

DOI:10.11918/201910211

四元数矩阵重构鲁棒波束形成算法

张 雪¹, 朱向鹏², 刘 帅¹, 闫锋刚¹, 王 军¹

(1. 哈尔滨工业大学(威海) 信息科学与工程学院, 山东 威海 264209; 2. 中国空间技术研究院西安分院, 西安 710000)

摘 要: 极化敏感阵列的四元数信号模型保持了偶极子阵元分量之间固有的正交性, 因而四元数 MVDR (Q-MVDR) 算法具有比传统复数域 MVDR 算法更优的性能, 但在强期望信号和导向矢量失配的情况下, Q-MVDR 算法性能严重下降, 甚至会出现期望信号相消现象. 针对此问题, 提出一种基于四元数矩阵重构的鲁棒波束形成算法. 首先建立极化敏感阵列的四元数模型, 将协方差矩阵重构方法扩展到四元数域, 利用子空间方法得到干扰信号的导向矢量估计, 并采用 Capon 谱估计方法获得干扰信号的功率, 重构出干扰噪声协方差矩阵; 然后根据信号子空间与噪声子空间的正交性, 以及期望信号导向矢量与信号子空间属于同一子空间的特性, 将权矢量投影到四元数信号子空间, 对期望信号导向矢量失配误差进行修正; 最后通过仿真实验验证了算法的有效性. 仿真结果表明, 在强期望信号和期望信号导向矢量失配时, 与传统算法相比, 本文算法有效避免期望信号相消引起的性能下降, 增强了算法的鲁棒性, 可以达到接近最优值的输出信干噪比 (SINR).

关键词: 四元数波束形成; 强期望信号; 导向矢量失配; 矩阵重构

中图分类号: X703.1

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2020)05-0023-07

Robust beamforming algorithm based on quaternion matrix reconstruction

ZHANG Xue¹, ZHU Xiangpeng², LIU Shuai¹, YAN Fenggang¹, WANG Jun¹

(1. School of Information and Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology (Weihai), Weihai 264209, Shandong, China;

2. China Academy of Space Technology (Xi'an), Xi'an 710000, China)

Abstract: The quaternion MVDR (Q-MVDR) algorithm has better performance than the traditional complex-domain MVDR algorithm due to the inherent orthogonality between the dipole element components in quaternion signal model of the polarization sensitive array. However, when it comes to the situation where strong desired signal and steering vector are mismatched, the performance of Q-MVDR will be degraded significantly, which can even aggravate the signal self-nulling effect. To address this problem, a robust beamforming algorithm based on quaternion matrix reconstruction was proposed. First, a quaternion signal model of polarization sensitive array was established, and the covariance matrix reconstruction method was extended to the quaternion domain. The steering vector and power of interference signals were obtained by subspace method, and the Capon spectral estimator was adopted to reconstruct the interference-plus-noise covariance matrix. Then, according to the orthogonality of signal subspace and noise subspace, as well as the characteristics that the desired signal vector and signal subspace belong to the same subspace, an improved version of steering vector mismatch correction method was introduced, which utilized the projection technique of weight vector to eigenspace signal subspace. Finally, the effectiveness of the algorithm was verified by numerical simulations. Simulation results show that the proposed technique had better robustness than traditional Q-MVDR algorithm in effectively avoiding the performance degradation caused by signal self-nulling effect, and it is able to provide similar SINR close to the optimal value in both strong desired signal and steering vector mismatch cases.

Keywords: quaternion beamforming; strong desired signal; steering vector mismatch; matrix reconstruction

极化敏感阵列的自适应波束形成技术能够同时利用极化信息和空域信息完成滤波, 相比传统标量阵列的纯空域滤波具有更加优良的抗干扰能力, 使其在重要的军事、民事等领域具有广泛的应用前

景^[1-2]. 四元数具有 4 个正交基, 特别适用于极化敏感阵列的信号建模及信号处理, 因此其在极化敏感阵列上得到了广泛的应用^[3-4]. 文献[5]提出的四元数 MVDR (Quaternion Minimum Variance Distortionless Response, Q-MVDR) 算法在干扰噪声协方差矩阵 (interference-plus-noise covariance matrix, IPNCM) 及期望信号导向矢量精确已知时具备优越的性能. 然而, 在实际应用中, 许多非理想因素不可忽视. 如: 由指向误差、阵元位置误差带来的

收稿日期: 2019-10-31

基金项目: 国家重点研发计划 (2016YFC1401201); 国家自然科学基金 (61871149); 装备预研领域基金 (61404150104)

作者简介: 张 雪 (1994—), 女, 硕士研究生

通信作者: 刘 帅, liu_shuai_boy@163.com

期望信号导向矢量失配^[6-8];精确的 IPNCM 难以获得,利用采样协方差矩阵代替,在期望信号较强时,会出现信号相消现象,引起算法性能急剧下降^[9-10].因此,对基于四元数的鲁棒自适应波束形成算法(Robust Adaptive Beamforming, RAB)进行研究十分必要.

在 RAB 算法方面,文献[11-12]利用对角加载(Diagonal Loading, DL)技术改善了对导向矢量误差的敏感性,但是并没有准则来确定最优加载量.针对此问题,文献[13-14]提出的迭代 RAB 算法、基于收缩失配估计的 RAB 算法避免了加载量的求解,并提高了在导向矢量失配时算法的鲁棒性.但是,以上 RAB 算法都有一个共同的缺点:由于训练数据中包含期望信号成分,当期望信号较强时,算法性能下降.因此,文献[15]利用 Capon 空间功率谱估计器对与期望信号分离的区域进行积分重构得到了 IPNCM,去除训练数据中的期望信号成分,在波束形成领域实现了有价值的创新,为 RAB 技术的发展提供了一种新思路.但是该算法忽略了干扰信号的功率,并且需要利用 CVX 工具包求解二次约束二次规划问题,不易实现.在该算法的基础上,文献[16-18]提出的改进算法利用斜投影、去除残余噪声等方法在一定程度上提高了重构 IPNCM 的精度,以及导向矢量失配时的鲁棒性,但在这两方面仍具有一定的改进空间.

综上,在标量阵列、强期望信号条件下,矩阵重构类方法极大地提升了波束形成算法的鲁棒性.但是在极化敏感阵列方面,已有研究成果尚未有效解决强期望信号和导向矢量失配情况下性能下降的问题.本文针对此问题,提出一种基于四元数矩阵重构的鲁棒波束形成算法,该算法利用四元数完成信号建模,将协方差矩阵重构方法扩展到四元数域,结合四元数信号子空间投影方法,完成了对极化敏感阵列最优权矢量的求解.仿真实验表明,在强期望信号和导向矢量失配时,本文算法表现出较好的鲁棒性.

1 四元数信号模型

1.1 四元数基础

将复数在四维空间上进行扩展,可以得到四元数,比较常用的是 Hamilton 四元数.其定义四元数 q 由 4 个分量组成,一个实部和 3 个虚部^[19],可以表示成如下形式

$$q = a + ib + jc + kd.$$

式中 i, j, k 都是虚部单位,满足

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = k, ji = -k,$$

$$ki = j, ik = -j, ik = i, kj = -i,$$

四元数具有如下性质:

1) 四元数 q 的共轭 $\bar{q} = a - ib - jc - kd$;

2) 四元数 q 的模 $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{qq} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$;

3) 四元数 q 的逆 $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$.

一个四元数 q 可以表示成 2 个复数 q_1, q_2 相加的形式如: $q = q_1 + iq_2$, 其中 $q_1 = a + jc, q_2 = b + jd$, 且 q_1, q_2 唯一.

1.2 四元数信号模型

为了简化阐述,文中假设接收极化波为完全极化波,阵列工作在理想环境下.

极化敏感阵列由相互正交的 M 个电偶极子对构成,阵列结构如图 1 所示,整个阵列可以分为 2 个子阵,分别由沿 x 轴和 y 轴方向放置的电偶极子组成,接收来自 x 轴和 y 轴方向的电场分量.各个阵元沿 y 轴构成均匀线阵,阵元间距为 d .

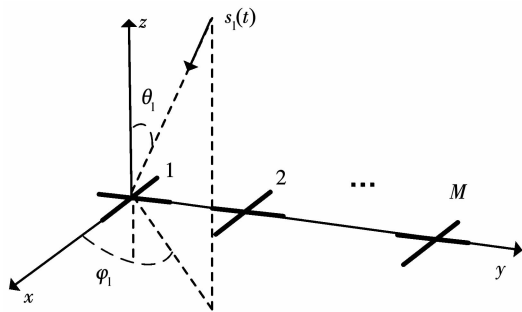


图 1 交叉偶极子均匀线阵

Fig. 1 Crossed dipole uniform line array

假设空间有 $L+1$ 个远场窄带信号 $\{s_l(t)\}_{l=0}^L$ 入射到阵列上,其中包含 1 个期望信号和 L 个干扰信号,入射俯仰角为 θ_l ,方位角为 φ_l ,极化幅角与相角分别为 γ_l, η_l ,信号波长为 λ .为方便表述且不失一般性,令 $\varphi_l = 90^\circ, \eta_l = 90^\circ$,则第 l 个信号的空域导向矢量和极化域导向矢量可以分别表示为

$$\mathbf{a}_s(\theta_l) = e^{-j(m-1)\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_l} (m=1,2,\dots,M),$$

$$\mathbf{a}_p(\theta_l, \gamma_l) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_l & \cos\theta_l\cos\varphi_l \\ \cos\varphi_l & \cos\theta_l\sin\varphi_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma_l \\ \sin\gamma_l e^{j\eta_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\gamma_l \\ j\cos\theta_l\sin\gamma_l \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} a_p^x(\theta_l, \gamma_l) \\ a_p^y(\theta_l, \gamma_l) \end{bmatrix}.$$

式中: a_p^x 是沿 x 轴方向偶极子的极化响应, a_p^y 是沿 y 轴方向的偶极子的极化响应.

根据偶极子方向,可将阵列分为垂直、水平偶极子两个子阵,这两个子阵上第 l 个信号的导向矢量可表示为

$$\mathbf{a}_{x,l} = \mathbf{a}_p^x \cdot \mathbf{a}_s,$$

$$\mathbf{a}_{y,l} = \mathbf{a}_p^y \cdot \mathbf{a}_s.$$

则两个子阵的输出 $\mathbf{x}_1(t)$ 和 $\mathbf{x}_2(t)$ 分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \sum_{l=0}^L \mathbf{a}_{x,l} s_l(t) + \mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{x}_2(t) &= \sum_{l=0}^L \mathbf{a}_{y,l} s_l(t) + \mathbf{n}_2(t).\end{aligned}$$

式中: $\mathbf{n}_1(t)$ 和 $\mathbf{n}_2(t)$ 分别为两个子阵中与信号相统计独立的高斯白噪声矢量。

四元数具有 4 个正交基,极化敏感阵列的每个阵元有两个正交分量,整个阵列的输出可以表示成四元数的形式,保持了各分量之间固有的正交特性。四元数域极化敏感阵列的输出可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathrm{i}\mathbf{x}_2(t) = \sum_{l=0}^L \mathbf{a}(\theta_l, \gamma_l) s_l(t) + \mathbf{n}(t). \quad (1)$$

式中: $\mathbf{a}(\theta_l, \gamma_l) \triangleq \mathbf{a}_{x,l} + \mathrm{i}\mathbf{a}_{y,l}$ 为第 l 个信号的四元数域导向矢量, $\mathbf{n}(t) \triangleq \mathbf{n}_1(t) + \mathrm{i}\mathbf{n}_2(t)$ 为四元数域噪声矢量。

在波束形成中,式(1)一般表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 s_0(t) + \sum_{l=1}^L \mathbf{a}_l s_l(t) + \mathbf{n}(t).$$

式中: $\mathbf{a}_0$ 为期望信号导向矢量, $s_0(t)$ 为期望信号, $\mathbf{a}_l$, ($l=1, 2, \dots, L$) 为干扰信号导向矢量, $s_l(t)$, ($l=1, 2, \dots, L$) 为干扰信号。

四元数域的协方差矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{H}^{M \times M}$ 为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^\triangleleft(t)\} = \sigma_0^2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^\triangleleft + \mathbf{R}_{j+n}.$$

式中: σ_0^2 为期望信号功率, $\mathbf{R}_{j+n}$ 为干扰噪声协方差矩阵, $(\cdot)^\triangleleft$ 表示四元数的共轭转置。

干扰噪声协方差矩阵 $\mathbf{R}_{j+n}$ 定义为

$$\mathbf{R}_{j+n} = \sum_{l=1}^L \sigma_l^2 \mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^\triangleleft + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M. \quad (2)$$

式中: σ_l^2 为第 l 个干扰信号的功率, σ_n^2 为噪声功率, $\mathbf{I}_M$ 为单位阵。

1.3 Q-MVDR 波束形成算法

Q-MVDR 算法的最优权矢量 $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^{M \times 1}$ 可以依据最大输出信干噪比 (max signal-to-interference-plus-noise ratio, MSINR) 准则转化为如下问题求得

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\triangleleft \mathbf{R}_{j+n} \mathbf{w} \text{ s. t } \mathbf{w}^\triangleleft \mathbf{a}_0 = 1. \quad (3)$$

利用拉格朗日乘子法求解式(3),解得四元数域最优权矢量的表达式为

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_{j+n}^{-1} \mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_0^\triangleleft \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \mathbf{a}_0}. \quad (4)$$

但是在实际应用中 $\mathbf{R}_{j+n}$ 难以得到,通常用 K 个快拍数据的采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^\triangleleft(k)$ 来代替,则式(4)改写为

$$\mathbf{w}_{Q-MVDR} = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0}{\hat{\mathbf{a}}_0^\triangleleft \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0}. \quad (5)$$

式中 $\hat{\mathbf{a}}_0$ 为期望信号导向矢量的估计,由于指向误差等因素的影响,会导致 $\hat{\mathbf{a}}_0$ 与理想的 $\mathbf{a}_0$ 出现偏差,即导向矢量失配。另外,由于 $\hat{\mathbf{R}}$ 中含有期望信号成分,在期望信号较强时,会出现信号相消现象,引起性能下降。

2 基于四元数矩阵重构的鲁棒波束形成算法

2.1 干扰噪声协方差矩阵重构

针对强期望信号时, MVDR 算法出现性能下降并且会加重导向矢量失配的问题,文献[15]提出复数域标量阵列的重构 IPNCM 的方法,本文将将其扩展到四元数域

$$\hat{\mathbf{R}}_{j+n} = \int_{\bar{\Theta}} \frac{\mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^\triangleleft(\theta)}{\mathbf{a}^\triangleleft(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} d\theta. \quad (6)$$

式中: $\bar{\Theta}$ 为干扰信号区域, $\mathbf{a}(\theta)$, $\theta \in \bar{\Theta}$ 为导向矢量。但是该方法没有严格按照 $\hat{\mathbf{R}}_{j+n}$ 的定义求解,会导致与理论的 $\mathbf{R}_{j+n}$ 产生误差。针对该问题,本文在此基础上,提出一种基于四元数矩阵重构的鲁棒波束形成算法。

算法首先对 $\hat{\mathbf{R}}_{j+n}$ 进行特征分解

$$\hat{\mathbf{R}}_{j+n} = \sum_{i=1}^M \gamma_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^\triangleleft = \mathbf{B}_s \boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{B}_s^\triangleleft + \mathbf{B}_n \boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{B}_n^\triangleleft. \quad (7)$$

式中: γ_i , $i=1, 2, \dots, M$ 是按降序排列的 $\hat{\mathbf{R}}_{j+n}$ 的特征值 (i. e. $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_M$), $\mathbf{b}_i$ 是与 γ_i 相关的特征向量, $\mathbf{B}_s = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_P]$ 为 P 个大特征值对应的特征矢量张成的干扰信号子空间, $\mathbf{B}_n = [\mathbf{b}_{P+1}, \mathbf{b}_{P+2}, \dots, \mathbf{b}_M]$ 的列向量张成噪声子空间, $\boldsymbol{\Omega}_s = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_P\}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_n = \text{diag}\{\gamma_{P+1}, \dots, \gamma_M\}$ 都是对角矩阵。

第 l 个干扰信号的导向矢量位于 $\mathbf{B}_s$ 各列矢量 $\mathbf{b}_i$ 张成的干扰子空间,即可用 $\mathbf{B}_s$ 各列线性表示

$$\mathbf{A}_B \triangleq \{\hat{\mathbf{a}}_l | \hat{\mathbf{a}}_l = \mathbf{B}_s \boldsymbol{\alpha}_B, \forall \boldsymbol{\alpha}_B \in \mathbb{R}^{P \times 1}\}.$$

式中: $\forall \boldsymbol{\alpha}_B \in \mathbb{R}^{P \times 1}$ 为系数向量, $\mathbb{R}$ 为实数集。

然后对采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 特征分解

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\triangleleft = \mathbf{E}_s \boldsymbol{\Lambda}_s \mathbf{E}_s^\triangleleft + \mathbf{E}_n \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{E}_n^\triangleleft. \quad (8)$$

式中: λ_i , $i=1, 2, \dots, M$ 是按降序排列的 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征值 (i. e. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$), $\mathbf{e}_i$ 是与 λ_i 相关的特征向量, $\mathbf{E}_s = [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_L]$ 为 $L+1$ 个大特征值对应的特征矢量张成的信号子空间, $\mathbf{E}_n = [\mathbf{e}_{L+1}, \mathbf{e}_{L+2}, \dots, \mathbf{e}_M]$ 的列向量张成噪声子空间, $\boldsymbol{\Lambda}_s = \text{diag}\{\lambda_0, \dots, \lambda_L\}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_n = \text{diag}\{\lambda_{L+1}, \dots, \lambda_M\}$ 都是对角矩阵。

第 l 个干扰信号的导向矢量也可以用 $\mathbf{E}_s$ 线性表示

$$\mathbf{A}_E \triangleq \{\hat{\mathbf{a}}_l | \hat{\mathbf{a}}_l = \mathbf{E}_s \boldsymbol{\alpha}_E, \forall \boldsymbol{\alpha}_E \in \mathbb{R}^{(L+1) \times 1}\},$$

式中 $\forall \boldsymbol{\alpha}_E \in \mathbb{R}^{(L+1) \times 1}$ 为系数向量。

通过以上分析,第 l 个干扰信号的导向矢量估计 $\hat{\mathbf{a}}_l$ 位于 $\mathbf{A}_B$ 和 $\mathbf{A}_E$ 这两个集合的交集 $\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}_B \cap \mathbf{A}_E$ 中,可以利用交叉投影算法求解两个集合的交集。

首先构造一个初始向量为 $\tilde{\mathbf{a}}_l = \mathbf{a}(\tilde{\theta}_l)$ 的迭代公式

$$\mathbf{a}_{L+1} = \mathbf{P}_B \mathbf{P}_E \mathbf{a}_L.$$

当 L 趋近于 ∞ 时, $\mathbf{a}_L$ 收敛于真实的导向矢量,即: $\mathbf{a}_\infty = \mathbf{P}_B \mathbf{P}_E \mathbf{a}_\infty$. 根据文献[20], $\mathbf{a}_\infty$ 的求解问题可以等价于对矩阵 $\mathbf{P}_B \mathbf{P}_E$ 中特征值为 1 的特征向量的求解问题,有

$$\begin{aligned} \text{eig}_{\max}(\mathbf{P}_B \mathbf{P}_E) &\leq \text{eig}_{\max}(\mathbf{P}_B) \max_{\mathbf{u}^{\triangleleft} \mathbf{u} = 1} \mathbf{u}^{\triangleleft} \mathbf{P}_E \mathbf{u} = \\ &\max_{\mathbf{u}^{\triangleleft} \mathbf{u} = 1} \mathbf{u}^{\triangleleft} \mathbf{P}_E \mathbf{u} = \text{eig}_{\max}(\mathbf{P}_E) = 1. \end{aligned}$$

式中 $\text{eig}_{\max}(\cdot)$ 代表矩阵的最大特征值. 矩阵 $\mathbf{P}_B \mathbf{P}_E$ 的最大特征值为 1.

得到

$$\hat{\mathbf{a}}_l = \sqrt{M} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{P}_B \mathbf{P}_E). \quad (9)$$

式中: $\mathbf{P}_B = \mathbf{B}_s \mathbf{B}_s^{\triangleleft}$, $\mathbf{P}_E = \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft}$, $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{P}_B \mathbf{P}_E)$ 表示矩阵 $\mathbf{P}_B \mathbf{P}_E$ 的最大特征值对应的特征向量。

最后,利用 Capon 谱估计器得到第 l 个干扰信号的功率

$$\hat{\sigma}_l^2 = \frac{1}{\hat{\mathbf{a}}_l^{\triangleleft} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_l}. \quad (10)$$

式(2)中,噪声功率 σ_n^2 未知,其可以用 $\hat{\mathbf{R}}$ 小特征值和的均值 $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{M-L-1} \sum_{i=L+1}^M \lambda_i$ 进行估计,则重构的 IPNCM 为

$$\tilde{\mathbf{R}}_{j+n} = \sum_{l=1}^L \hat{\sigma}_l^2 \hat{\mathbf{a}}_l \hat{\mathbf{a}}_l^{\triangleleft} + \hat{\sigma}_n^2 \mathbf{I}_M. \quad (11)$$

将 $\tilde{\mathbf{R}}_{j+n}$ 代入式(5),得到四元数域矩阵重构的权矢量

$$\mathbf{w}_{Q-\text{Rec}} = \frac{\tilde{\mathbf{R}}_{j+n}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0}{\hat{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \tilde{\mathbf{R}}_{j+n}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0}. \quad (12)$$

2.2 四元数信号子空间投影

当导向矢量失配时, $\hat{\mathbf{a}}_0$ 一般与 $\mathbf{a}_0$ 不相等. 根据信号子空间与噪声子空间的正交性,以及期望信号导向矢量与信号子空间属于同一子空间的特性,利用特征空间方法将 $\mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}$ 投影到四元数域信号子空间

$$\mathbf{w}_{\text{Proposed}} = \mathbf{P}_E \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}} = \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft} \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}.$$

式中 $\mathbf{P}_E$ 为投影矩阵,该投影运算使得权矢量的范数减小,同时满足 $\mathbf{w}_{\text{Proposed}}^{\triangleleft} \hat{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}^{\triangleleft} \hat{\mathbf{a}}_0$, 投影运算对期望信号和干扰信号的响应不变,使得输出噪声功率减小. 推导如下

易知, $\mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft} + \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^{\triangleleft} = \mathbf{I}_M$, 将 $\mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}$ 分解为两个正交的分量

$$\mathbf{w}_{Q-\text{Rec}} = \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft} \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}} + \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^{\triangleleft} \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}.$$

$\hat{\mathbf{a}}_0$ 包含在信号子空间 $\mathbf{E}_s$ 中,与噪声子空间 $\mathbf{E}_n$ 正交,可将四元数域矩阵重构的权矢量向信号子空间投影,对期望信号导向矢量失配误差进行修正

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{Proposed}}^{\triangleleft} \hat{\mathbf{a}}_0 &= (\mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft} \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}} + \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^{\triangleleft} \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}})^{\triangleleft} \hat{\mathbf{a}}_0 = \\ &(\mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft} \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}})^{\triangleleft} \hat{\mathbf{a}}_0, \end{aligned}$$

得到最优权矢量

$$\mathbf{w}_{\text{Proposed}} = \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft} \mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}. \quad (13)$$

综上,本文提出的基于四元数矩阵重构的鲁棒波束形成算法,具体步骤如下

步骤 1: 利用式(8)对 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行四元数特征值分解,得到信号子空间 $\mathbf{E}_s$ 和噪声子空间 $\mathbf{E}_n$;

步骤 2: 利用式(6)重构 $\hat{\mathbf{R}}_{j+n}$, 并由式(7)特征值分解得到干扰信号子空间 $\mathbf{B}_s$;

步骤 3: 根据干扰信号个数,利用式(9)和(10)得到干扰信号的导向矢量和功率的估计值;

步骤 4: 利用式(11)和(12)得到重构的 $\tilde{\mathbf{R}}_{j+n}$ 与权矢量 $\mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}$;

步骤 5: 利用式(13)将 $\mathbf{w}_{Q-\text{Rec}}$ 向四元数信号子空间 $\mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\triangleleft}$ 投影,得到最优权值 $\mathbf{w}_{\text{Proposed}}$.

3 算法性能分析

定义四元数波束形成器信干噪比损失^[20]为

$$L = \frac{S_{\text{out}}}{S_{\text{CBF}}} = \frac{\sigma_n^2 |\mathbf{w}^{\triangleleft} \mathbf{a}_0|^2}{M \mathbf{w}^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n} \mathbf{w}}. \quad (14)$$

式中: 阵列输出 $S_{\text{out}} = \sigma_0^2 |\mathbf{w}^{\triangleleft} \mathbf{a}_0|^2 / \mathbf{w}^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n} \mathbf{w}$, $S_{\text{CBF}} = M \sigma_0^2 / \sigma_n^2$. S_{out} 与期望信号的强度有关,而信干噪比损失 L 不再依赖于期望信号的强度。

将式(4)代入式(14)得到最优波束形成器的信干噪比损失为

$$L_{\text{opt}} = \frac{\sigma_n^2}{M} \mathbf{a}_0^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \mathbf{a}_0.$$

最优波束形成器的输出 SINR 可以表示为

$$S_{\text{opt}} = \sigma_0^2 \mathbf{a}_0^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \mathbf{a}_0 = L_{\text{opt}} S_{\text{CBF}}. \quad (15)$$

在强期望信号和导向矢量失配情况下,算法性能严重下降的原因有以下两种情况:

1) 训练数据中不含期望信号时导向矢量失配的权矢量为

$$\mathbf{w}_{\text{mis}} = \frac{\mathbf{R}_{j+n}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0}{\hat{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0}, \quad (16)$$

将式(16)代入 S_{out} , 得到

$$S_{\text{mis}} = \frac{\sigma_0^2 |\mathbf{w}_{\text{mis}}^{\triangleleft} \mathbf{a}_0|^2}{\mathbf{w}_{\text{mis}}^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n} \mathbf{w}_{\text{mis}}} = \frac{\sigma_0^2 \hat{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0}{(\hat{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0) (\hat{\mathbf{a}}^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_0)}, \quad (17)$$

定义 $\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{a}^{\triangleleft} \mathbf{Z} \mathbf{b}|^2 / (\mathbf{a}^{\triangleleft} \mathbf{Z} \mathbf{a}) (\mathbf{b}^{\triangleleft} \mathbf{Z} \mathbf{b})$, 因此, 式(17)可以表示为

$$S_{\text{mis}} = S_{\text{opt}} \cos^2(\hat{\mathbf{a}}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{R}_{j+n}^{-1}),$$

则信干噪比损失为

$$L_{\text{mis}} = \cos^2(\hat{\mathbf{a}}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{R}_{j+n}^{-1}),$$

结合式(15)得

$$S_{\text{mis}} = S_{\text{CBF}} L_{\text{opt}} L_{\text{mis}}.$$

可见, 此时由导向矢量失配引起的信干噪比损失与期望信号强度无关, 当失配角较小时, L_{mis} 接近为 1.

2) 训练数据中含有期望信号时导向矢量失配, 信干噪比损失为

$$L_{\text{sp}} = \frac{1}{1 + (2S_{\text{opt}} + S_{\text{opt}}^2) \sin^2(\hat{\mathbf{a}}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{R}_{j+n}^{-1})}, \quad (18)$$

并且有

$$S_{\text{mis+sp}} = S_{\text{mis}} L_{\text{sp}} = S_{\text{CBF}} L_{\text{opt}} L_{\text{mis}} L_{\text{sp}}.$$

由式(18)可知, 此时的信干噪比损失与期望信号强度有关, 期望信号越强, 信干噪比损失越大, 甚至会出现强期望信号时的输出 SINR 比弱期望信号时还要低的现象, 这就是强期望信号引起性能下降的原因所在. 此外, 导向矢量失配对算法性能的影响比不含期望信号时大^[21].

本文算法首先严格按照 IPNCM 的定义式, 并利用子空间方法去除了期望信号成分, 重构出高精度的 $\tilde{\mathbf{R}}_{j+n}$; 然后将权矢量向信号子空间投影, 对期望信号导向矢量失配进行了修正. 假设修正后的导向矢量为 $\tilde{\mathbf{a}}_0$, 本文算法的输出 SINR 为

$$S_{\text{Proposed}} = \frac{\sigma_0^2 |\mathbf{w}_{\text{Proposed}}^{\triangleleft} \mathbf{a}_0|^2}{\mathbf{w}_{\text{Proposed}}^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n} \mathbf{w}_{\text{Proposed}}} = \frac{\sigma_0^2 |\tilde{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \mathbf{a}_0|^2}{\tilde{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \tilde{\mathbf{R}}_{j+n}^{-1} \mathbf{R}_{j+n} \tilde{\mathbf{R}}_{j+n}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_0} \approx \frac{\sigma_0^2 |\tilde{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \mathbf{R}_{j+n}^{-1} \mathbf{a}_0|^2}{\tilde{\mathbf{a}}_0^{\triangleleft} \tilde{\mathbf{R}}_{j+n}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_0},$$

化简得 $S_{\text{Proposed}} \approx S_{\text{opt}} \cos^2(\tilde{\mathbf{a}}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{R}_{j+n}^{-1})$, 本文算法的信干噪比损失为

$$L_{\text{Proposed}} = \cos^2(\tilde{\mathbf{a}}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{R}_{j+n}^{-1}),$$

修正后的导向矢量 $\tilde{\mathbf{a}}_0$ 满足: $\tilde{\mathbf{a}}_0 \approx \mathbf{a}_0$, 即 $L_{\text{Proposed}} \approx 1$, 则

$$S_{\text{Proposed}} \approx S_{\text{opt}} L_{\text{Proposed}} \approx S_{\text{opt}}.$$

因此, 本文算法的输出 SINR 接近于最优值.

4 仿真分析

仿真条件: 由 8 个偶极子构成的均匀线阵, 阵元数 $M=8$, 阵元间距 $d=\lambda/2$, 采样快拍数 $K=200$, 期望信号参数为 $(\theta_0, \gamma_0) = (0^\circ, 10^\circ)$, 导向矢量失配误差为 2° , $S=10$ dB, 干扰信号参数为 $(\theta_1, \gamma_1) = (50^\circ, 20^\circ)$, $I=30$ dB.

在以上仿真条件下, 将本文算法 (Proposed) 与四元数域 PCMR-Q-MVDR 算法^[17]、CCMR-Q-MVDR 算法^[15]、对角加载 (DL-Q-MVDR) 算法^[11]、Q-MVDR 算法^[5] 和最优 (Optimal) 算法进行对比分析, 考察算法方向图、输出信干噪比等方面的性能.

4.1 强期望信号时不同算法方向图比较

本实验考察强期望信号情况下, 不同算法的方向图对比, 仿真结果如图 2 所示.

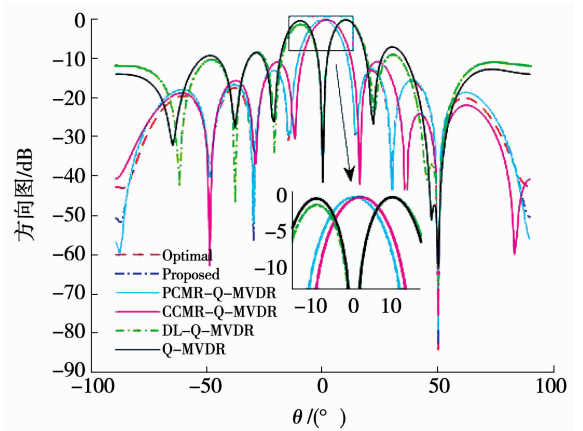


图 2 强期望信号时方向图的对比

Fig. 2 Comparison of beam patterns in strong desired signal case

由图 2 可知, DL-Q-MVDR 和 Q-MVDR 算法出现期望信号相消的现象, 即: 期望信号方向产生了零陷; CCMR-Q-MVDR 算法在期望信号方向出现较小的估计偏差; 本文算法和 PCMR-Q-MVDR 算法都精确对准期望信号并具有较低的旁瓣.

为便于比较不同算法产生的零陷深度, 将图 2 中干扰附近区域放大如图 3 所示. 由图 3 可知, 本文算法由于严格依据定义式重构得到 $\tilde{\mathbf{R}}_{j+n}$, 产生的零陷深度最接近于最优值, 达到了 82 dB, 其他 4 种算法的干扰零陷深度集中在 70 dB 左右, 因此, 本文算法对干扰的抑制能力优于其他算法.

4.2 输出信干噪比随输入信噪比的变化

本实验在导向矢量失配条件下, 考察不同算法输出 SINR 随输入 SNR 的变化情况. 仿真条件改变 $S=-10$ dB ~ 20 dB, 进行 500 次蒙特卡洛独立实验, 仿真结果如图 4 所示.

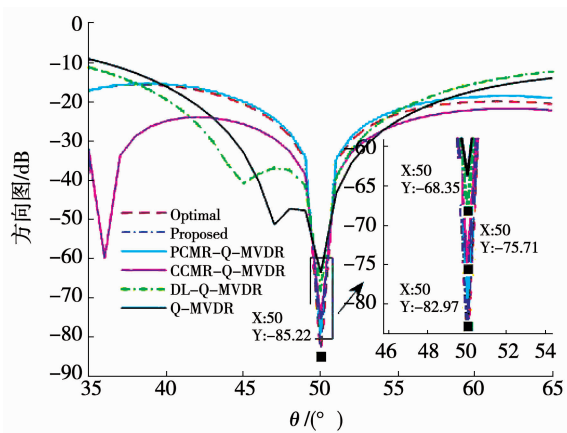


图 3 强期望信号时干扰零陷深度的对比

Fig. 3 Comparison of interference depth in strong desired signal case

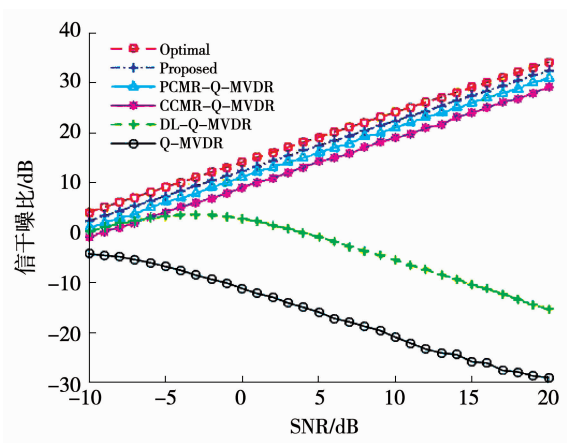


图 4 输出 SINR 与输入 SNR 的变化曲线

Fig. 4 Variation curves of output SINR with input SNR

由图 4 可知, Q-MVDR 算法在 SNR 很小时, 性能已经出现下降; DL-Q-MVDR 算法虽然一定程度上改善了算法的性能, 但是当 $\text{SNR} > 0$ dB 时, 算法性能也明显下降; 本文算法、PCMR-Q-MVDR 和 CCMR-Q-MVDR 算法由于重构出 IPNCM, 输出 SINR 随着输入 SNR 线性增加. 本文算法相比其他两种重构类算法, 具有更高的输出 SINR, 并接近于最优值.

4.3 输出信干噪比与失配角度的关系

本实验在强期望信号条件下, 对不同算法输出 SINR 与失配角度的关系进行仿真. 仿真条件改变失配角度为 $-10^\circ \sim 10^\circ$, 进行 500 次蒙特卡洛独立实验, 仿真结果如图 5 所示.

由图 5 可知, Q-MVDR 算法即使很小的失配角度, 就会引起性能严重恶化; DL-Q-MVDR 算法一定程度上提高了对失配角度的敏感性, 但当失配角度大于 2° 时, 算法性能严重下降; CCMR-Q-MVDR 算法进一步提高了对失配角度的敏感性, 但当失配角度大于 5° 时, 性能也出现明显下降; 本文算法和 PCMR-Q-MVDR 算法都对失配角度不敏感, 但本文

算法具有更高的输出 SINR, 当失配角度较大时, 依旧较接近于最优值.

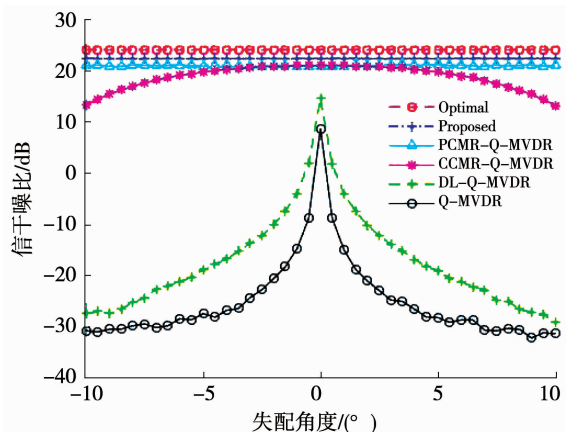


图 5 期望信号失配时输出 SINR 与失配角度关系

Fig. 5 Correlation between output SINR and mismatch angle in the case of desired signal steering vector mismatch

以上仿真实验表明, 本文提出的基于四元数矩阵重构的鲁棒波束形成算法, 在强期望信号和导向矢量失配时的输出 SINR 均能收敛于最优值. 这说明通过重构 $\tilde{\mathbf{R}}_{j+n}$ 消除期望信号成分, 有效避免了期望信号相消引起的性能下降, 增强了算法的鲁棒性; 此外, 通过四元数特征空间投影对期望信号导向矢量失配误差进行修正, 保证了在期望信号方向上波束增益无损失, 进一步提高了算法的鲁棒性.

5 结 论

针对在强期望信号和导向矢量失配的情况下, Q-MVDR 算法性能下降的问题, 提出了一种基于四元数矩阵重构的鲁棒波束形成算法. 该算法首先利用四元数矩阵重构方法得到 IPNCM 的精确估计; 然后利用四元数特征空间投影对导向矢量失配误差进行修正. 仿真结果表明, 本文算法在强期望信号和导向矢量失配同时存在时, 能够保证期望信号方向波束增益无损失的同时, 实现对干扰的有效抑制; 算法始终具有较高的输出 SINR, 有效地提高了算法的鲁棒性.

参考文献

- [1] JO O, KIM J, YOON J, et al. Exploitation of dual-polarization diversity for 5G millimeter-wave MIMO beamforming systems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(12): 6646. DOI: 10.1109/TAP.2017.2761979
- [2] FABIANI B M, SILVEIRA E S, PINA M V P, et al. Nonlinear constrained beamforming algorithm for circularly polarized phased arrays[J]. IEEE Antennas & Wireless Propagation Letters, 2018, 17(9): 1692. DOI: 10.1109/LAWP.2018.2863544
- [3] LIU Wei. Channel equalization and beamforming for quaternion-valued wireless communication systems[J]. Journal of the Franklin

- Institute, 2016, 354 (18): 8721. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2016.10.043
- [4] ZHANG Xirui, LIU Wei, XU Yougen, et al. Quaternion-valued robust adaptive beamformer for electromagnetic vector-sensor arrays with worst-case constraint[J]. Signal Processing, 2014, 104: 274. DOI: 10.1016/j.sigpro.2014.04.006
- [5] TAO Jianwu, CHANG Wenxiu. The MVDR beamformer based on hypercomplex processes [C]//Proceedings of 2012 International Conference on Computer Science and Electronics Engineering. Piscataway: IEEE, 2012: 273. DOI: 10.1109/ICCSEE.2012.430
- [6] 李文兴, 毛晓军, 翟助群. 抗导向矢量失配的零陷展宽波束形成算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2016, 48(11): 116
LI Wenxing, MAO Xiaojun, ZHAI Zhuqun. Null broadening beamforming against steering vector mismatch[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2016, 48(11): 116. DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.2016.11.018
- [7] CHEN Peng, YANG Yixin, WANG Yong, et al. Adaptive beamforming with sensor position errors using covariance matrix construction based on subspace bases transition [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(1): 19. DOI: 10.1109/LSP.2018.2878948
- [8] HUANG Junsheng, SU Hongtao, YANG Yang. Low-complexity robust adaptive beamforming method for MIMO radar based on covariance matrix estimation and steering vector mismatch correction [J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2019, 13(5): 712. DOI: 10.1049/iet-rsn.2018.5416
- [9] LI Zhihui, ZHANG Yongshun, GE Qichao, et al. Middle subarray interference covariance matrix reconstruction approach for robust adaptive beamforming with mutual coupling [J]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(4): 664. DOI: 10.1109/LCOMM.2019.2899874
- [10] ZHENG Zhi, ZHENG Yan, WANG Wenqin, et al. Covariance matrix reconstruction with interference steering vector and power estimation for robust adaptive beamforming[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2018, 67(9): 8495. DOI: 10.1109/TVT.2018.2849646
- [11] ER M H, NG B C. A new approach to robust beamforming in the presence of steering vector errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(7): 1826. DOI: 10.1109/78.298291
- [12] MESTRE X, LAGUNAS M A. Finite sample size effect on minimum variance beamformers; Optimum diagonal loading factor for large arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(1): 69. DOI: 10.1109/TSP.2005.861052
- [13] HASSANIEN A, VOROBYOV S A, WONG K M. Robust adaptive beamforming using sequential quadratic programming: An iterative solution to the mismatch problem [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 733. DOI: 10.1109/LSP.2008.2001115
- [14] RUAN Hang, DE LAMARE R C. Robust adaptive beamforming using a low-complexity shrinkage-based mismatch estimation algorithm[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(1): 60. DOI: 10.1109/LSP.2013.2290948
- [15] GU Yujie, LESHEM A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(7): 3881. DOI: 10.1109/TSP.2012.2194289
- [16] ZHU Xingyu, YE Zhongfu, XU Xu, et al. Covariance matrix reconstruction via residual noise elimination and interference powers estimation for robust adaptive beamforming [J]. IEEE Access, 2019, 7: 53262. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2912402
- [17] ZHANG Xue, LIU Shuai, YAN Fenggang, et al. Robust adaptive beamforming based on covariance matrix reconstruction against steering vector mismatch [C]//Proceedings of 2019 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC). Piscataway: IEEE, 2019: 283. DOI: 10.1109/ICCCChina.2019.8855940
- [18] AI Xiaoyu, GAN Lu. Robust adaptive beamforming with subspace projection and covariance matrix reconstruction[J]. IEEE Access, 2019, 7: 102149. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2930750
- [19] JIANG Mengdi, LIU Wei, LI Yi. Adaptive beamforming for vector-sensor arrays based on a reweighted zero-attracting quaternion-valued LMS algorithm [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2016, 63(3): 274. DOI: 10.1109/TCSII.2015.2482464
- [20] ZHANG F, ZHANG Q. Eigenvalue inequalities for matrix product [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(9): 1506. DOI: 10.1109/TAC.2006.880787
- [21] 王永良, 丁前军, 李荣锋. 自适应阵列处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009: 14
WANG Yongliang, DING Qianjun, LI Rongfeng. Adaptive array processing[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 14

(编辑 苗秀芝)