

DOI:10.11918/202105030

不确定离散时间系统的状态逼近事件触发控制

丁三波,刘亚拴

(河北工业大学 人工智能与数据科学学院,天津 300401)

摘要:为减少不确定离散时间线性/非线性系统的事件触发次数,节省通讯资源,提出了基于状态逼近的事件触发控制方法。首先,针对不确定离散线性系统,利用采样信号、系统矩阵和确定离散线性系统解析解的定义,逐段构造不确定离散系统的状态逼近解。将测量误差定义为系统当前状态与逼近解之间的差,构造事件触发条件和控制器,通过设计 Lyapunov 泛函得到离散线性系统的稳定性条件。其次,对于一类 Lipschitz 离散非线性系统,将该系统进行线性化处理。根据无扰动离散线性系统解析解的定义,类似于线性系统的处理方法,逐段构造状态逼近解,重新定义测量误差,设计事件触发条件和控制器,并建立离散非线性系统的稳定性条件。将状态逼近技术与动态事件触发策略相结合,在减小测量误差的同时,降低触发阈值,进一步减少事件发生的次数,实现更好的控制效果。通过倒立摆系统和蔡氏电路两个数值例子表明,相比于传统事件触发方案,状态逼近法可以显著降低事件触发的次数,避免了通讯资源的浪费。

关键词:事件触发控制;不确定参数;Lipschitz 非线性;状态逼近技术;动态触发

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2022)12-0080-07

Event-triggered control for uncertain discrete-time systems via state approximation approach

DING Sanbo, LIU Yashuan

(School of Artificial Intelligence, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: To reduce the event-triggered times of uncertain discrete-time linear/nonlinear systems and save communication resources, we proposed an event-triggered control (ETC) strategy based on state approximation. First, the approximate solution of the uncertain discrete-time linear system was constructed piece-wisely by using the analytical solution of the certain linear system, sampled signals, and system matrices. The measurement error was defined as the difference between the current system state and the approximate solution. The event-triggered condition and controller were constructed, and the stability conditions were established by designing Lyapunov functions. Then, for a class of Lipschitz discrete-time nonlinear system, linearization was performed. According to the analytical solution of undisturbed linear system, similar to the technique for linear system, the piece-wise approximate solution was constructed, and the measurement error was redefined. The event-triggered condition and controller were designed respectively, and the stability conditions of the system were developed. By combining the state approximation technique with dynamic triggered method, the measuring error and the trigger threshold were reduced, and the event-triggered times were further decreased, indicating better control effects. Simulation results of inverted pendulum system and Chua's circuit showed that compared with the traditional event-triggered scheme, the state approximation approach significantly reduced the event-triggered times and avoided wasting communication resources.

Keywords: event-triggered control; uncertain parameters; Lipschitz nonlinear; state approximation technique; dynamic trigger

近年来,随着网络技术的迅速发展,网络化控制系统由于成本较低,便于维护,可以有效地实现远程控制 and 远程诊断,受到了学者的广泛关注。周期采样是一种常见的网络化控制方法^[1-2]。此方法根据

给定的采样周期,对系统输出进行周期性采样和传输。周期采样利于系统的设计与分析,但可能会产生冗余采样信号,造成通信带宽的浪费。为避免此类问题,学者引入了事件触发控制(Event-triggered control,ETC)。在事件触发控制中,只有在某一变量超过给定阈值时,控制器执行更新任务,有效地节约了通信带宽资源^[3-5]。目前,事件触发控制已经广泛存在于各个领域的研究^[6-8]。

离散时间系统是很常见的物理系统,针对离散

收稿日期:2021-05-08

基金项目:国家自然科学基金(61903121);河北省自然科学基金(F2020202063);河北省创新能力提升计划项目(18961604H)

作者简介:丁三波(1989—),男,副教授,博士生导师

通信作者:丁三波,dingsanbo@163.com

时间系统的事件触发控制也屡见不鲜。如 Shen 等^[9]研究了一类具有随机参数和不完全测量的离散时间混合时滞神经网络的事件触发状态估计问题。Hu 等^[10]研究了一类离散时间随机系统的事件触发机制控制问题,探讨了数据丢包问题。文献[9-10]设计的事件触发方案均采用了传统的误差测量方式,以状态反馈为例,传统测量误差的定义为常采样信号与系统当前状态之间的差。在触发时刻 k_l 到下一次触发时刻 k_{l+1} 内,被控对象在控制信号的作用下,系统状态的演化整体趋势是收敛的,所以测量误差会随时间逐步增大,而这会导致测量误差很容易超过预设的常数阈值或时变阈值,使得相邻触发间隔较小,造成较高的触发频率。

在事件触发控制中,可以通过增加触发阈值来降低事件发生的频率。如文献[11-12]通过引入一个内部动态变量,将静态阈值拓展到动态阈值,提出了动态事件触发方案,实现了事件发生次数的有效减少。尽管动态触发方案能够有效提高静态触发的控制结果,但在测量误差的计算方式方面并没有任何改进。另外一种可行的方法是测量误差的计算方法,在减少计算负荷的同时,实现动态触发的控制效果。如针对连续时间系统,Lunze 等^[13]引入的指数项 $\exp((\mathbf{A} + \mathbf{BK})(t - t_k))$ 和 Ding 等^[14]引入的指数项 $\exp(-\eta \text{sign}(\dot{x}(t_k)) \text{sign}(x(t_k))(t - t_k))$, 基于采样信号,对系统的状态进行预测或逼近,进而定义新的测量误差,实现了触发次数的减少。然而,关于离散时间系统第 2 种事件触发方案的研究却很少。

本文从状态预测或逼近的角度,针对离散线性/非线性系统分别逐段构造了状态逼近解,逼近解可以跟随闭环系统离散状态的局部变化趋势,实现减少测量误差的目的。设计了基于状态逼近解的事件触发控制器,并得到了闭环系统的稳定性判据。同时,本文将该方法结合动态事件触发策略^[11],通过增大触发阈值,达到更好的控制效果。最后通过数值仿真验证了该方法的有效性,并与传统事件触发控制器^[15-16]作比较,表明状态逼近法可以有效地降低采样次数,减少通讯带宽的浪费。

1 线性系统的事件触发控制

考虑如下离散线性系统:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(k) = \text{col}[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)] \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量, $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^q$ 为要设计的控制器, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times q}$ 为常数矩阵。 $\Delta\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为参数扰动。假设 $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{E}\Sigma(k)\mathbf{F}$, 其中 $\Sigma^T(k)\Sigma(k) \leq \mathbf{I}$, $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}$ 为已知矩阵。

在传统的事件触发控制^[15-16]中,往往将控制器 $\mathbf{u}(k)$ 设计为

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k_l) \quad (2)$$

式中 $k_l \leq k \leq k_{l+1} - 1$, $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{q \times n}$ 为控制增益矩阵。通过定义 $\mathbf{e}_f(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k_l)$, 设计如下触发条件:

$$k_0 = 0$$

$$k_{l+1} = \min \{k > k_l \mid \mathbf{e}_f^T(k) \mathbf{\Omega} \mathbf{e}_f(k) > \varepsilon \mathbf{x}^T(k) \mathbf{\Omega} \mathbf{x}(k)\} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{\Omega} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为一个正定的常数矩阵, $\varepsilon > 0$ 为触发阈值。

事件触发策略(3)实际上是将常采样信号 $\mathbf{x}(k_l)$ 代替了控制器 $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ 中的系统状态 $\mathbf{x}(k)$, 或者说是常采样信号 $\mathbf{x}(k_l)$ 用来逼近系统当前状态 $\mathbf{x}(k)$, 这容易造成较高的触发频率。基于上述方法的局限性,本文提出基于状态逼近的事件触发控制方法。

对于无参数扰动系统:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (4)$$

式中控制器为 $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, 系统(4)在 $k \in [k_l, k_{l+1} - 1]$ 上的解析解为 $\mathbf{x}(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{k-k_l} \mathbf{x}(k_l)$, 不妨将该解析解视为系统(1)的状态的逼近解来研究系统(1)的稳定性。

令 $\mathbf{x}_g(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{k-k_l} \mathbf{x}(k_l)$, 构造控制器为

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}_g(k) \quad (5)$$

式中 $k \in [k_l, k_{l+1} - 1]$ 。定义测量误差 $\mathbf{e}_g(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_g(k)$, 设计事件触发条件为:

$$k_0 = 0$$

$$k_{l+1} = \min \{k > k_l \mid \mathbf{e}_g^T(k) \mathbf{\Omega} \mathbf{e}_g(k) > \varepsilon \mathbf{x}^T(k) \mathbf{\Omega} \mathbf{x}(k)\} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{\Omega} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为正定常数矩阵, $\varepsilon > 0$ 为触发阈值。

注 1 传统事件触发方法^[15-16]往往将测量误差定义为常采样信号 $\mathbf{x}(k_l)$ 与系统当前状态 $\mathbf{x}(k)$ 之间的差, 如事件触发条件(3)。随着时间的变化, $\mathbf{e}_f^T(k) \mathbf{\Omega} \mathbf{e}_f(k) / \mathbf{x}^T(k) \mathbf{\Omega} \mathbf{x}(k)$ 很容易超过预设阈值 ε , 进而造成较高的触发频率。而本文重新定义测量误差, 设计事件触发条件(6), 将常采样信号 $\mathbf{x}(k_l)$ 替换为 $\mathbf{x}_g(k)$, 时变信号 $\mathbf{x}_g(k)$ 可以在一定程度上局部逼近系统状态 $\mathbf{x}(k)$, 进而减少测量误差 $\mathbf{e}_g(k)$ 的变化速率, 有效减少事件触发次数, 减轻网络负担。

联立系统(1)和控制器(5), 可以得出:

$$\Delta\mathbf{x}(k) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} + \mathbf{BK} - \mathbf{I})\mathbf{x}(k) - \mathbf{BK}\mathbf{e}_g(k) \quad (7)$$

式中 $\Delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)$ 。

在定理 1 中, 给出了系统(1)基于控制器(5)和事件触发条件(6)的控制下渐近稳定的充分条件。

定理 1 对于给定的触发阈值 $\varepsilon > 0$ 和控制增

益矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。如果存在恰当维数的矩阵 $P > 0$, $\Omega > 0$, $N = \text{col}[N_1, N_2, N_3]$, 以及正常数 r_0 使下列条件成立, 则事件触发条件(6)和控制器(5)可以保证闭环系统(1)是渐近稳定的。

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & N_1 E \\ & \Pi_4 & \Pi_5 & N_2 E \\ & & \Pi_6 & N_3 E \\ & & & -r_0 \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

其中:

$$\Pi_1 = N_1(A + BK - I) + (A + BK - I)^T N_1^T + r_0 F^T F + \varepsilon \Omega$$

$$\Pi_2 = P - N_1 + (A + BK - I)^T N_2^T$$

$$\Pi_3 = (A + BK - I)^T N_3^T - N_1 BK$$

$$\Pi_4 = P - N_2 - N_2^T$$

$$\Pi_5 = -N_3^T - N_2 BK$$

$$\Pi_6 = -N_3 BK - K^T B^T N_3^T - \Omega$$

证明 考虑下面 Lyapunov 函数:

$$V(k) = x^T(k) P x(k) \quad (9)$$

计算 $V(k)$ 的差分, 可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\ & x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) = \\ & \Delta x^T(k) P x(k) + 2x^T(k) P x(k) \end{aligned} \quad (10)$$

令 $\xi_g(k) = \text{col}\{x(k), \Delta x(k), e_g(k)\}$, 则对于适当维数的矩阵 $N = \text{col}[N_1, N_2, N_3]$, 以及正常数 r_0 , 下列不等式条件成立:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\xi_g^T(k) N [-\Delta x(k) + (A + BK - I + \\ & E \Sigma(k) F) x(k) - B K e_g(k)] \leq \\ & 2\xi_g^T(k) N [-\Delta x(k) + (A + BK - I) x(k) - \\ & B K e_g(k)] + r_0 x^T(k) F^T F x(k) + \\ & r_0^{-1} \xi_g^T(k) N E E^T N^T \xi_g(k) \end{aligned} \quad (11)$$

对于 $k \in [k_l, k_{l+1} - 1]$, 由事件触发条件(6), 有

$$0 \leq \varepsilon x^T(k) \Omega x(k) - e_g^T(k) \Omega e_g(k) \quad (12)$$

联立式(10) ~ (12) 可得

$$\Delta V(k) \leq \xi_g^T(k) \Pi \xi_g(k) < 0 \quad (13)$$

其中

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\ & \Pi_4 & \Pi_5 \\ & & \Pi_6 \end{bmatrix} + r_0^{-1} N E E^T N^T \quad (14)$$

根据 Schur 补定理, 条件(8)等价于 $\Pi < 0$ 。证明完成。

文献[12]提出了离散时间系统的动态事件触发方案。这种方法实际上是增大了触发的阈值。本文的方法完全可以结合动态事件触发方案进行推广, 进而降低网络的通讯负担。定义如下 $\gamma(k)$ 变量:

$$\gamma(k+1) = \rho \gamma(k) - e_g^T(k) \Omega e_g(k) + \varepsilon x^T(k) \Omega x(k) \quad (15)$$

式中 $\gamma(0) \geq 0$, 相应的动态触发条件为:

$$\begin{aligned} k_0 &= 0 \\ k_{l+1} &= \min\{k > k_l \mid \gamma(k) - \theta(e_g^T(k) \Omega e_g(k) - \\ & \varepsilon x^T(k) \Omega x(k)) < 0\} \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $0 < \rho < 1$, $\theta \geq 1/\rho$ 。文献[12]证明了在区间 $k \in [0, +\infty)$ 中, $\gamma(k) \geq 0$, 所以动态触发条件(16)可能会比静态触发条件(6)产生较少的触发次数。

注2 触发条件(16)在增加了触发阈值的同时, 减小了测量误差的取值。从降低系统通讯负担的角度而言, 将是一种更好的选择。当 θ 趋于无穷时, 触发条件(6)可以看作式(16)的极限情况。

推论1 对于给定的触发阈值 $\varepsilon > 0$ 和控制增益矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。如果定理1中的条件成立, 则在事件触发条件(16)和控制器(5)可以保证闭环系统(1)是渐近稳定的。

证明 考虑 Lyapunov 函数 $\hat{V}(k) = x^T(k) P x(k) + \gamma(k)$, 有

$$\begin{aligned} \Delta \hat{V}(k) &= \hat{V}(k+1) - \hat{V}(k) = \\ & \Delta x^T(k) P \Delta x(k) + 2\Delta x^T(k) P x(k) + \\ & (\rho - 1)\gamma(k) - e_g^T(k) \Omega e_g(k) + \\ & \varepsilon x^T(k) \Omega x(k) \leq \\ & \Delta x^T(k) P \Delta x(k) + 2\Delta x^T(k) P x(k) - \\ & e_g^T(k) \Omega e_g(k) + \varepsilon x^T(k) \Omega x(k) \end{aligned} \quad (17)$$

将式(17)代替定理1中的式(10)和式(12), 其余证明与定理1相似, 在这里不再赘述。

2 非线性系统的事件触发控制

考虑如下离散非线性系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A)x(k) + \\ & (W + \Delta W)f(W_0 x(k)) + Bu(k) \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $x(k) = \text{col}[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)] \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $u(k) = Kx(k)$ 为要设计的控制器, $W \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $W_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系统矩阵。 $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Delta W \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为参数扰动。且满足 $\Delta A = E \Sigma(k) F$, $\Delta W = G \Theta(k) H$, 其中 $\Sigma^T(k) \Sigma(k) \leq I$, $\Theta^T(k) \Theta(k) \leq I$ 。 E, G, F, H 为已知矩阵。非线性函数 $f(\cdot) = \text{col}[f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_m(\cdot)]$ 。其余符号与系统(1)一致。

假设函数 $f_r(\cdot)$ 满足 $f_r(0) = 0$ 以及下面条件:

$$l_{1r} \leq \frac{f_r(s_1) - f_r(s_2)}{s_1 - s_2} \leq l_{2r} \quad (19)$$

式中 l_{1r}, l_{2r} 为已知常数。记 $l_1 = \text{diag}\{l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1m}\}$, $l_2 = \text{diag}\{l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2m}\}$ 。

注 3 本文假设非线性系统(18)满足 Lipschitz 条件(19)。在实际中, 有许多系统满足该条件^[17-20], 例如经典的 Hopfield 神经网络模型、Lur'e 型系统、蔡氏电路系统以及 Ikeda-type 振荡器等。

对任意满足条件 $\mathbf{I}_1 \leq \mathbf{L} \leq \mathbf{I}_2$ 的常对角矩阵 $\mathbf{L}$, 将离散非线性系统(18)线性化近似为带有参数扰动的线性系统:

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} + (\mathbf{W} + \Delta\mathbf{W})\mathbf{L}\mathbf{W}_0]\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (20)$$

对于无扰动离散系统:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}_0)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (21)$$

式中控制器为 $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ 。可以得到系统(21)在 $k \in [k_l, k_{l+1} - 1]$ 的解析解为

$$\mathbf{x}_h(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}_0)^{k-k_l}\mathbf{x}(k_l) \quad (22)$$

将解析解(22)当作系统(18)的逼近解。构造如下控制器:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}_h(k) \quad (23)$$

式中 $k \in [k_l, k_{l+1} - 1]$ 。定义 $\mathbf{e}_h(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_h(k)$ 。设计如下事件触发条件:

$$\begin{aligned} k_0 &= 0 \\ k_{l+1} &= \min \{k > k_l \mid \mathbf{e}_h^T(k) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_h(k) > \varepsilon \mathbf{x}^T(k) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}(k)\} \end{aligned} \quad (24)$$

式中: $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为正定常数矩阵, $\varepsilon > 0$ 为触发阈值。

联立系统(18)和控制器(23), 可得

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}(k) &= (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I})\mathbf{x}(k) + \\ &\quad (\mathbf{W} + \Delta\mathbf{W})\mathbf{f}(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k)) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}_h(k) \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\Delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)$ 。

定理 2 给出了离散非线性系统(18)基于控制器(23)与事件触发条件(24)的稳定性判据。

定理 2 对于给定的触发阈值 $\varepsilon > 0$ 和控制增益矩阵 $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 。如果存在恰当维数的矩阵 $\mathbf{P} > 0$, $\boldsymbol{\Omega} > 0$, $\mathbf{N} = \text{col}[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]$, m 阶对角正定矩阵 $\mathbf{A}$, 以及正常数 r_1, r_2 , 使下列条件成立, 则事件触发条件(24)和控制器(23)可以保证闭环系统(17)是渐近稳定的。

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 & \mathbf{N}_1\mathbf{E} & \mathbf{N}_1\mathbf{G} \\ & \Xi_5 & \Xi_6 & \Xi_7 & \mathbf{N}_2\mathbf{E} & \mathbf{N}_2\mathbf{G} \\ & & \Xi_8 & \Xi_9 & \mathbf{N}_3\mathbf{E} & \mathbf{N}_3\mathbf{G} \\ & & & \Xi_{10} & \mathbf{N}_4\mathbf{E} & \mathbf{N}_4\mathbf{G} \\ & & & & -r_1\mathbf{I} & 0 \\ & & & & & -r_2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \mathbf{N}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I})^T \mathbf{N}_1^T + \\ &\quad r_1 \mathbf{F}^T \mathbf{F} - 2\mathbf{W}_0^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\Omega} \end{aligned}$$

$$\Xi_2 = \mathbf{P} - \mathbf{N}_1 + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I})^T \mathbf{N}_2^T$$

$$\Xi_3 = \mathbf{N}_1 \mathbf{W} + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \mathbf{W}_0^T \mathbf{A} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I})^T \mathbf{N}_3^T$$

$$\Xi_4 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I})^T \mathbf{N}_4^T - \mathbf{N}_1 \mathbf{B}\mathbf{K}$$

$$\Xi_5 = \mathbf{P} - \mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_2^T$$

$$\Xi_6 = -\mathbf{N}_3^T + \mathbf{N}_2 \mathbf{W}$$

$$\Xi_7 = -\mathbf{N}_4^T - \mathbf{N}_2 \mathbf{B}\mathbf{K}$$

$$\Xi_8 = -2\mathbf{A} + r_2 \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{N}_3 \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{N}_3^T$$

$$\Xi_9 = \mathbf{W}^T \mathbf{N}_4^T - \mathbf{N}_3 \mathbf{B}\mathbf{K}$$

$$\Xi_{10} = -\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{N}_4^T - \mathbf{N}_4 \mathbf{B}\mathbf{K} - \boldsymbol{\Omega}$$

证明 考虑下面 Lyapunov 函数:

$$V(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \quad (27)$$

计算 $V(k)$ 的差分, 可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\ &\quad \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{P} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) = \\ &\quad \Delta \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (28)$$

令 $\boldsymbol{\xi}_h(k) = \text{col}\{\mathbf{x}(k), \Delta\mathbf{x}(k), \mathbf{f}(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k)), \mathbf{e}_g(k)\}$, 则对于适当维数的矩阵 $\mathbf{N} = \text{col}[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]$, 以及正常数 r_1, r_2 下列不等式条件成立:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\boldsymbol{\xi}_h^T(k) \mathbf{N}[-\Delta\mathbf{x}(k) + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I} + \\ &\quad \mathbf{E}\boldsymbol{\Sigma}(k)\mathbf{F})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{W} + \mathbf{G}\boldsymbol{\Theta}(k)\mathbf{H})\mathbf{f}(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k)) - \\ &\quad \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}_h(k)] \leq 2\boldsymbol{\xi}_h^T(k) \mathbf{N}[-\Delta\mathbf{x}(k) + \\ &\quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{I})\mathbf{x}(k) + \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k)) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}_h(k)] + \\ &\quad \boldsymbol{\xi}_h^T(k) \mathbf{N}[r_1^{-1} \mathbf{E}\mathbf{E}^T + r_2^{-1} \mathbf{G}\mathbf{G}^T] \mathbf{N}^T \boldsymbol{\xi}_h(k) + \\ &\quad r_1 \mathbf{x}^T(k) \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + r_2 \mathbf{f}^T(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k)) \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{f}(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k)) \end{aligned} \quad (29)$$

考虑关于非线性函数 $f(\cdot)$, 根据式(19), 对于任何正定矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2(\mathbf{f}(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k)) - \mathbf{I}_2 \mathbf{W}_0\mathbf{x}(k))^T \mathbf{A} \times \\ &\quad (\mathbf{I}_1 \mathbf{W}_0\mathbf{x}(k) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_0\mathbf{x}(k))) \end{aligned} \quad (30)$$

对于 $k \in [k_l, k_{l+1} - 1]$, 根据事件触发条件(24), 有

$$0 \leq \varepsilon \mathbf{x}^T(k) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}(k) - \mathbf{e}_h^T(k) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_h(k) \quad (31)$$

联立式(28) ~ (31) 可得

$$\Delta V(k) \leq \boldsymbol{\xi}_h^T(k) \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\xi}_h(k) < 0 \quad (32)$$

式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Xi} &= \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 \\ & \Xi_5 & \Xi_6 & \Xi_7 \\ & & \Xi_8 & \Xi_9 \\ & & & \Xi_{10} \end{bmatrix} + \\ &\quad \mathbf{N}[r_1^{-1} \mathbf{E}\mathbf{E}^T + r_2^{-1} \mathbf{G}\mathbf{G}^T] \mathbf{N}^T \end{aligned} \quad (33)$$

根据 Schur 补定理, 条件(26)等价于 $\boldsymbol{\Xi} < 0$ 。证明完成。

定理 2 的结果可以结合动态事件触发策略进一步提高。定义如下 $\mu(k)$ 变量:

$$\begin{aligned} \mu(k+1) = & \rho\mu(k) - \mathbf{e}_h^T(k)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}_h(k) + \\ & \varepsilon\mathbf{x}^T(k)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (34)$$

式中 $\mu(0) \geq 0$, 由文献[12]可知, 在区间 $k \in [0, +\infty)$ 中, $\mu(k) \geq 0$ 。相应动态触发条件为:

$$\begin{aligned} k_0 = & 0 \\ k_{l+1} = & \min\{k > k_l | \mu(k) - \theta(\mathbf{e}_h^T(k)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}_h(k) - \\ & \varepsilon\mathbf{x}^T(k)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}(k)) < 0\} \end{aligned} \quad (35)$$

式中 $0 < \rho < 1, \theta \geq 1/\rho$ 。

推论 2 对于给定的触发阈值 $\varepsilon > 0, \theta > 0$ 和控制增益矩阵 $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 。如果定理 2 中的条件成立, 则事件触发条件(35)和控制器(23)可以保证系统(18)是渐近稳定的。

考虑 Lyapunov 函数 $V(k) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mu(k)$, 其余证明过程与推论 1 相似, 此处不再赘述。

注 4 通过构造逼近解, 本文将测量误差 $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k_l)$ 改为 $\mathbf{e}_g(k)$ 和 $\mathbf{e}_h(k)$, 减小了测量误差的取值, 有利于降低事件触发的次数。但是与传统事件触发方法相比^[15-16], 本文所提方法并不会降低稳定性判据的保守性。

3 数值仿真

例 1 在本例中, 考虑倒立摆模型, 其线性化动力学模型如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(m+M)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix} + \\ & \Delta\mathbf{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (36)$$

式中 $\boldsymbol{\theta}$ 为摆角, $\mathbf{u}(t)$ 为作用在小车上的力, 摆锤质量 $m = 0.1 \text{ kg}$, 小车质量 $M = 0.1 \text{ kg}$, 摆锤长度 $l = 0.136 \text{ m}$, 这里取重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 用 $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{E}\boldsymbol{\Sigma}(t)\mathbf{F}$ 用以描述倒立摆控制系统的参数不确定性^[21], 取 $\mathbf{E} = \text{col}[0.4 \quad 0.8]$, $\mathbf{F} = [0 \quad 0.1]$, $\boldsymbol{\Sigma}(t) = \sin(t)$ 。

令采样周期为 0.005 s , 通过将上式离散化得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & \left(\begin{bmatrix} 1.0018 & 0.0100 \\ 0.3600 & 1.0018 \end{bmatrix} + \Delta\mathbf{A}' \right) \times \\ & \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -0.0010 \\ -0.1840 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (37)$$

式中 $\Delta\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 \\ 0 & 0.0004 \end{bmatrix} \sin(k)$ 。

考虑具有以下参数的离散线性系统, 取 $\mathbf{K} = [2.8548 \quad 0.4758]$, 触发阈值 $\varepsilon = 0.1$ 。

通过 LMI 工具箱解线性矩阵不等式(8), 可得

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 3.4651 \times 10^4 & 5.7663 \times 10^3 \\ 5.7663 \times 10^3 & 1.5631 \times 10^3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

选取初始条件为 $\mathbf{x}(0) = \text{col}[0.2, 0]$, 迭代次数取 $T = 500$ 。

图 1、2 分别为本文所提出的方法与传统事件触发方法^[15-16]的控制器响应。本文所提出的方法触发次数为 5 次, 传统事件触发方法的触发次数为 69 次。很容易看出本文所提出的方法策略能有效减少触发次数。

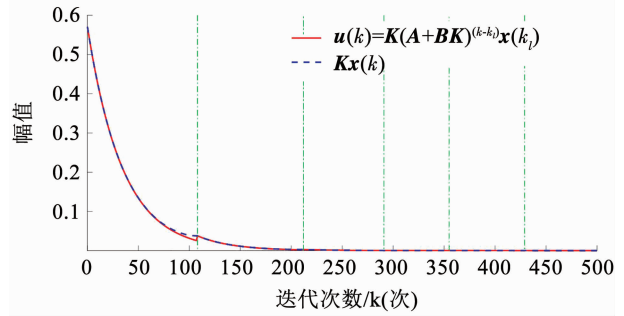


图 1 控制器响应: 状态逼近 ETC 方法

Fig. 1 Responses of controller: State approximation ETC strategy

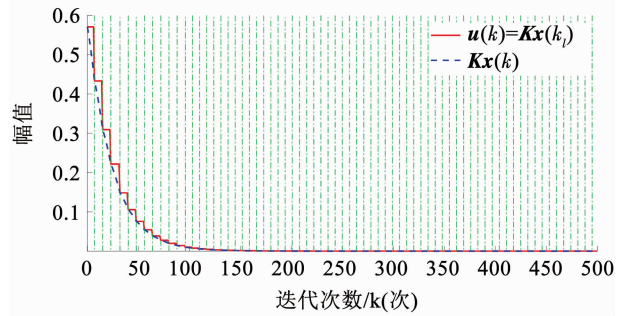


图 2 控制器响应: 传统 ETC^[15-16]

Fig. 2 Responses of controller: Traditional ETC^[15-16]

接下来, 比较本文中基于状态逼近的动态触发控制与文献[12]的仿真结果, 令式(15)中的 $\rho = 0.5, \theta = 3$, 迭代次数为 $T = 500$ 。图 3、4 为控制器响

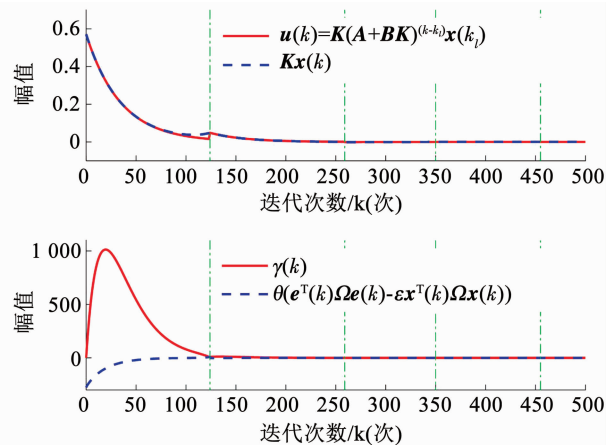


图 3 控制器响应和动态变量 $\gamma(k)$: 状态逼近动态 ETC

Fig. 3 Responses of controller and dynamic variable $\gamma(k)$: State approximation dynamic ETC

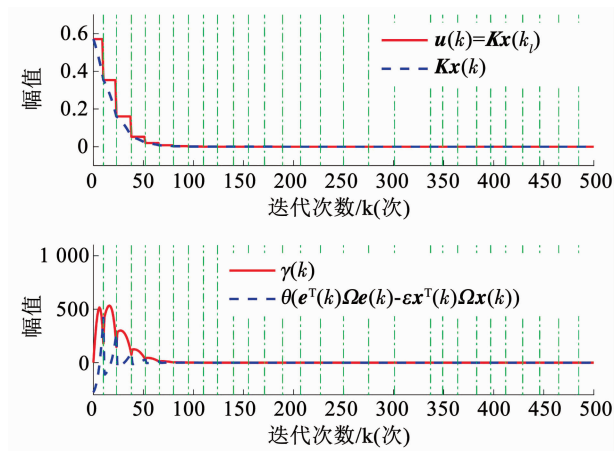


图 4 控制器响应和动态变量 $\gamma(k)$: 文献[12]的动态 ETC
Fig. 4 Responses of controller and dynamic variable $\gamma(k)$: Dynamic ETC in Ref. [12]

应和动态变量 $\gamma(k)$ 的仿真结果。仿真中, 本文中基于动态触发条件(6)产生的事件触发次数为4次, 而文献[12]中的方法为28次, 是本文方法的7倍。因此, 本文提出的状态逼近法可以有效减少事件发生的次数。

例 2 在本例中, 引入蔡氏电路系统, 离散化后得到非线性系统(18), 其系统参数如下: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.973 & 0.090 & 0 \\ 0.010 & 0.990 & 0.1 \\ 0 & -0.143 & 1.0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, $\mathbf{W} = \text{diag}\{0.08 \ 0 \ 0\}$, $\mathbf{W}_0 = \text{diag}\{0 \ 0 \ 0.1\}$, $\mathbf{E} = \text{col}[0.2 \ 0.2 \ 0.2]$, $\mathbf{F} = [0.2 \ 0.4 \ 0.6]$, $\mathbf{G} = [0.1 \ 0.4 \ 0.1]$, $\mathbf{H} = [0.1 \ 0.3 \ 0.5]$, $\boldsymbol{\Sigma}(k) = \boldsymbol{\Theta}(k) = \sin(k)$ 。

选取非线性函数 $f_r(s) = \frac{|s+1| - |s-1|}{2}$, 其中 $r=1, 2, 3$ 。当 $\mathbf{I}_1 = 0, \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}$, 满足条件(19)。取 $\varepsilon = 0.32, \mathbf{L} = 0.01\mathbf{I}, \mathbf{K} = -0.2\mathbf{I}$, 其中 $\mathbf{I}$ 是3阶单位矩阵。

通过 LMI 工具箱解出线性矩阵不等式(26), 可得

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1126.4877 & -1275.4710 & 118.9371 \\ -1275.4710 & 1727.7825 & -592.2620 \\ 118.9371 & -592.2620 & 1318.7567 \end{bmatrix} \quad (39)$$

选择初始条件 $\mathbf{x}(0) = \text{col}[3, -3, 4]$, 迭代次数 $T=50$ 。图5、6分别给出了本文所提出方法与传统事件触发方法^[15-16]对应的事件触发间隔。本文所提出的方法与传统事件触发方法的采样数量分别为6、22, 可以看出本文所提出的方法策略能有效减少采样数量。

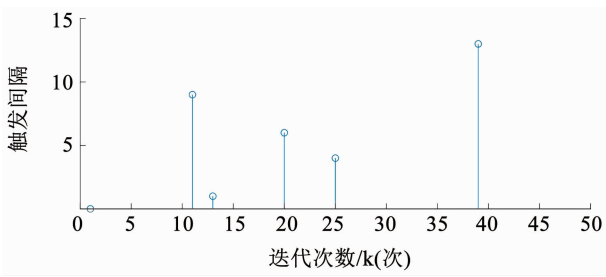


图 5 事件触发时刻和间隔: 状态逼近 ETC 方法
Fig. 5 Event-triggered time and intervals: State approximation ETC strategy

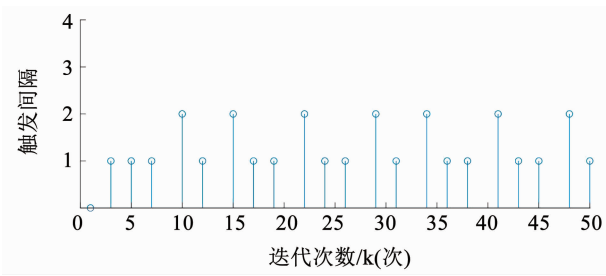


图 6 事件触发时刻和间隔: 传统 ETC^[15-16]
Fig. 6 Event-triggered time and intervals: Traditional ETC^[15-16]

将文献[12]所用方法与本文中基于状态逼近的动态触发作比较, 设动态触发条件(34)中的 $\rho=0.5, \theta=3$, 迭代次数为 $T=50$ 。图7、8分别给出了动态变量 $\mu(k)$ 和事件触发间隔的仿真结果。在图7中, 本文方法基于动态触发条件(35)产生的事件数为4次, 而在图8中, 文献[12]中的方法为14次。本文提出的状态逼近法可以有效减少事件发生的次数, 并且本文方法结合动态事件触发策略进一步减少了事件触发次数。

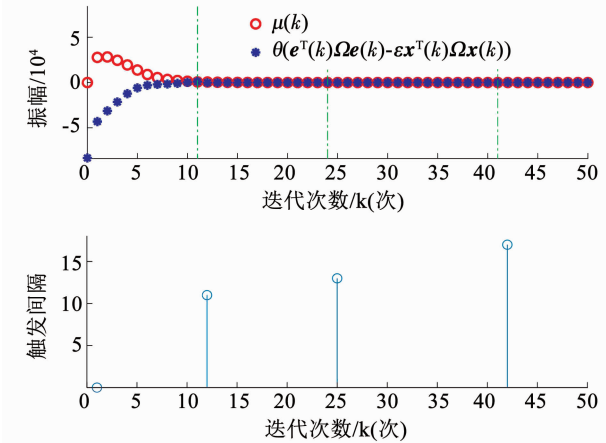


图 7 动态变量 $\mu(k)$ 与事件触发时刻和间隔: 状态逼近动态 ETC
Fig. 7 Dynamic variable $\mu(k)$ and event-triggered time and intervals: State approximation dynamic ETC

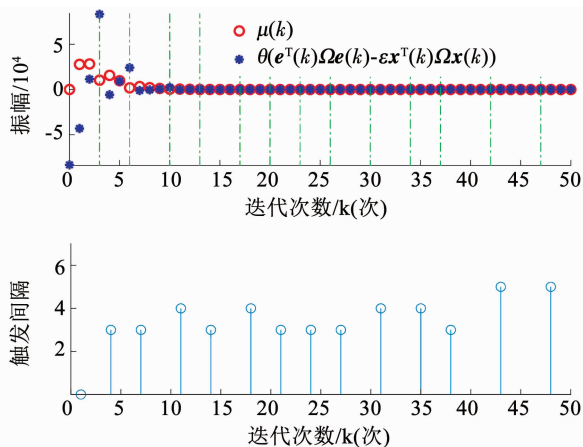


图8 动态变量 $\mu(k)$ 与事件触发时刻和间隔:文献[12]的动态ETC

Fig. 8 Dynamic variable $\mu(k)$ and event-triggered time and intervals; Dynamic ETC in Ref. [12]

4 结论

1) 针对带有参数扰动的线性/非线性系统,利用系统矩阵、采样信号和无扰动离散线性系统解析解的定义逐段构造状态逼近解,逼近解可以一定程度上跟随系统当前状态,减少测量误差。设计了基于状态逼近解的控制器和事件触发条件。通过构造Lyapunov 泛函分别给出了线性/非线性系统稳定的充分条件。并将状态逼近法结合动态事件触发策略做了进一步研究。

2) 通过列举倒立摆系统和蔡氏电路的实验表明,相比传统事件触发控制方法,本文提出基于状态逼近的事件触发控制方法产生的事件次数更少,可以有效地节约通讯带宽资源。

参考文献

- [1] WU Zhengguang, SHI Peng, SU Hongye, et al. Stochastic synchronization of Markovian Jump neural networks with time-varying delay using sampled data [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(6): 1796. DOI: 10.1109/TSMCB.2012.2230441
- [2] FRIDMAN E. A refined input delay approach to sampled-data control [J]. Automatica, 2010, 46(2): 421. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.11.017
- [3] WU Zhiying, MO Huadong, XIONG Junlin, et al. Adaptive event-triggered observer-based output feedback L_∞ load frequency control for networked power systems [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 16(6): 3952. DOI: 10.1109/TII.2019.2942637
- [4] GU Zhou, SHI Peng, YUE Dong. An adaptive event-triggering scheme for networked interconnected control system with stochastic uncertainty [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(2): 236. DOI: 10.1002/rnc.3570
- [5] ZHANG Jinhui, FENG Gang. Event-driven observer-based output feedback control for linear systems [J]. Automatica, 2014, 50(7): 1852. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.04.026
- [6] XU Wenying, HO D W C, LI Lulu, et al. Event-triggered schemes on leader-following consensus of general linear multiagent systems under different topologies [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 47(1): 212. DOI: 10.1109/TCYB.2015.2510746

- [7] 王智鹏, 郭凤至, 孙兆伟, 等. 事件驱动的卫星编队姿态分布式协同控制 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2018, 50(10): 35. WANG Zhipeng, GUO Fengzhi, SUN Zhaowei, et al. Event-triggered distributed attitude coordination control of satellite formation [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2018, 50(10): 35. DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201707100
- [8] 王婕, 马晓, 宗群, 等. 四旋翼无人飞行器的轨迹跟踪与滑模事件驱动控制 [J]. 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1083. WANG Jie, MA Xiao, ZONG Qun, et al. Trajectory tracking and sliding mode event-triggered control for a quadrotor unmanned aerial vehicle [J]. Control Theory and Applications, 2019, 36(7): 1083. DOI: 10.7641/CTA.2018.80149
- [9] SHEN Bo, WANG Zidong, QIAO Hong. Event-triggered state estimation for discrete-time multidelayed neural networks with stochastic parameters and incomplete measurements [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 28(5): 1152. DOI: 10.1109/TNNLS.2016.2516030
- [10] HU Zhipei, SHI Peng, ZHANG Jin, et al. Control of discrete-time stochastic systems with packet loss by event-triggered approach [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(2): 755. DOI: 10.1109/TSMC.2018.2882590
- [11] GIRARD A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(7): 1992. DOI: 10.1109/TAC.2014.2366855
- [12] GE Xiaohua, HAN Qinglong, WANG Zidong. A dynamic event-triggered transmission scheme for distributed set-membership estimation over wireless sensor networks [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(1): 171. DOI: 10.1109/TCYB.2017.2769722
- [13] LUNZE J, LEHMANN D. A state-feedback approach to event-based control [J]. Automatica, 2010, 46(1): 212. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.10.035
- [14] DING Sanbo, WANG Zhanshan, ZHANG Huaguang. Event-triggered control for a class of non-linear systems: An exponential approximation method [J]. IET Control Theory and Applications, 2018, 12(10): 1492. DOI: 10.1049/iet-cta.2017.0965
- [15] DE SOUZA C, LEITE V J S, TARBOURIECH S, et al. Emulation-based dynamic output-feedback control of saturating discrete-time LPV systems [J]. IEEE Control Systems Letters, 2021, 5(5): 1549. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3040683
- [16] WU Wei, REIMANN S, LIU S. Event-triggered control for linear systems subject to actuator saturation [J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 9492. DOI: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.0255
- [17] KOBAYASHI M. Decomposition of rotor Hopfield neural networks using complex numbers [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(4): 1366. DOI: 10.1109/TNNLS.2017.2657781
- [18] SONG Jun, NIU Yugang, XU Jing. An event-triggered approach to sliding mode control of Markovian Jump Lur'e systems under hidden mode detections [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(4): 1514. DOI: 10.1109/TSMC.2018.2847315
- [19] JIN Xiaozheng, JIANG Chengcheng, QIN Jiahu, et al. Robust pinning constrained control and adaptive regulation of coupled Chua's circuit networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2019, 66(10): 3928. DOI: 10.1109/TCSI.2019.2917830
- [20] WU Ailong, ZENG Zhigang. Exponential stabilization of memristive neural networks with time delays [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(12): 1925. DOI: 10.1109/TNNLS.2012.2219554
- [21] YUE Dong, TIAN Engang, HAN Qinglong. A delay system method to design of event-triggered control of networked control systems [C]//Proceedings of the 50th Decision and Control and European Control Conference. Orlando, FL: IEEE, 2011: 1668. DOI: 10.1109/CDC.2011.6160839