

DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201711044

复杂边界条件轴向功能梯度梁动力学分析

黄意新^{1,3}, 穆 洲², 郭明全³, 田 浩³

(1. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084; 2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076;
3. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 为分析复杂边界条件及截面属性对轴向功能梯度梁动力学特性的影响, 采用 Gauss-Lobatto 节点与 Chebyshev 多项式对变截面轴向功能梯度梁变形场进行离散, 利用 Chebyshev 谱方法和 Lagrange 方程推导了系统的离散控制方程, 通过投影矩阵法施加经典及弹性连接边界条件, 分析了材料梯度指数、截面变化率、弹性支撑边界条件、末端集中质量等因素对系统固有频率的影响. 结果表明: 截面变化率和材料梯度指数对固有频率的影响因边界条件不同而不同; 悬臂梁的前一阶量纲一的固有频率随着截面变化率的增大而增大, 其他情况下则随截面变化率的增大而减小; 悬臂梁的一阶固有频率随材料梯度指数先增大后逐渐减小, 而其余各阶频率均显示出增大的趋势, 而两端固支梁的前两阶频率呈现减小趋势, 后两阶频率则显示出增大的趋势; 两端简支梁各阶固有频率皆随材料梯度指数增大而增大; 随着弹性支承刚度的增大各阶固有频率均呈阶梯状增大, 但当弹性支撑刚度较小时, 旋转弹簧相较线性弹簧对系统固有频率影响更大; 末端附加质量将使固有频率减小且对高阶固有频率的影响更大.

关键词: 动力学特性; Chebyshev 谱方法; 轴向功能梯度材料; Timoshenko 梁; 集中质量

中图分类号: O326; TB33 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2018)10-0143-08

Dynamic analysis of axially functionally graded beams with complex boundary conditions

HUANG Yixin^{1,3}, MU Zhou², GUO Mingquan³, TIAN Hao³

(1. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Beijing Institute of Aerospace System Engineering, Beijing 100076, China; 3. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To investigate the effects of boundary conditions and geometric properties on dynamic characteristics of axially functionally graded beams, Gauss-Lobatto sampling and Chebyshev polynomials are used to discretize deformation fields of the beams, and the discrete governing equations are obtained by utilizing Chebyshev spectral method and Lagrange's equation. After employing projection matrices, classical as well as elastic boundary conditions are incorporated in the governing equations. The effects of various parameters, such as material gradient index, cross-sectional area, and attached tip mass on the vibration of the beams are analyzed. The results show that these effects differ for different boundary conditions. As the taper ratio increases, the first natural frequency of the cantilever beam increases simultaneously. While for the beams with other boundary conditions, their natural frequencies decrease. With the raising of the material gradient index, the first natural frequency of the cantilever beam increases firstly and then decreases, but other frequencies all increase. But for the fixed-fixed beam, its first two natural frequencies decrease, the third and the fourth increase. For the pinned-pinned beam, all natural frequencies increase with increasing material index. When the elastic support becomes stiffer, all natural frequencies increase with a step. The effect of the rotational spring is more pronounced than the translational spring when the elastic supports are of low stiffness. The attached tip mass makes the natural frequencies smaller and this effect appears more pronounced for higher modes.

Keywords: dynamic characteristics; Chebyshev spectral method; axially functionally graded materials; Timoshenko beam; tip mass

功能梯度材料 (functionally graded materials, FGMs) 是一种非均匀的新型复合材料, 其成分、密度

等物理属性沿某一方向呈现连续梯度变化, 因其物理性能没有突变, 所以可以较好的避免或降低应力集中现象, 这是与传统复合材料的不同之处^[1-2]. 由于其具有特殊的性能, 如高刚度和热抗性; 同时具有很好的可设计性, 可以有针对性地改变各组分材料体积分数的空间分布规律, 从而达到优化结构内部

收稿日期: 2017-11-09
基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (2013CB733004); 中国博士后科学基金 (2018M630167)
作者简介: 黄意新 (1987—), 男, 博士, 助理研究员
通信作者: 田 浩, tih@hit.edu.cn

应力分布的目的^[3]. 所以这种材料在航空航天、汽车船舶、核反应堆、能源动力等工程领域具有十分广阔的应用前景. 因此引起国内外大量学者的广泛关注和研究.

功能梯度材料可以按所设计的方向进行材料属性变化, 其中材料属性梯度变化规律最常见的为指数函数型^[4]和幂函数型^[5]. 对于功能梯度梁, 其材料属性通常沿厚度方向或轴向变化. 在对材料属性沿厚度方向变化的功能梯度梁动力学特性分析中, 姚晓莎等^[6]采用微分求积法, 分析了轴向运动速度对功能梯度 Euler-Bernoulli 梁的横向振动特性以及失稳形式的影响. Pradhan 等^[7]利用 Rayleigh-Ritz 法分析了功能梯度 Timoshenko 和 Euler-Bernoulli 梁动力学特性, 给出了材料属性、梁长细比对梁固有频率的影响. 对于材料属性沿轴向变化的功能梯度梁, 由于其控制方程是变系数的, 因此处理起来更为复杂. Shahba 等^[8-9]通过有限元方法和微分变化单元法(differential transform element method)对变截面轴向功能梯度 Euler-Bernoulli 和 Timoshenko 梁的自由振动和轴向稳定性进行了研究, 分析了不同材料属性和截面变化率对固有频率和临界屈曲载荷的影响. Rajasekaran^[10-11]利用差分变换方法和低阶微分求积单元法对旋转的轴向梯度楔形 Euler-Bernoulli 和 Timoshenko 梁分别进行了自由振动分析. 黄意新等^[12-14]提出了一种改进的 Chebyshev 谱方法, 并将其应用于均匀与变截面轴向功能梯度 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的动力学分析, 该方法具有近似指数收敛特性且计算精度与效率较有限元等数值计算方法更具优势.

但上述研究均是对经典边界条件下的功能梯度 Euler-Bernoulli 梁或 Timoshenko 梁进行动力学分析, 而对于弹性连接边界、集中质量等因素考虑较少, 而实际工程中边界条件对系统固有频率、模态振型等动力学特性的影响往往不可忽略. 因此, 本文将基于 Timoshenko 梁理论, 利用改进型的 Chebyshev 谱方法对复杂边界条件下的变截面轴向功能梯度梁动力学特性进行研究. 其中复杂边界条件问题将通过投影矩阵法进行处理, 以便在不需重新推导系统动力学方程的前提下计算不同边界条件下系统的固有频率数值解, 进而对材料梯度指数、截面变化率、集中质量等参数效应进行分析研究.

1 动力学建模

1.1 系统动能与势能

考虑如图 1 所示的长为 l 的变截面轴向功能梯度梁, 其材料属性沿梁的轴向连续变化, 材料属性如

剪切模量 G 、弹性模量 E 、密度 ρ , 以及截面积 A 均为轴向坐标 x 的函数.

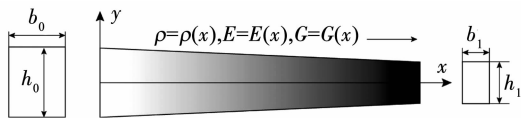


图 1 变截面轴向功能梯度梁

Fig. 1 An axially FGM beam with non-uniform cross-section

基于 Timoshenko 梁理论, 考虑剪切变形和转动惯量的影响, 根据文献 [15] 可得 Timoshenko 梁的动能为

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}, \quad (1)$$

其中:

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx,$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) I(x) \left(\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx.$$

势能为

$$U = U_{\text{bending}} + U_{\text{shear}}, \quad (2)$$

其中:

$$U_{\text{bending}} = \frac{1}{2} \int_0^l E(x) I(x) \left(\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx,$$

$$U_{\text{shear}} = \frac{1}{2} \int_0^l \kappa G(x) A(x) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \alpha(x, t) \right)^2 dx.$$

式中: $w(x, t)$ 为梁的横向振动位移; $\alpha(x, t)$ 为由于弯曲引起的转动角度; κ 为梁的截面剪切系数. 由上述各式可得系统 Lagrangian 函数 $L = T - U$.

1.2 离散动力学方程

利用文献 [12] 中所提出的改进型 Chebyshev 谱方法对轴向功能梯度梁的变形场进行离散, 然后根据第 2 类 Lagrange 方程推导系统动力学方程.

根据 Chebyshev 谱方法, 对于任意在定义域 $x \in [-1, 1]$ 上连续可导且平方可积的函数 $y(x)$ 可采用 Chebyshev 多项式进行逼近:

$$y_N(x) \approx \sum_{k=0}^{N-1} a_k T_k(x).$$

式中: N 为采用的多项式项数, $T_k(x)$ 为第 k 项 Chebyshev 多项式. 基于文献 [12] 中的函数逼近方法, 在已知函数 $y(x)$ 在 N 个 Gauss-Lobatto 节点上的值时, 可以得到其 n 阶导数的逼近^[13]

$$y^{(n)} = \mathbf{I}_B \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{I}_B^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{Q}_n \mathbf{y}, \quad (3)$$

式中, $\mathbf{Q}_n$ 为 n 阶 Chebyshev 微分矩阵. 此外, 对于在定义域 $[l_1, l_2]$ 上连续可导且平方可积的两个函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 其内积可表示为

$$\int_{l_1}^{l_2} f(x) g(x) dx = \mathbf{f}^T \mathbf{V} \mathbf{g}.$$

式中: $\mathbf{V}$ 为 $N \times N$ 阶 Chebyshev 内积矩阵; $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{g}$ 分别为

函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的 Gauss-Lobatto 节点值列向量. 此外, 函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 关于函数 $h(x)$ 的加权内积可表示为

$$\int_{l_1}^{l_2} f(x) g(x) h(x) \mathrm{d} x = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_h \boldsymbol{g}, \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{V}_h$ 是关于函数 $h(x)$ 的 $N \times N$ Chebyshev 加权内积对角阵. 与文献[13]不同的是文献[12]对函数的内积矩阵和加权内积矩阵进行了重新推导, 新推导出的加权内积矩阵为对角阵, 大大减小了运算量.

令:

$$\begin{aligned} f(x) &= E(x) I(x), \quad g(x) = \kappa G(x) A(x), \\ m(x) &= \rho(x) A(x), \quad s(x) = \rho(x) I(x). \end{aligned}$$

根据式(3)、(4)可将式(1)中动能和式(2)中势能表示为:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_f \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_g \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{w} - 2 \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_g \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_g \boldsymbol{\alpha}), \quad (5)$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_m \dot{\boldsymbol{w}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_s \dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{w}$ 、 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别为位移 w 和转角 α 在 N 个 Gauss-Lobatto 节点上的值向量; $\boldsymbol{V}_f$ 、 $\boldsymbol{V}_g$ 、 $\boldsymbol{V}_m$ 、 $\boldsymbol{V}_s$ 分别为关于函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $m(x)$ 和 $s(x)$ 的加权内积矩阵. 考虑式(5)、(6), 利用 Lagrange 方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

表 1 各类边界条件及其数学表达式
Tab. 1 Formulas of boundary conditions

边界条件	连续形式条件($x = 0$ 或 $x = L$)	离散形式条件($i = N$ 或 $i = 1$)
简支(Hinged, H)	$w = 0, \quad \alpha' = 0$	$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{w} = 0, \quad \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{a} = 0$
固支(Clamped, C)	$w = 0, \quad \alpha = 0$	$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{w} = 0, \quad \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{\alpha} = 0$
自由(Free, F)	$\alpha' = 0, \quad a - w' = 0$	$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{a} = 0, \quad \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{w}) = 0$
线弹性支撑	$\kappa G A (w' - a) - k_t w = 0, \quad EI a' = 0$	$\kappa G A \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{w} - \boldsymbol{a}) - k_t \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{w} = 0, \quad EI \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{a} = 0$
扭转弹性支撑	$EI a' - k_r a = 0, \quad \kappa G A (w' - a) = 0$	$EI \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{a} - k_r \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{a} = 0, \quad \kappa G A (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{w} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{a}) = 0$

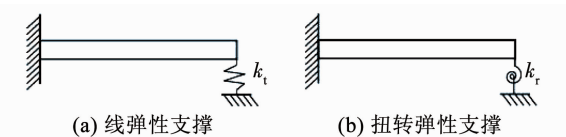


图 2 弹性支撑边界条件
Fig. 2 elastic supports

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_N & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_N \\ \boldsymbol{e}_1 (\kappa G A \boldsymbol{Q}_1 - k_t \boldsymbol{I}) & -\boldsymbol{e}_1 \kappa G A \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_1 EI \boldsymbol{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0},$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为 $N \times N$ 单位矩阵. 同样, 对于扭转弹性支撑边界条件则有

可以得到未考虑边界条件时的变截面轴向功能梯度 Timoshenko 梁自由振动的离散控制方程为

$$\boldsymbol{M} \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}, \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V}_s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{K} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_g \boldsymbol{Q}_1 & -\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_g \\ -\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_g & \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_f \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{V}_g \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2 边界条件

为了方便地处理各类经典与复杂边界条件问题, 本文采用投影矩阵法向式(7)所描述的离散系统施加各类边界条件.

表 1 给出了各类边界条件的数学表达式, 其中上标“ $\cdot$ ”为对变量 x 的偏导数, $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个元素为 1 其余元素均为 0 的 N 维行向量. 对于表中各类线性边界条件可以表示成如下形式:

$$\boldsymbol{B} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}, \quad (8)$$

式中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数 M 代表了边界条件的个数, 例如, 对于图 2 (a) 中的线弹性支撑梁则有 4 个边界条件, 即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_N & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_N \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_1 (EI \boldsymbol{Q}_1 - k_r \boldsymbol{I}) \\ \boldsymbol{e}_1 \kappa G A \boldsymbol{Q}_1 & -\boldsymbol{e}_1 \kappa G A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

对于满足式(8)中 M 个约束条件的方程(7)的解($2N$ 维向量)将是 $2N - M$ 维空间中的向量且可以表示为

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{q}}, \quad (9)$$

式中: $\tilde{\boldsymbol{q}}$ 为 $2N - M$ 维列向量, $\boldsymbol{P}$ 为从原 $2N$ 维空间到 $2N - M$ 维子空间的 $2N \times (2N - M)$ 维投影矩阵, 如图 3 所示. 且 $\boldsymbol{P}$ 可以通过对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的奇异值分解求得.

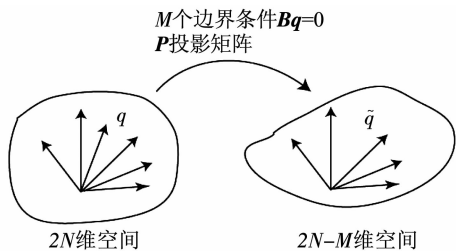


图 3 投影矩阵

Fig. 3 Projection matrix

将式(9)代入式(7)即可得到施加边界条件后的系统离散形式控制方程为

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{q}} + \tilde{K} \tilde{q} = 0,$$

其中:

$$\tilde{M} = P^T M P, \quad \tilde{K} = P^T K P,$$

分别为系统质量阵与刚度阵,且 $\tilde{M}$ 为对角阵, $\tilde{K}$ 为对称阵.采用状态空间法即可获得系统固有频率与模态振型的数值解 $\tilde{q}$,再利用式(9)可将结果变换至原 $2N$ 维空间中得到解 q .通过投影矩阵法可以方便地处理各类复杂边界条件,且在推导系统离散控制方程时无需考虑具体的边界条件形式,待得到未施加边界条件的控制方程后再行处理.

3 数值算例

首先通过数值算例验证本文方法的正确性,在此基础上进一步分析截面变化率、材料属性和复杂边界条件等因素对系统动力学特性的影响.

假定功能梯度材料由 ZrO_2 和Al两种材料成分构成,其属性沿轴向呈指数变化规律为:

$$T(x) = T_z + (T_a - T_z) \left(\frac{x}{l} \right)^n,$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - c \frac{x}{l} \right), \quad I(x) = I_0 \left(1 - c \frac{x}{l} \right)^3.$$

式中: T 为材料属性 ρ 、 E 、 G 等,下标 z 、 a 分别为材料 ZrO_2 和Al; A 为截面面积; I 为截面惯性矩,下标0代表 $x=0$ 处(即梁的左端); c 为截面变化率; n 为材料梯度指数.取 $E_z = 200$ GPa, $\rho_z = 5700$ kg/m³, $E_a = 70$ GPa, $\rho_a = 2702$ kg/m³,不同梯度指数下弹性模量沿轴向变化规律如图4所示.

为方便与文献[8]对比,定义量纲一的参数:

$$r = \frac{I_0}{A_0 l^2}, \quad \varpi = \omega \sqrt{\frac{\rho_0 A_z l^4}{E_z I_0}},$$

式中: r 为梁的细长比, ϖ 为量纲一的固有频率.取 $r = 0.01$,截面剪切系数 $\kappa = 5/6$,泊松比 $\nu = 0.3$,材料梯度指数 $n = 2.0$.计算不同截面变化率、不同边界条件下梁的固有频率,结果如图5与表2所示.

图5为固支-自由(C-F)边界条件、截面变化率 $c = 0.1$ 时Chebyshev谱方法计算结果的收敛性,从中可以看出随着采用的Chebyshev多项式项数 N 的增大,各阶固有频率将收敛于稳定值,对于前四阶频率计算,取 $N = 12$ 即可满足计算精度要求.从表2中可以看出,采用12阶Chebyshev多项式时,其计算精度与文献[8]中采用30个单元时的结果吻合很好,验证了本文方法的正确性.

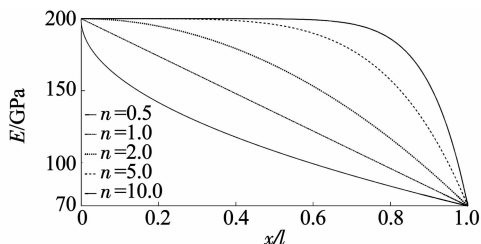


图 4 不同材料梯度指数时弹性模量沿轴向变化规律

Fig. 4 Young's modulus with respect to different n

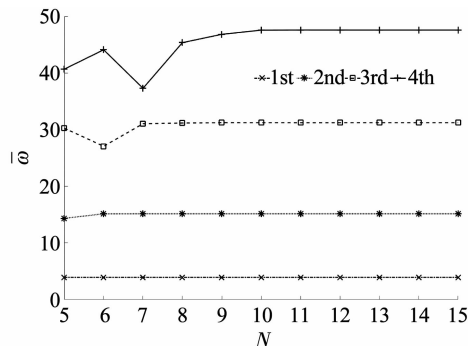


图 5 量纲一的固有频率计算结果收敛性

Fig. 5 The convergence of dimensionless natural frequencies

3.1 截面与材料属性影响

从表2可以发现悬臂梁的前一阶量纲一的固有频率随着截面变化率的增大而增大,如表中粗体数字所示,而其他阶量纲一的固有频率均表现出减小趋势.对于两端简支(H-H)和两端固支(C-C)边界条件,各阶量纲一的固有频率均随着截面变化率的增大而减小.

为了解材料非均质性对梁动力学特性的影响,采用12阶Chebyshev多项式,在截面变化率 $c = 0.1$ 的情况下,图6~8给出了不同边界条件下,材料梯度指数 n 对前四阶量纲一的固有频率的影响.从中可以看出,对于不同的边界条件,随着 n 的增加,对前四阶量纲一的固有频率有不同的影响.从图6中可以发现,悬臂梁的一阶固有频率在 $n = 1.35$ 时,量纲一的固有频率增加到 $\varpi = 3.96693$,然后开始有下降的趋势.但其他各阶频率则均呈现单调增加的趋势.这说明对于悬臂梁,存在着一个最优的材料梯度指数 n 使其一阶固有频率取得最大值.从图7中可以看到,两端简支梁的前四阶量纲一的固

有频率均随着 n 值的增加而增加. 从图 8 中可以发

有频率呈现下降趋势, 而三、四阶量纲一的固有频率

现, 随着 n 的增加, 两端固支梁的前两阶量纲一的固

则呈现增加的趋势.

表 2 不同边界条件和截面变化率下前四阶量纲一的固有频率
Tab. 2 The first four dimensionless natural frequencies with different boundary conditions ($n = 2.0$)

c	边界条件	Chebyshev 谱方法($N = 12$)				有限元方法(30 个单元) ^[8]			
		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4
0.1	C-F	3.935 8	15.157 5	31.262 7	47.716 1	3.935 9	15.157 7	31.263 8	47.716 4
0.2		3.995 5	15.020 8	30.772 0	47.304 4	3.995 6	15.024 7	30.809 2	47.436 2
0.3		4.063 8	14.856 9	30.249 7	46.816 4	4.064 0	14.861 1	30.286 0	46.948 1
0.4		4.143 4	14.658 8	29.646 1	46.131 1	4.143 8	14.663 6	29.681 8	46.261 0
0.5		4.238 6	14.422 4	28.943 4	45.236 4	4.239 3	14.428 2	28.979 1	45.363 4
0.6		4.356 0	14.143 9	28.116 6	44.096 1	4.357 1	14.151 3	28.153 2	44.220 1
0.7		4.507 4	13.821 4	27.128 8	42.640 2	4.509 0	13.831 4	27.168 4	42.763 0
0.8		4.715 4	13.464 5	25.926 0	40.738 8	4.718 0	13.479 3	25.973 5	40.866 6
0.9		5.033 1	13.144 6	24.450 3	38.139 3	5.037 1	13.170 0	24.521 2	38.296 8
0.1	H-H	7.652 9	23.713 7	41.806 6	57.870 7	7.654 5	23.736 9	41.821 0	57.873 9
0.2		7.290 3	23.112 3	41.010 7	59.179 8	7.292 1	23.134 6	41.120 3	59.484 8
0.3		6.895 3	22.438 7	40.200 6	58.454 5	6.897 5	22.460 4	40.305 3	58.764 2
0.4		6.462 7	21.678 8	39.250 9	57.459 7	6.465 3	21.700 2	39.350 7	57.755 8
0.5		5.984 6	20.813 2	38.123 8	56.229 1	5.987 9	20.835 0	38.219 1	56.510 5
0.6		5.449 6	19.814 0	36.761 7	54.688 6	5.454 0	19.837 2	36.853 6	54.954 7
0.7		4.838 7	18.636 9	35.070 7	52.700 9	4.844 8	18.663 4	35.161 8	52.952 9
0.8		4.115 2	17.202 2	32.877 4	50.001 6	4.124 4	17.236 4	32.975 0	50.246 3
0.9		3.184 7	15.322 0	29.770 9	45.943 7	3.201 6	15.377 5	29.901 1	46.215 3
0.1	C-C	12.463 9	26.382 2	42.963 6	59.395 8	12.468 9	26.415 3	43.090 4	59.682 9
0.2		12.207 4	26.069 7	42.497 0	59.185 9	12.212 6	26.102 3	42.621 1	59.487 3
0.3		11.911 7	25.691 4	41.954 7	58.752 3	11.917 2	25.723 6	42.075 9	59.057 6
0.4		11.567 9	25.227 1	41.310 1	58.127 2	11.573 9	25.259 0	41.428 3	58.430 6
0.5		11.163 7	24.647 6	40.522 2	57.294 6	11.170 6	24.679 7	40.637 4	57.592 5
0.6		10.681 1	23.909 1	39.524 7	56.191 1	10.689 6	23.942 4	39.637 5	56.481 4
0.7		10.091 9	22.940 1	38.203 0	54.680 1	10.103 6	22.977 3	38.316 1	54.962 7
0.8		9.345 1	21.609 1	36.335 9	52.467 1	9.363 4	21.657 5	36.458 8	52.749 9
0.9		8.320 0	19.603 7	33.381 2	48.783 0	8.359 0	19.694 5	33.561 5	49.123 4

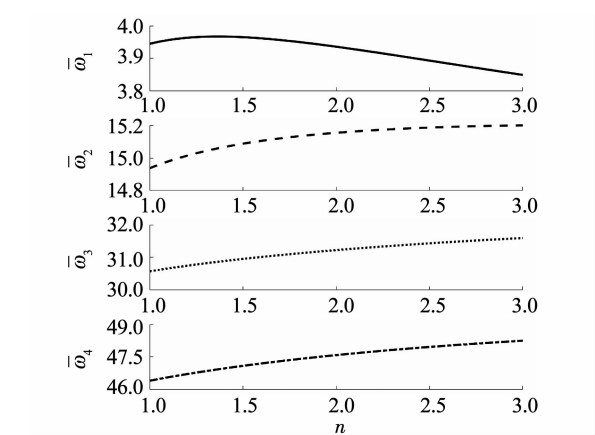


图 6 悬臂梁量纲一的固有频率随 n 的变化
Fig. 6 Dimensionless natural frequencies of the cantilever beam

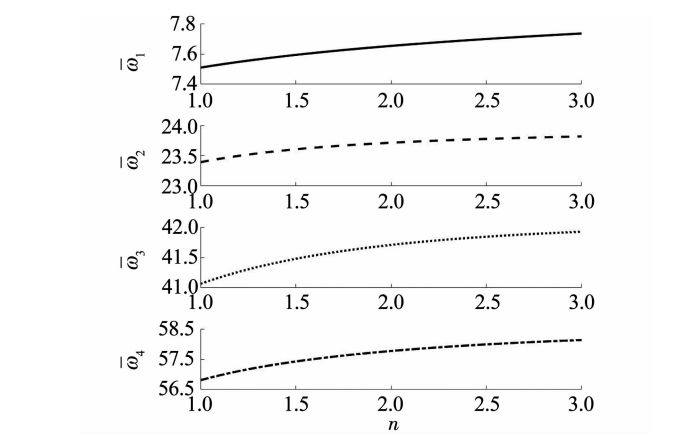


图 7 两端简支梁量纲一的固有频率随 n 的变化
Fig. 7 Dimensionless natural frequencies of the hinged-hinged beam

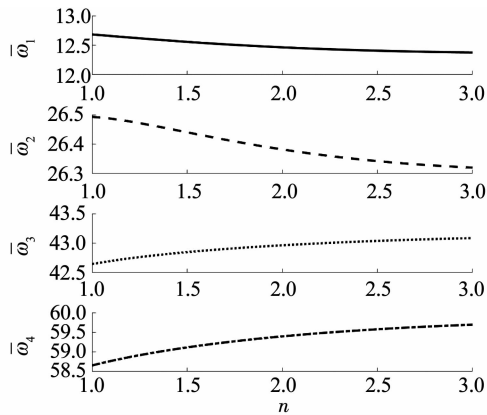


图 8 两端固支梁量纲一的固有频率随 n 的变化

Fig. 8 Dimensionless natural frequencies of the clamped-clamped beam

3.2 弹性连接边界影响

考虑如图 9 所示的弹性连接变截面轴向功能梯度 Timoshenko 梁,其一端为固定端,另一端为弹性约束. 定义量纲一的参数:

$$K_t = \frac{k_t l^3}{E_0 I_0}, \quad K_r = \frac{k_r l}{E_0 I_0}.$$

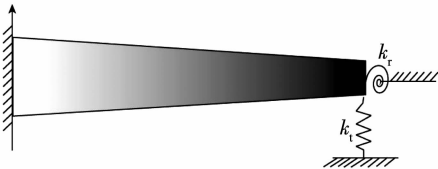


图 9 变截面轴向功能梯度 Timoshenko 梁的弹性约束模型

Fig. 9 An elastically restrained axially FGM beam with non-uniform cross-section

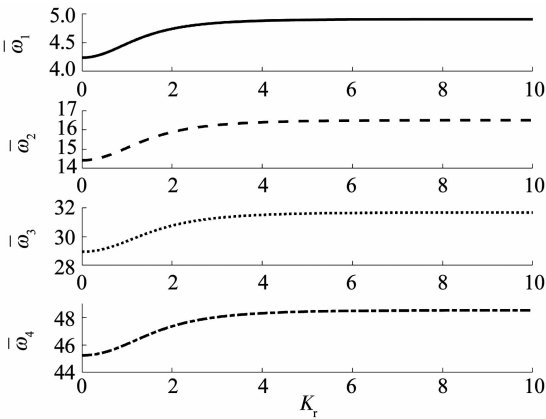


图 10 旋转弹簧约束条件下固有频率的变化

Fig. 10 The variation of dimensionless natural frequencies vs. rotational spring restrained

表 3 弹性约束下的前四阶量纲一的固有频率

Tab. 3 The first four dimensionless natural frequencies with an elastically restraint		$n = 2, \quad K_t = K_r$							
量纲一的固有频率	c	0.01	1.00	10.00	100.00	300.00	500.00	800.00	1 000.00
ϖ_1	0.1	3.935 8	3.956 1	4.748 2	6.322 3	10.274 80	11.713 0	12.263 40	12.379 1
ϖ_2		15.154 0	15.192 0	17.087 5	18.552 1	21.395 50	24.155 2	25.726 10	26.090 8
ϖ_3		31.225 7	31.258 8	33.196 2	34.748 1	36.655 90	39.451 9	41.792 40	42.419 8
ϖ_4		47.587 2	47.630 0	50.175 5	52.048 8	53.290 90	55.473 4	57.888 60	58.645 7
ϖ_1	0.5	4.238 6	4.482 0	4.957 8	8.063 8	10.803 10	11.097 8	11.176 90	11.188 8
ϖ_2		14.422 5	15.068 4	16.511 8	18.180 3	23.403 80	24.409 3	24.686 50	24.729 0
ϖ_3		28.943 5	29.677 9	31.660 6	32.579 6	38.122 60	40.029 4	40.589 40	40.676 7
ϖ_4		45.236 5	46.051 7	48.488 9	49.026 1	53.814 70	56.473 1	57.362 10	57.506 9
ϖ_1	0.9	5.068 3	5.150 4	6.080 7	8.317 8	8.323 38	8.241 1	8.327 62	8.326 3
ϖ_2		13.335 8	13.739 3	14.569 0	19.594 7	19.613 80	19.620 1	19.628 60	19.624 3
ϖ_3		24.807 6	25.608 8	26.145 9	33.360 2	33.408 60	33.419 4	33.424 90	33.425 5
ϖ_4		38.629 4	39.801 0	40.138 7	48.737 3	48.767 10	48.817 6	48.855 60	48.859 4

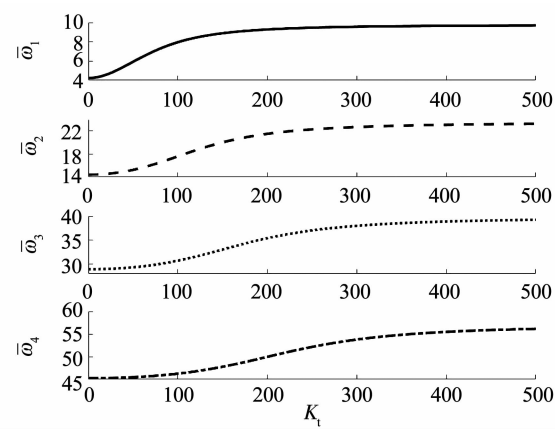


图 11 线性弹簧约束条件下固有频率的变化

Fig. 11 The variation of dimensionless natural frequencies vs. translational spring restrained

3.3 集中质量影响

对于一端固定, 一端附加质量块的轴向楔形功能梯度 Timoshenko 梁悬臂梁模型如图 12 所示, 定义量纲一的参数:

$$\alpha = \frac{I_m}{\rho_0 A_0 l^3}, \quad \beta = \frac{M_m}{\rho_0 A_0 l},$$

式中 I_m 、 M_m 分别为质量块的转动惯量与质量。

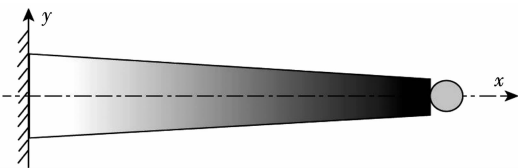


图 12 轴向功能楔形 Timoshenko 梁附加质量块模型

Fig. 12 Schematic of an axially FGM beam with tip mass

在材料属性 $n = 2.0$ 、截面变化率 $c = 0.1$ 、量纲一的参数 $\alpha = \beta$ 的条件下, 图 13 显示了前四阶量纲一的固有频率的变化。可以看出, 附加集中质量块可以使前四阶量纲一的固有频率减小, 并且附加质量块对高阶固有频率的影响更大。

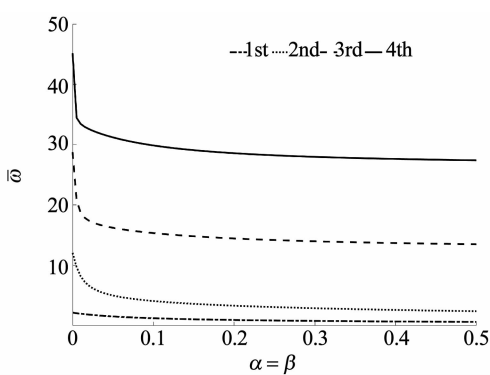


图 13 集中质量对悬臂梁量纲一的固有频率的影响

Fig. 13 Effect of the attached tip mass on the natural frequencies of a cantilever axially FGM beam

4 结 论

- 1) 随着截面变化率的增大, 悬臂梁一阶频率随之增大且其他阶频率随之减小, 两端简支梁与两端固支梁的各阶频率均随之减小。
- 2) 材料梯度指数对系统固有频率的影响因边界条件而不同; 对于悬臂梁, 其一阶量纲一的固有频率随材料属性 n 的增大呈先增大后减小的趋势; 两端简支梁的前四阶量纲一的固有频率随着 n 值的增加而增加; 两端固支梁的前两阶量纲一的固有频率随着 n 的增加呈现下降趋势, 而三、四阶量纲一的频率呈增大趋势。
- 3) 弹性支撑刚度的增大使量纲一的固有频率呈现阶梯状增大趋势, 最终收敛至一常值; 在刚度值较小时, 旋转弹簧相较线性弹簧对量纲一的固有频率的影响更大。
- 4) 附加集中质量使前四阶量纲一的固有频率减小, 且对高阶量纲一的固有频率的影响更大。

参考文献

[1] 韩杰才, 徐丽, 王保林, 等. 梯度功能材料的研究进展及展望[J]. 固体火箭技术, 2004, 27(3): 207. DOI: 10.3969/j. issn. 1006-2793. 2004. 03. 012

HAN Jiecai, XU Li, WANG Baolin, et al. Progress and prospects of functional gradient materials [J]. Journal of Solid Rocket Technology, 2004, 27(3): 207. DOI: 10.3969/j. issn. 1006-2793. 2004. 03. 012

[2] 仲政, 吴林志, 陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528

ZHONG Zheng, WU Linzhi, CHEN Weiqiu. Progress in the study on mechanics problems of functionally graded materials and structures [J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(5): 528

[3] 徐刚年. 功能梯度梁的力学行为研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2010

XU Gangnian. Research on mechanical behavior functionally graded beam[D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2010

[4] KIM J H, PAULINO G H. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(8): 1903. DOI:10.1002/nme.364

[5] GUPTA A, TALHA M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2015, 79: 1. DOI: 10.1016/j. paerosci. 2015. 07. 001

[6] 姚晓莎, 王忠民, 赵凤群. 轴向运动功能梯度梁的横向振动[J]. 机械工程学报, 2013, 49(23): 117. DOI:10.3901/JME. 2013. 23. 117

YAO Xiaosha, WANG Zhongmin, ZHAO Fengqun. Transverse vibration of axially moving beam made of functionally graded materials [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(23): 117. DOI: 10.3901/JME. 2013. 23. 117

- [7] PRADHAN K K, CHAKRAVERTY S. Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method[J]. Composites Part B: Engineering, 2013, 51(4): 175. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.02.027
- [8] SHAHBA A, ATTARNEJAD R, MARVI M T, et al. Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions[J]. Composites Part B: Engineering, 2011, 42(4): 801. DOI: 10.1016/j.compositesb.2011.01.017
- [9] SHAHBA A, RAJASEKARAN S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(7): 3094. DOI: 10.1016/j.apm.2011.09.073
- [10] RAJASEKARAN S. Differential transformation and differential quadrature methods for centrifugally stiffened axially functionally graded tapered beams[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 74: 15. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.04.004
- [11] RAJASEKARAN S. Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4440. DOI: 10.1016/j.apm.2012.09.024
- [12] ZHAO Yang, HUANG Yixin, GUO Mingquan. A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory[J]. Composite Structures, 2017, 168: 277. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.02.012
- [13] 黄意新, 田浩, 赵阳. 弹性连接旋转柔性梁动力学分析[J]. 力学学报, 2016, 48(4): 963. DOI: 10.6052/0459-1879-16-083
- HUANG Yixin, TIAN Hao, ZHAO Yang. Dynamic analysis of a rotating flexible beam with elastic boundary conditions[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(4): 963. DOI: 10.6052/0459-1879-16-083
- [14] 黄意新, 赵阳, 田浩, 等. 弹性支撑旋转 Timoshenko 梁动力学特性[J]. 噪声与振动控制, 2016, 36(3): 6. DOI: 10.3969/j.issn.1006-1335.2016.03.002
- HUANG Yixin, ZHAO Yang, TIAN Hao, et al. Dynamic characteristics of a spinning Timoshenko Beam with elastic supports[J]. Noise and Vibration Control, 2016, 36(3): 6. DOI: 10.3969/j.issn.1006-1335.2016.03.002
- [15] HAN S M, BENAROYA H, WEI T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 225(5): 935. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2257
- [16] LEUNG A Y T, ZHOU W E, LIM C W, et al. Dynamic stiffness for piecewise non-uniform Timoshenko column by power series—part I: Conservative axial force[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 51(5): 505. DOI: 10.1002/nme.159.abs

(编辑 张 红)

贺强教授研究成果实现纳米机器为肿瘤细胞做“外科手术”

哈工大报讯(王雪/文)基础与交叉科学研究院微纳米技术研究中心贺强教授团队在自驱动纳米马达的生物医学应用方面取得新进展。该团队借助仿生伪装的思想,构筑了巨噬细胞膜伪装的光驱动纳米马达,用于肿瘤细胞的自寻的靶向与识别,并成功实现在靶位肿瘤细胞膜表面的开孔,辅助外界物质向胞内的渗透。该研究成果以“自驱动纳米马达用于细胞膜的热机械打孔”为题发表于国际著名期刊《德国应用化学》(Angew. Chem. Int. Ed., 影响因子 12.102)。

近年来自驱动合成纳米机器的研究引起了各国科学家的广泛兴趣,因为它们有望进入人体在血液中自由穿行,执行微尺度任务,如药物主动输送、肿瘤精准治疗等。然而,如何实现自驱动纳米马达快速打开细胞膜或携带药物进入细胞内部仍然面临巨大的挑战。贺强教授团队基于前期光驱动金纳米壳修饰阴阳介孔二氧化硅纳米马达可克服强布朗运动实现自驱动运动的研究,通过“自下而上”的仿生组装方法,将新鲜分离的巨噬细胞膜伪装到阴阳介孔二氧化硅部分,研究表明在近红外光照射下,巨噬细胞膜的伪装能够有效地克服生物介质的污损、降低粘滞阻力,实现自驱动纳米马达在生物介质中的高速运动。同时,巨噬细胞膜的免疫特性能够提高自驱动纳米马达特异性识别效率,实现对肿瘤细胞自寻的主动靶向与识别。借助自身金纳米壳在近红外光照射下产生的局域热场,自驱动纳米马达可通过热和机械的双重作用在肿瘤细胞膜上瞬间开孔,将胞外物质如药物定向渗入胞内,导致肿瘤细胞的死亡。细胞膜伪装的光驱动纳米马达可从亚细胞水平上探索肿瘤的诊断与微创治疗,构建“纳米手术刀”,零距离接触病变部位,实施精准治疗。

原文链接: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/anie.201806759>

编辑:刘培香