律设计,同时使得安全结果更为保守.带大附件失效目标一般为高轨道卫星,轨道周期相对较长,使用该方法一般可行.但对某些特殊情况,如目标轨道太低,或在走廊内停留时间太长,导致 $H_L(t_1)$ 与 $H_L(t_2)$ 交集过小或不存在交集的情况,则该方法不再适用,此时必须考虑 H_L 的时变性.

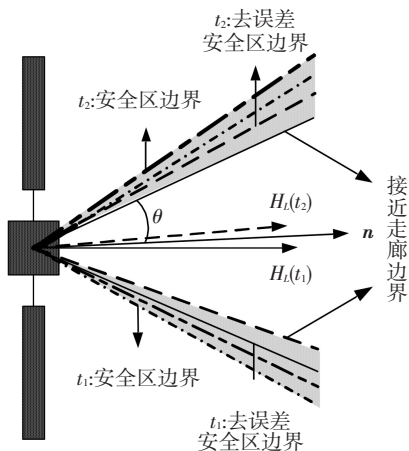


图2 目标安全走廊平面示意

Fig.2 Plan sketch of the target safe corridor

1.2 追踪星位置误差模型

在 L 系下,追踪星的状态可由位置 r 和速度 v 表示,设 $\bar{x}$ 为追踪星在安全走廊内的标称状态, x 为实际状态, $\bar{x} = (\bar{r}^T, \bar{v}^T)^T$, $x = (r^T, v^T)^T$. 记状态误差矢量为 δx , 则有: $\delta x = x - \bar{x} = (\delta r^T, \delta v^T)^T$; 记状态误差协方差为 P , P 是一个 6×6 的实对称矩阵, 则根据线性系统的描述函数理论可得航天器标称状态和协方差的传播方程组:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = F\bar{x}(t) + Bu, \\ \dot{P}(t) = FP(t) + P(t)F^T, \end{cases}$$

式中, u 为航天器所受合外力. 由文献[12]可知, 随机变量 x 位于以标称状态矢量 $\bar{x}$ 为球心的一个超椭球内, 此椭球的椭球面可表示为

$$(x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x}) = l^2,$$

式中, l 为马氏距离常数, 该式所描述是航天器 6 维全状态空间误差超椭球. 为判断航天器与目标安全走廊的位置关系, 还需将位置误差子椭球从超椭球中提取出来. 矩阵 P 是 6×6 的实对称矩阵, 可被划分为对应 δr 和 δv 的对称矩阵块:

$$P = \begin{pmatrix} P_{rr} & P_{rv} \\ P_{vr} & P_{vv} \end{pmatrix}, A_{rr} = P_{rr}^{-1} / l^2, \quad (1)$$

式中, A_{rr} 即为位置误差子椭球的对应矩阵.

为了补偿追踪星自身形状或姿态对位置误差椭球的影响, 尤其是在误差椭球的边缘处消除由于追踪星形状或姿态引起的不确定因素, 使得误差椭球能够涵盖所有协方差为 P 下的追踪星上任一点的可能位置, 根据追踪星的星体特征对追踪星作星体包络椭球 U , 如图 3 所示.

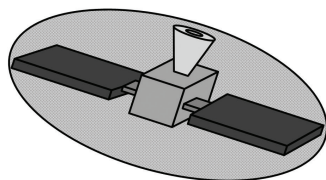


图3 追踪星星体包络椭球

Fig.3 Envelope ellipsoid of the chaser

由图 3 可知, 追踪星上所有的点均在椭球 U 内. 设椭球 U 的最长轴为 u , 标称位置误差椭球的最短轴为 a , 对式(1)作如下处理:

$$k = a / (u + a), \quad A = k^2 A_{rr},$$

用处理后的 A 表示追踪星位置误差椭球, 会在 A_{rr} 表示的标称位置误差椭球基础上, 扩大椭球半轴, 使得新椭球完全涵盖星体包络椭球 U , 借此消除追踪星星体形状或姿态对后续判断结果的影响. 因此, 追踪星位置误差椭球为

$$(r - \bar{r})^T A (r - \bar{r}) - 1 = 0.$$

1.3 两模型在空间中的位置

设锥面顶点为 O_1 , 以 n 所在直线为中心线, 设以中心线为法线且与锥面仅相交于 O_1 的平面为投影平面. 以 O_1 为坐标原点建立 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 坐标系, 记为 S_1 系, 其中, z 轴沿着中心线方向, x 与 y 轴在投影平面上, 构成右手坐标系.

在 S_1 系下, 目标航天器的安全锥面走廊可表示为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (h \tan \theta)^2, \\ z = h, \end{cases}$$

式中, θ 为锥面走廊半锥角, 消去 h 则可得锥面走廊公式为

$$\frac{x^2 + y^2}{\tan^2 \theta} - z^2 = 0. \quad (2)$$

设 $X = (x, y, z, 1)$, 则用二次型 $XB_0 X^T = 0$ 的形式表示式(2), 则可得 S_1 系下表示锥面对应矩阵 B_0 为

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1/\tan^2 \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tan^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(注: 为方便表达, 后续用矩阵符号表示对应曲面或曲线, 如: B_0 为锥面)

由于位置误差椭球在 L 系下求出,定义 L 系到 S_1 系的坐标转换矩阵为 C_L^1 ,则表征误差椭球大小的矩阵 A 和对应标称位置 $\bar{r}$ 在 S_1 系下的表达式为

$$A = C_L^1 A C_L^{1T}, \quad \bar{r}_1 = C_L^1 \bar{r} = (\bar{r}_{1x}, \bar{r}_{1y}, \bar{r}_{1z})^T,$$

将 A 转换为二次型: $\bar{X} A \bar{X}^T = 0$, 则可得四阶矩阵: $\bar{A} = \text{diag}(A, -1)$, $\bar{A}$ 为 S_1 系下表示误差椭球的矩阵. 此时椭球中心在 O_1 处, 为了正确表达误差椭球在 S_1 系下的位置, 需要将椭球中心从 O_1 处平移至 $\bar{r}_1$ 处, 对 $\bar{A}$ 所表示的椭球作以下代换:

$$\begin{cases} f = \bar{X} \bar{A} \bar{X}^T, \\ f' = f(X - \bar{r}_1). \end{cases}$$

式中, f' 对应的二次型矩阵记为 A_0 , A_0 为 S_1 系下的中心为 $\bar{r}_1$ 的椭球.

1.4 两曲面可能存在的位置关系

为明确计算所得的目标锥面安全走廊和追踪星位置误差椭球在空间中可能存在的位置关系, 应讨论空间中椭球与锥面的位置关系, 结合安全走廊内碰撞问题的背景, 除去椭球与锥面外离、椭球与锥面外切、以及锥顶点在椭球上或椭球内的情况, 共有如下几种情况: 1) 椭球在锥面内; 2) 椭球与锥面仅有 1 个切点; 3) 椭球与锥面有 2 个以上切点; 4) 椭球与锥面有 1 个切点, 2 个交面; 5) 椭球与锥面有 1 个交面; 6) 椭球与锥面有 2 个交面.

参考 Box 法的思想, 若判断安全走廊内是否存在碰撞风险, 应判断追踪星是否进入了危险区域. 显然, 对于目标安全走廊内的飞行问题, 走廊外部的区域全部视为危险区域, 只有追踪星轨迹全部处于走廊内部才视为安全. 因此, 目标安全走廊内的碰撞判断问题, 与判断走廊锥面与追踪星位置误差椭球的位置关系是等价的, 考虑上述可能存在的位置关系, 将走廊锥面与误差椭球位置关系简化为 3 种: 内含、内切与相交, 并与碰撞判断结果一一对应, 见表 1.

表 1 曲面位置判断与碰撞结果判断对应关系

Tab.1 The corresponding relation between determinations of surface position and the collision

情况	曲面位置判断	碰撞可能判断
1)	内含	无碰撞
2)、3)	内切	临界
4)、5)、6)	相交	可能碰撞

需要说明的是, 在判断出曲面相交后, 对应的碰撞判断结果是可能碰撞, 而非一定碰撞. 由于追踪星位置误差椭球是一定概率阈值内, 追踪星在标称位置附近的实际位置的集合. 所以, 若误差椭球与锥面相交, 是说明在一定概率下产生碰撞, 而非绝对碰

撞, 而概率的大小跟 P 有关, 此处不做深入讨论, 此处仅认为两曲面相交有碰撞可能, 为危险情况, 以此为目标星在安全走廊内的标称轨迹规划及设计提供评估轨迹安全性的参考.

2 碰撞判断代数判据

由于直接判断空间中锥面与椭球面的位置关系较为困难, 因此本文利用射影定理, 即经射影变换, 原曲面间的位置关系不改变的原理^[13], 将原问题做如下变换: 1) 将锥面射影变换成圆柱面, 并将变换同样施加到椭球面上; 2) 在圆柱面的垂直面投影, 得到圆柱面和椭球射影变换后曲面所对应的两条平面二次曲线. 由此, 利用平面二次曲线间的代数判据, 判断两二次曲线间的位置关系, 从而获得原问题的解.

2.1 走廊锥面与误差椭球位置问题的转化

为判断圆锥面与椭圆面间的位置关系, 需对其进行射影变换. 应注意的是, 在变换前应检查 S_1 系的 xy 平面是否穿过或切于椭球 A_0 , 若 xy 平面与 A_0 有交点, 由客观特征可直接判断 A_0 与 B_0 相交, 不需再进行变换. 由于 A_0 为椭球, 故 xy 平面与 A_0 若存在交点, 则相交所得曲线必为椭圆或一个点. 令椭球 A_0 中的 z 坐标为 0, 得到曲线 f^* 为

$$f^*: \begin{cases} f = [x, y, z, 1] A_0 [x, y, z, 1]^T, \\ z = 0, \end{cases}$$

若 f^* 是实椭圆或一个点, 则说明 xy 平面与 A_0 相交, 可得 A_0 与 B_0 相交, 结束计算.

若 xy 平面与 A_0 无交点, 取过 S_1 系原点 O_1 的平面 F 使 F 与 B_0 只交于 O_1 , 做射影变换 P 使 F 变为无穷远平面. B_0 变换为标准圆柱面, 记为 B_1 , 同时椭球 A_0 变换为新的曲面, 记为 A_1 .

在本文中, 取 $M = \begin{bmatrix} \tan \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tan \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则可

得变换后的圆柱面 B_1 和新曲面 A_1 为:

$$B_1 = M B_0 M^T, A_1 = M A_0 M^T,$$

这样, 原锥面 B_0 和椭球 A_0 就分别变换为了柱面 B_1 和曲面 A_1 , 因射影变换原位置关系不变的特性, A_0 与 B_0 的位置关系问题就转换为了 A_1 与 B_1 的位置关系问题.

直接判定 A_1 与 B_1 的位置关系仍不容易, 但由于 B_1 为柱面, 故可以通过向底面投影判断曲面间有无交点. 由 B_1 的形式可看出, 该圆柱面的母线是沿 z 方向的, 因此将 A_1 与 B_1 分别向 xy 平面投影, 记投影后曲线分别为 C_A 与 C_B .

由上述易知圆柱面的投影曲线 C_B 的形式为:
 $x^2 + y^2 - 1 = 0$. 为求出投影曲线 C_A , 做如下计算:

$$C_A: \begin{cases} f = \mathbf{X} \mathbf{A}_1 \mathbf{X}^T = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

该方程组消去变量 z 后, 即得到曲线 C_A , 经实验可得, 当 xy 平面与 A_0 不相交时, C_A 为椭圆 (此处自动满足该条件). 设 $\mathbf{X}' = [x, y, 1]$, 则 C_A 可化为平面二次型 $\mathbf{X}' \mathbf{A}_2 \mathbf{X}'^T = 0$, 得矩阵 $\mathbf{A}_2$, 同理可得 C_B 对应的二次型矩阵 $\mathbf{B}_2$.

由此, 在 A_0 不与 xy 平面相交情况下, 原锥面 B_0 与椭球 A_0 的位置判断问题可转化为平面圆 B_2 与椭圆 A_2 的位置判断问题, 过程如图 4 所示.

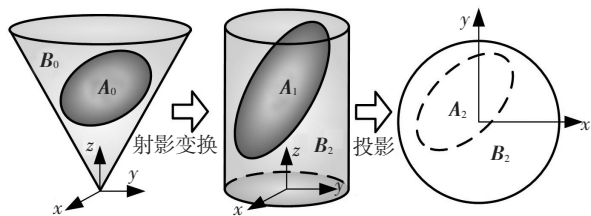


图 4 椭球与锥面位置问题的平面转化过程

Fig. 4 Process of transforming the position relation problem between the cone and the ellipsoid to planar one

2.2 平面上圆与椭圆的位置关系判据

由文献[13-14]可知, 对于平面上简化的圆与椭圆:

$$\mathbf{A}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (0 < a \leq b, 1 \leq b) \quad (3)$$

$$\mathbf{B}: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1,$$

其对应的二次型矩阵分别为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ -x_0 & -y_0 & -1 + x_0^2 + y_0^2 \end{bmatrix},$$

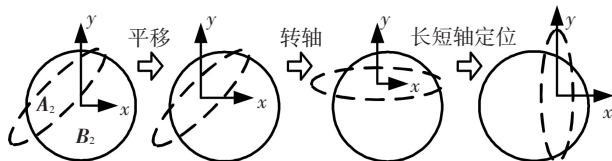
可由其广义特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B})$ 来判断圆与椭圆的关系.

由图 4 可知, 投影后, 坐标原点在 B_2 即单位圆的中心, 为使 A_2 与 B_2 满足式 (3) 中的形式, 应使坐标原点平移至椭圆中心, 并使得 y 轴对应椭圆的长轴方向.

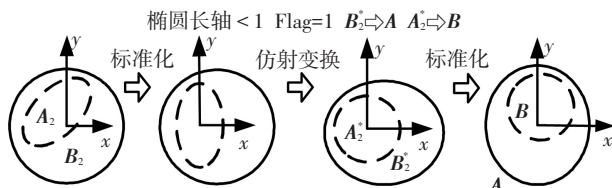
在式 (3) 中, 需满足 $b \geq 1$ (b 为椭圆长轴), 才能使用位置判据. 但事实上, 投影后的椭圆 C_A 的长轴不一定满足该条件, 此处需分类讨论, 并引入标志位 Flag 进行区分. 对于 $b \geq 1$ 的情况, 需进行曲线标准化过程, 标准化后的 A_2 和 B_2 分别对应式 (3) 中的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$, 并记 $\text{Flag} = 0$, 过程如图 5(a) 所示. 对于 $b < 1$ 的情况, 在经标准化后, 还需将椭圆 C_A 仿射变换为圆 C_A^* , 同时圆 C_B 仿射变换为椭圆 C_B^* , 再次经标准化后, C_A^* 和 C_B^* 分别对应的矩阵 $\mathbf{A}_2^*$ 和 $\mathbf{B}_2^*$. 此时分别对

应式 (3) 中的 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$, 记 $\text{Flag} = 1$, 如图 5(b) 所示.

椭圆长轴 ≥ 1 $\text{Flag} = 0$ $A_2 \Rightarrow A$ $B_2 \Rightarrow B$



(a) $b \geq 1$ 时的标准化过程



(b) $b < 1$ 时的标准化过程

图 5 投影后椭圆与圆的标准化过程

Fig. 5 The standardization process of the ellipse and the circle obtained after projection

结合安全走廊内碰撞判断的客观存在条件, 不考虑 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相离或外切的情况, 并将重合视为内切的 1 种, 则对应广义特征函数 $f(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0$ 的解, 根据文献[14]中的结论, 可得以下位置代数判据.

判据 1 $f(\lambda)$ 有虚根 $\Rightarrow \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相交.

判据 2 $f(\lambda)$ 有 3 个相异负根, 均属于 $(-\infty, -a^2]$, 但至多一个为 $-a^2 \Rightarrow \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相交.

判据 3 $f(\lambda)$ 有负重根, 均属于 $(-\infty, -a^2]$, 但至多一个为 $-a^2 \Rightarrow \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相交.

判据 4 $f(\lambda)$ 有 3 个相异负根, 且其中两个属于 $[-a^2, 0) \Rightarrow \mathbf{B}$ 内含于 $\mathbf{A}$.

判据 5 $f(\lambda)$ 有负重根, 属于 $(-a^2, 0) \Rightarrow \mathbf{B}$ 内切于 $\mathbf{A}$.

判据 6 $f(\lambda)$ 的解刚好为 $\{-a^2, -a^2, -b^2/a^2\}$, 若 $a^2 > b \Rightarrow \mathbf{B}$ 内含于 $\mathbf{A}$, 若 $a^2 \leq b \Rightarrow \mathbf{B}$ 内切于 $\mathbf{A}$.

由上述位置判据, 可判断平面上 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的位置情况, 获得二次曲线 A_2 和 B_2 或 A_2^* 和 B_2^* 的位置关系, 进一步反推二次曲面 A_1 和 B_1 的关系, 从而获得原问题目标安全走廊 A_0 和航天器误差椭球 B_0 的位置关系.

3 安全走廊内碰撞判断主要步骤

对于追踪星于无控翻滚失效目标安全走廊内的碰撞可能性判断问题, 其判断主要步骤如下.

步骤 1 根据两航天器的动力学特性和外形特征, 建立目标安全走廊圆锥面模型与误差椭球模型.

步骤 2 建立 S_1 系, 并记 S_1 系下圆锥面与误差椭球的二次型对应矩阵分别为 $\mathbf{B}_0$ 与 $\mathbf{A}_0$.

步骤 3 将 $z = 0$ 带入 A_0 所在方程, 得曲线 f^* , 判断 f^* 是否为实椭圆或一个点, 若是, 则说明 xy 平面与 A_0 有交点, B_0 与 A_0 相交, 计算结束.

步骤4 将 B_0 射影变换为标准圆柱面,同时 A_0 进行相同变换,记变换后分别为 B_1 和 A_1 .

步骤5 将 B_1 和 A_1 分别向 xy 平面投影,得圆 C_B 和椭圆 C_A .

步骤6 将椭圆标准化,并在圆上施加同样的变换,得变换后两曲线对应二次型矩阵 A_2 和 B_2 .

步骤7 判断 A_2 长轴,若长轴大于等于1,将 A_2 和 B_2 分别对应标准椭圆 A 与标准单位圆 B ,记符号Flag=0,并跳至步骤9.

步骤8 将 A_2 仿射变换为圆,并在 B_2 上施加相同变换成为椭圆,重复步骤6,标准化后分别记为 A_2^* 和 B_2^* ,并分别对应标准单位圆 B 和标准椭圆 A ,记符号Flag=1.

步骤9 定义广义特征函数 $f(\lambda)=\det(\lambda A+B)$,获得 $f(\lambda)=0$ 的解,根据平面圆与椭圆位置代数判据获得 A 与 B 的位置关系.

步骤10 根据 A 与 B 的位置关系获得原问题 A_0 与 B_0 的位置关系:

- 1) A 与 B 相交 $\Rightarrow A_0$ 与 B_0 相交,危险;
- 2) B 内切于 $A \Rightarrow$ 若Flag=0, B_2 内切于 $A_2 \Rightarrow A_0$ 与 B_0 相交危险;若Flag=1, A_0 内切于 B_0 ,临界状态;
- 3) B 内含于 $A \Rightarrow$ 若Flag=0, B_2 内含于 $A_2 \Rightarrow A_0$ 与 B_0 相交危险;若Flag=1, A_0 内含于 B_0 ,安全;计算结束.

4 数值仿真

4.1 锥面与椭球位置判断仿真

为验证文中提出的目标安全走廊内碰撞判断方法,取表1中内含、内切、相交情况中各一种进行仿真计算.

4.4.1 内含

取表1中内含进行仿真计算,见表2、3以及如图6所示.

4.1.2 内切

取表1中内切进行仿真计算,见表4、5以及如图7所示.

4.1.3 相交

取表1中相交进行仿真计算,见表6、7以及如图8所示.

表2 曲面二次型矩阵参数(内含)

曲面	锥面	椭球面
对应矩阵	$B_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & -15 & 209 \end{bmatrix}$

表3 曲面判定过程及结果(内含)

Tab.3 Process and result of position relation determination between surfaces(included)

广义特征方程的根	λ_1	λ_2	λ_3
值	-8.71	-4.35	-1.0
平面判断结果	属判据4, B 内含于 A		
曲面判断结果	Flag=1,椭球内含于锥面		

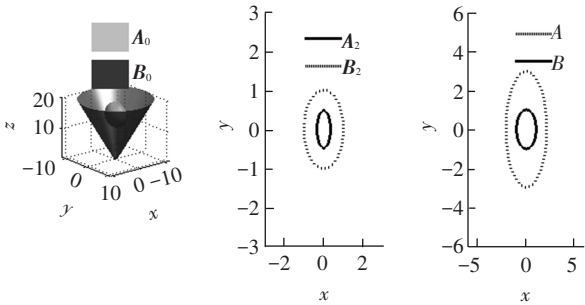


图6 判断椭球内含于锥面的过程

Fig.6 The process for determining the ellipsoid included in the cone

表4 曲面二次型矩阵参数(内切)

Tab.4 Quadratic matrix parameters of the surface(tangent)

曲面	锥面	椭球面
对应矩阵	$B_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & 108 \end{bmatrix}$

表5 曲面判定过程及结果(内切)

Tab.5 Process and result of position relation determination between surfaces(tangent)

广义特征方程的根	值	平面判断结果	曲面判断结果
λ_1	-2.0	属判据6, B 内切于 A	Flag=1,椭球内切于锥面
λ_2	-1.0		
λ_3	-1.0		

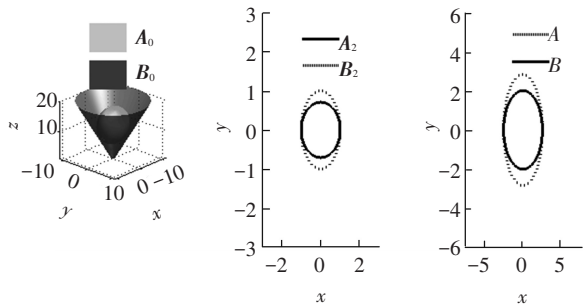


图7 判断椭球内切于锥面的过程

Fig.7 The process for determining the ellipsoid internally tangent in the cone

表6 曲面二次型矩阵参数(相交)

Tab.6 Quadratic matrix parameters of the surface(intersected)

曲面	锥面	椭球面
对应矩阵	$B_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & 108 \end{bmatrix}$

表 7 曲面判定过程及结果(相交)

Tab.7 Process and result of position relation determination between surfaces(intersected)

广义特征方程的根	值	平面判断结果	曲面判断结果
λ_1	-2.0	属判据 6, B 内切于 A	Flag=0, 椭圆与锥面相交
λ_2	-1.0		
λ_3	-1.0		

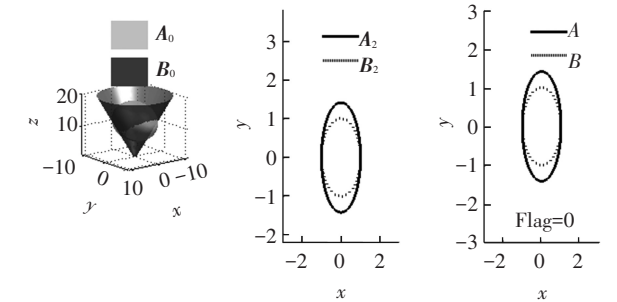


图 8 判断椭圆相交于锥面的过程

Fig.8 The process for determining the ellipsoid intersected in the cone

在内含、内切仿真中,由图 6、7 可看出,曲面 A_0 和 B_0 经射影变换和投影后,平面单位圆 B_2 半径大于平面椭圆 A_2 长轴,故进行了安全走廊内碰撞判断的步骤 8,将问题重新规划,使得 A_2 对应判据标准圆 B , B_2 对应判据标准椭圆 A ,并记 $\text{Flag}=1$.而在相交中, A_2 长轴大于 B_2 半径,则 A_2 和 B_2 分别对应 A 和 B ,同时 $\text{Flag}=0$.比较内切、相交并结合图 7、8 可发现,其平面判断结果是相同的,但因 Flag 值的不同,其曲面判断结果是不同的,这是因为 A_0 和 B_0 经射影变换后,原锥面变换为单位圆 B_2 ,虽然在平面上 B_2 与 A_2 属内切关系,但还原到曲面上,两者可能是相交的,对于平面内含的结果也同样如此.因此在判断过程中记录 Flag 的值并用于最终结果判断是必要的.

由上述 3 组仿真可看出,将锥面与椭圆的位置关系问题变换为平面圆与椭圆的问题进行判断是可行的,平面曲线的判断结果经过 Flag 值的辨别可用于反推曲面的判断结果,其判断结果准确.

4.2 目标安全走廊内碰撞判断仿真

假设目标星为运行在轨道高度为 $R=26\ 115\text{ km}$ 圆轨道上的空间翻滚对称失效卫星,其外形可以简化为非合作目标安全走廊模型中卫星模型,计算可得目标星轨道周期为 $T=2\pi\sqrt{R^3/\mu}=45\ 000\text{ s}$.设目标星的最大惯量轴距太阳帆板边缘角为理想值 $\eta=\pi/2$,最大章动角 $\vartheta_m=11\pi/40$,则可得 $\theta_m=9\pi/40$.假设追踪星在目标星安全走廊内停留的时间为 $t_2-t_1=1\ 500\text{ s}$,假设目标星动量矩在 t_1 时刻为

$$\boldsymbol{H}_L(t_1) = (\sin(\pi/30), \cos(\pi/30), 0)^T,$$

则计算可得 $\boldsymbol{H}_L(t_2) = (-\sin(\pi/30), \cos(\pi/30), 0)^T$. 由于走廊内停留时间与目标轨道周期相比相对较

小,故可以取 $\boldsymbol{H}_L(t_1)$ 和 $\boldsymbol{H}_L(t_2)$ 的交集作为安全走廊,取误差角 $\varepsilon=\pi/40$,可得走廊中心线方向及锥面半锥角为

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{H}_L\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) / \left\| \boldsymbol{H}_L\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \right\| = (0, 1, 0)^T, \\ \theta = \theta_m - \varepsilon - \arccos\left(\frac{\boldsymbol{H}_L(t_1) \cdot \boldsymbol{H}_L(t_2)}{\left\| \boldsymbol{H}_L(t_1) \right\| \left\| \boldsymbol{H}_L(t_2) \right\|}\right) / 2 = \pi/6 \end{cases}$$

假设追踪星在目标星 L 系下的初始位置为 $\bar{\boldsymbol{r}}_0 = (0, 170, 0)^T$,假定追踪星在 L 系下以速度 $v = 0.1\text{ (m/s)}$ 沿 $-y$ 轴匀速接近目标星,则追踪星标称位置为 $\bar{\boldsymbol{r}} = (0, 170-vt, 0)^T$,标称速度为 $\bar{\boldsymbol{v}} = (0, -v, 0)^T$, t 为追踪星在走廊内的飞行时间,设 T 为当前时刻,则有: $t=T-t_1 \leq t_2-t_1$.取追踪星星体包络椭球最长半轴 $u=3\text{ m}$.设追踪星初始误差相关参数为:

$$\boldsymbol{P}_{vv}(0) = 10^{-6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{P}_{rr}(0) = 10^{-4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{P}_{vr}(0) = \boldsymbol{P}_{rv}(0) = (0_{3 \times 3})^T. \quad (l=3)$$

为方便作图,在仿真过程中,用追踪星位置误差椭球的包络线替代误差椭球.由文献[15]可知,追踪星运动过程中误差椭球的包络方程为

$$\begin{cases} F = (\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}})^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}) - 1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

追踪星动力学过程采用 C-W 方程,采用上述仿真条件,则追踪星在目标误差走廊内的运动轨迹及位置误差椭球的包络仿真结果如图 9 所示.

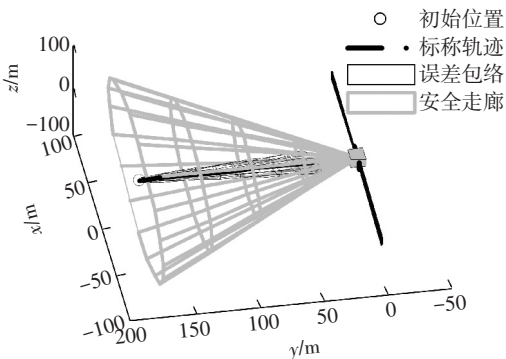


图 9 追踪星在安全走廊内运动轨迹及误差包络(1)

Fig.9 The trajectory and the position error envelope of the chaser in safe corridor (1)

由于篇幅有限,此处仅平均选取 t_1 到 t_2 内的 5 个时间点,计算在每个时间点位置误差椭球与安全走廊锥面的位置关系,见表 8.

表 8 中的结果反映了 5 个时刻分别对应的走廊锥面与误差椭球变换后的所得平面曲线的广义特征方程的根值及曲面间位置判断结果,结合图 9 可看出,走廊锥面与误差椭球位置判断结果正确,走廊锥

面始终包含追踪星误差椭球,接近过程中无碰撞危险,该轨迹是安全的。

表 8 广义特征方程根及判断结果 (1)

Tab.8 Roots of generalized characteristic equation and the relevant determination results (1)

时间点	广义特征方程的根	判断结果
1	(-524.00,-523.00,-1.00)	包含⇒安全
2	(-159.00,-156.00,-1.00)	包含⇒安全
3	(-52.10,-49.90,-1.00)	包含⇒安全
4	(-15.00,-13.70,-1.00)	包含⇒安全
5	(-2.02,-1.58,-1.07)	包含⇒安全

将追踪星的运动规律改为 $\bar{r}_0 = (-70,150,0)^T$, $\bar{v} = (0.5v,-v,0)^T$,则追踪星在 L 系下的标称位置为 $\bar{r} = (-70+0.5vt,150-vt,0)^T$,其他条件不变,再次仿真可得追踪星在目标误差走廊内的运动轨迹及位置误差椭球的包络,如图 10 所示。

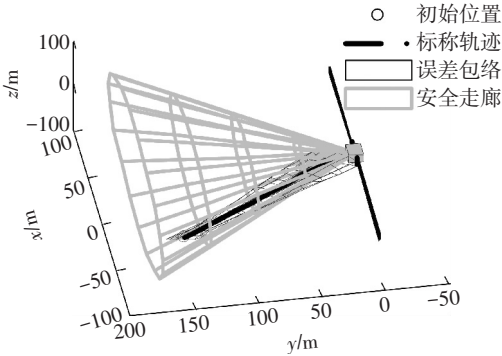


图 10 追踪星在安全走廊内运动轨迹及误差包络 (2)

Fig.10 The trajectory and the position error envelope of the chaser in safe corridor (2)

同样选取 t_1 到 t_2 内的 5 个时间点,可得对应广义特征方程根及判断结果见表 9。

表 9 广义特征方程根及判断结果 (2)

Tab.9 Roots of generalized characteristic equation and the relevant determination results (2)

时间点	广义特征方程的根	判断结果
1	(-397.00,-70.20,-2.91)	包含⇒安全
2	(-112.00,-18.50,-2.99)	包含⇒安全
3	(-32.00,-3.39±1.92i)	相交⇒危险
4	(-6.49,-0.912±1.45i)	相交⇒危险
5	无(A_0 与 z 平面相交)	相交⇒危险

表 9 给出了对应图 10 中追踪星轨迹中平均 5 个时刻的目标走廊锥面与追踪星位置误差椭球变换后所得平面曲线的广义特征方程的根及判断结果。在时刻 1、2,追踪星误差椭球仍包含在走廊锥面内,轨迹暂时安全。在时刻 3 后,开始出现共轭虚根,说明椭球与锥面已经开始出现相交情况,而在时刻 5,此时追踪星误差椭球已经穿越 S_1 系 xy 平面,不需

要再进行变换,直接可判断椭球与锥面相交。从时刻 1 到时刻 5,两曲面的位置关系是渐变的,误差椭球也是逐渐穿过 xy 平面的,说明该算例的判断结果是正确的。该算例中,追踪星在目标安全走廊内的标称轨迹是危险的,对于这种情况,应重新对轨迹进行设计,或采取避撞机动措施。

综上所述,锥面与椭球位置判定方法可以准确地运用在目标安全走廊内的碰撞判断问题中。当给定追踪星在目标安全走廊内的标称轨迹后,可以判断出给定初始误差参数下的安全走廊与误差椭球的位置判断结果。根据判断结果,可以判定该标称轨迹是安全或危险,当判定该轨迹危险时,可对标称轨迹重新设计或采取机动措施避撞。

5 结 论

1) 通过在目标 LVLH 系下建立目标安全走廊锥面模型与追踪星位置误差椭球,可将走廊内的碰撞判断问题转化为两曲面位置关系的判定问题。

2) 通过将锥面射影变换为圆柱面、椭球射影变换为二次曲面,再经由平面投影和曲线标准化后,可将锥面与椭球面的位置判定问题转化为平面单位圆与椭圆的位置判定问题。

3) 利用平面曲线位置判据的平面圆与椭圆位置关系判定结果,可反推出原锥面与椭球的位置关系,进而对应目标走廊内的碰撞判断结果。

4) 数值仿真结果说明了文中提出的方法可以准确地判断锥面与椭球面在空间中的位置关系,并且可以运用在追踪星于目标安全走廊飞行过程中。通过判定飞行过程中目标走廊锥面与追踪星位置误差椭球的位置关系,从而判定追踪星标称轨迹是否安全。

参考文献

[1] SUN Liang, HUO Wei. Robust adaptive control of spacecraft proximity maneuvers under dynamic coupling and uncertainty[J]. Advances in Space Research, 2015, 56(10): 2206-2217. DOI: 10.1016/j.asr.2015.08.029.

[2] 白显宗,陈磊,张翼,等.空间目标碰撞预警技术研究综述[J].宇航学报,2013,34(8): 1027-1039. DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.08.001.

BAI Xianzong, CHEN Lei, ZHANG Yi, et al. Survey on collision assessment and warning techniques for space object[J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(8): 1027-1039. DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.08.001.

[3] 白显宗.空间目标轨道预报误差与碰撞概率问题研究[D].长沙:国防科学技术大学,2013.

BAI Xianzong. Research on orbital prediction error and collision probability of space objects[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2013.