

DOI:10.11918/202109019

考虑加速度频响函数不确定的有限元模型修正

彭珍瑞,张亚峰,张雪萍

(兰州交通大学 机电工程学院,兰州 730070)

摘 要: 为克服实际应用中缺乏足够的结构统计信息,获得结构参数和响应的极限值,提出了一种基于加速度频响函数的区间有限元模型修正方法。首先,将频响函数小波变换,提取低频小波系数作为模型修正的响应特征量,以待修正参数和响应特征量分别为输入和输出构建径向基代理模型并采用鲸鱼优化算法来优选径向基模型方差值;其次,根据区间重叠率和巴氏距离分别构造两步求解待修正参数区间的两个目标函数和同步求解待修正参数区间的目标函数,以评估两个样本区间分布的相似性和相异性;然后,由灰色数学方法估计径向基模型预测响应特征量的区间,运用花朵授粉算法分别实施待修正参数区间中点和半径的两步和同步求解;最后,通过两个数值算例和一个试验算例验证了所提方法的可行性。结果表明,所提区间有限元模型修正方法能够有效地修正结构参数的区间中点和半径,且在不同试验响应区间下对参数区间的修正具有鲁棒性,同时可以有效地解决小样本的不确定性模型修正问题。

关键词: 区间模型修正;径向基模型;频响函数;区间巴氏距离;灰色数学

中图分类号: O327;TB123

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2023)08-0124-11

Finite element model updating considering the uncertainty of acceleration frequency response function

PENG Zhenrui, ZHANG Yafeng, ZHANG Xueping

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: To overcome the lack of sufficient structural statistical information in practical application and obtain the limit values of structural parameters and responses, an interval finite element model updating method based on acceleration frequency response function is proposed. Firstly, the frequency response function is transformed by wavelet transform with the low frequency wavelet coefficients extracted as the response characteristic quantity of the model updating. The parameters to be updated and the response characteristic quantity are respectively input and output to construct the radial basis proxy model. The whale optimization algorithm is used to optimize the variance value of radial basis function model. Secondly, two objective functions for two-step solution of the parameter interval to be updated and one objective function for synchronous solution of the parameter interval to be updated are constructed according to the interval overlap ratio and Bhattacharyya distance, so as to evaluate the distribution similarity and heterogeneity of the two samples. Then, the grey mathematics method is implemented to estimate the interval of characteristic quantity predicted by the radial basis model, and the flower pollination algorithm is adopted to solve the two-step synchronous solutions of the midpoint and radius of the parameter interval to be updated. Finally, two numerical examples and one experimental example are provided to verify the feasibility of the proposed method. The results show that the proposed interval finite element model can effectively update the interval midpoint and radius of structural parameters, and prove to be robust to the parameter interval updating under different test response intervals, thus effectively solving the problem of uncertainty model updating for small test samples.

Keywords: interval model updating; radial basis function model; frequency response function; interval Bhattacharyya distance; grey mathematics

用实验数据作为精确的参考数据来改进有限元预测,称为有限元模型修正^[1]。当前多数模型修正

方法属于确定性方法,没有考虑结构参数和响应的不确定性,降低了其工程实际应用价值。然而,大多

数实际工程结构的材料参数、几何尺寸和试验数据的不确定性广泛存在。因此,研究涉及不确定性分析的有限元模型修正非常必要^[2-3]。

在模型修正过程中,使用代理模型代替有限元模型可减小计算量,是解决复杂工程结构优化问题的有效途径之一^[4]。常见的代理模型中,径向基(Radial basis function, RBF)模型结构简单,预测精度高,广泛应用于土木、航天和机械等领域^[5]。因此,本文选用 RBF 模型为模型修正的代理模型。

近年来,众多学者研究了考虑不确定性的模型修正方法,并取得了一定的成果。不确定性有限元模型修正主要可分为概率和非概率方法,基于概率的模型修正一般为随机模型修正方法,基于非概率的模型修正有模糊方法和区间分析方法^[6]。概率方法需要丰富的试验数据以得到较准确的统计信息,计算成本高^[7];基于模糊数学的模糊方法在确定隶属函数时容易引入额外的不确定性^[8];区间分析方法对数据要求低,适用于缺乏数据信息的情况^[9]。Fang 等^[10]将区间响应面模型用于区间模型修正,实现参数和响应的区间估计。骆勇鹏等^[11]提出一种基于响应面的灵敏度模态区间分析方法,通过比较相对模态区间灵敏度判断结构响应对参数的敏感程度。姜东等^[12]采用区间扩张理论与灵敏度方法,用于不确定性和初始有限元模型误差均较小情况的有限元模型修正。Deng 等^[13]提出了一种利用一阶摄动法和 RBF 神经网络进行结构参数区间识别的两步确定性修正方法。Wang 等^[14]提出了一种改进的参数摄动法来预测不确定结构的特征值区间,该方法考虑了计算效率,但它依赖于区间变量的初始值和不确定程度。Deng 等^[15]提出了一种结构不确定性度量区间识别策略,可以得到系统响应的精确区间估计。Zheng 等^[8]提出了一种利用泛灰数学和高斯过程回归模型的两步区间模型修正方法。上述区间模型修正研究均以结构振动的模态参数作为响应量,相比于模态参数,结构振动的频响函数(Frequency response function, FRF)则包含了更充分的结构信息,能够更加准确地反映结构的动力学特性。同时,采用 FRF 进行模型修正可以有效避免由模态分析所引入的误差^[16-17]。此外,小波变换是进行信号时频研究的重要工具,可以聚焦信号的细节特征,已被广泛应用于水文、地震勘探、生态保护和经济管理等领域预测研究^[18]。本文对加速度 FRF 小波变换提取低频小波系数作为响应特征量进行模型修正。

综上所述,本文提出了基于加速度频响函数的区间有限元模型修正方法。首先构造 RBF 代理模

型并对 RBF 模型方差值进行了优选;然后利用区间重叠率和巴氏距离分别构造两步和同步修正所需要的目标函数,用来度量两个样本区间分布的相似性和相异性;最后结合灰色数学方法,运用花朵授粉算法分别进行两步和同步待修正参数区间的求解。通过支撑框架结构,空间桁架结构和简支梁结构验证所提方法的有效性。

1 小波变换

小波变换通过伸缩平移运算对信号多尺度细化,最终高频处时间细分,低频处频率细分,凸显问题某些方面的特征。对一维信号 $y(t)$ 的小波变换,给定一个基函数,令

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{1}$$

式中: a 为伸缩因子且大于 0, b 为平移因子。为了计算方便,在实际分析和应用中需要将连续小波及小波系数进行离散化处理,则 $y(t)$ 的小波变换为

$$WT_y(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{t=1}^n y(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), t = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

式中, $WT_y(a,b)$ 为 $y(t)$ 的小波系数。在一定的频率点数下,小波分解层数过少会使每层小波系数过多,计算量过高,反之,分解层数过多会使每层小波系数过少而影响模型修正效果。通过对比多次试验效果,本文设定基函数为 db3,分解层数为 4、5 层。对加速度 FRF 进行小波变换,提取低频小波系数作为构造 RBF 模型的输出,也作为加速度 FRF 的响应特征量进行模型修正。

2 RBF 模型的构造

2.1 RBF 神经网络的基本原理

在 d 维设计空间中生成一组数量为 N 的初始样本点 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N] \in \mathbf{R}^d$, 目标的真实响应值为 $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_N)$, RBF 插值函数的数学形式为

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N w_k \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|) \tag{3}$$

式中: N 为样本点个数, w_k 为权值系数, $\|\cdot\|$ 为欧氏距离, $\varphi(\cdot)$ 为基函数。

由 $s(\mathbf{x}_k) = y(\mathbf{x}_k)$ 可得: $\Phi \cdot \mathbf{W} = \mathbf{Y}$, 即 $\mathbf{W} = \Phi^{-1} \cdot \mathbf{Y}$, 其中

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_k\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k\|) \end{pmatrix}$$

式中: $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$ 为权系数向量, $\mathbf{Y} = [y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_k)]^T$ 为样本点的真实响应向量。选用应用较广的高斯插值基函数, 表达式为

$$\varphi(r, \sigma) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

式中: $r = \|x - x_k\|$ 为当前预测点与任意样本点之间的欧氏距离, σ^2 为方差。

2.2 RBF 模型的构造及验证

建立一个严格 RBF 模型, 需要先设定高斯插值基函数的方差值, 方差直接影响模型预测精度。通过鲸鱼优化算法 (Whale optimization algorithm, WOA) 优选最佳方差值。WOA 以泡泡网搜索策略为灵感, 主要步骤为包围猎物、气泡网攻击和搜索猎物^[19]。

采用拉丁超立方抽样方法抽取初始待修正参数 $\pm 20\%$ 区间内的样本, 将其分为训练集和测试集。建立目标函数:

$$\text{obj}_\sigma = \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^S (y_s^a - y_s^{\text{res}})^2 \quad (5)$$

式中: y_s^{res} 为测试集 RBF 模型预测的响应特征量, y_s^a 为测试集有限元模型响应特征量, S 为测试集样本数, K 为响应特征量数目。设置 WOA 中搜索代理为 30, 最大迭代次数为 50, 参数上、下界分别为 50.00 和 0.01, 通过 WOA 以式 (5) 为目标函数确定 RBF 模型的最优方差值, 建立 RBF 模型。然后, 计算测试集的 RBF 模型预测值和有限元模型真实值之间的均方根误差值 (RMSE) 来评估 RBF 模型的预测精度, RMSE 表达式为

$$\text{RMSE} = \frac{1}{\hat{y}_s^a} \sqrt{\sum_{s=1}^S (y_s^a - y_s^{\text{res}})^2} \quad (6)$$

式中 $\hat{y}_s^a$ 为有限元模型响应特征量的均值。

3 灰色数学方法

实际工程结构中所能获得的样本信息非常有限, 且具有不确定性。灰色数学方法需要的样本量小, 主观依赖性小, 具有效率高和精度高的优点^[9]。在工程问题中, 不确定信息可以使用灰色数学方法来获得实际值的区间估计, 其基本原理如下。

对一组初始不规则数据:

$$\mathbf{Y} = \{y(c), c = 1, 2, \dots, n\} \quad (7)$$

将数据从小到大排列, 得到:

$$\mathbf{Y}^{(0)} = \{y^{(0)}(c), c = 1, 2, \dots, n\} \quad (8)$$

把 $\mathbf{Y}^{(0)}$ 的元素按顺序相加, 得到一个新的 $\mathbf{Y}^{(1)}$ 序列:

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \{y^{(1)}(c), c = 1, 2, \dots, n\} = \{y^{(0)}(1), y^{(0)}(1) + y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(1) + y^{(0)}(2) + \dots + y^{(0)}(n)\} \quad (9)$$

定义:

$$\begin{cases} \Delta(c) = \frac{y^{(1)}(n)}{n}c - y^{(1)}(c) \\ \Delta_{\max} = \max(\Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(n)) \\ g = h \frac{\Delta_{\max}}{n} \end{cases} \quad (10)$$

式中: h 为恒定灰色系数, 通常取值 2.5; g 为基于灰色估计的不确定性估计标准差; 数据的区间为 $[\tilde{y} - 3g, \tilde{y} + 3g]$, 其中, $\tilde{y} = \frac{1}{n} \sum_{c=1}^n y^{(0)}(c)$ 。本文应用灰色数学方法确定结构响应特征量的区间。

4 区间分析理论

不确定度量用以表征理论分析响应和测量响应之间的区间一致性, 反映两个区间分布的相似性和相异性, 它直接影响模型修正的精度。

4.1 区间重叠率

连续区间 $P = [\underline{p}, \bar{p}]$ 和 $Q = [\underline{q}, \bar{q}]$, 区间长度为:

$$\text{len}(P) = \bar{p} - \underline{p}, \text{len}(Q) = \bar{q} - \underline{q} \quad (11)$$

定义区间 P 和区间 Q 的区间重叠率 (Interval overlap ratio, IOR)^[15] 为

$$\text{IOR}(P|Q) = \frac{\text{len}(P \cap Q) - \text{len}((P \cup Q) - (P \cap Q))}{\text{len}(Q)} \quad (12)$$

式中: 运算符 $\cup$ 、 $\cap$ 分别为并集、交集; $\text{len}(P \cap Q)$ 、 $\text{len}((P \cup Q) - (P \cap Q))$ 分别为表征区间 P 和区间 Q 之间的相似程度和不相似程度。由式 (12) 可知, 在 $P = Q$ 的情况下, $\text{IOR}(P|Q) = 1$ 。对于区间模型修正问题, 利用 $\text{IOR}(P|Q)$ 可以度量理论分析数据和测量数据之间区间分布的相似性。

4.2 区间巴氏距离

巴氏距离用来度量两个概率分布之间的相似性, 巴氏距离越小, 表示两个概率分布越相似^[20]。在高斯分布下 $U = N(m_U, \theta_U)$ 和 $V = N(m_V, \theta_V)$ 的巴氏距离为

$$\text{BD}(U, V) = \frac{1}{8}(m_U - m_V)^T \theta^{-1}(m_U - m_V) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\det \theta}{\sqrt{\det \theta_U \det \theta_V}} \right) \quad (13)$$

式中: $\theta = (\theta_U + \theta_V)/2$ 。本文将式 (13) 中概率分布的均值和方差定义为区间分布的区间中点和半径。

将高斯分布下的巴氏距离推广应用于区间有限元模型修正,度量两个区间分布的相似性,称为区间巴氏距离,表示为

$$\text{obj}_x = \frac{1}{8}(\tilde{\mathbf{y}}^{\text{res}} - \tilde{\mathbf{y}}^e)^T \boldsymbol{\delta}^{-1}(\tilde{\mathbf{y}}^{\text{res}} - \tilde{\mathbf{y}}^e) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\det(\boldsymbol{\delta})}{\sqrt{\det(\text{diag}(\Delta \mathbf{y}^{\text{res}})) \det(\text{diag}(\Delta \mathbf{y}^e))}} \right) \quad (14)$$

式中: $\boldsymbol{\delta} = (\text{diag}(\Delta \mathbf{y}^{\text{res}}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{y}^e))/2$, $\tilde{\mathbf{y}}^{\text{res}}$ 、 $\Delta \mathbf{y}^{\text{res}}$ 分别为灰色数学方法估计 RBF 模型预测响应特征量的区间中点和半径, $\tilde{\mathbf{y}}^e$ 、 $\Delta \mathbf{y}^e$ 分别为灰色数学方法估计试验模型响应特征量的区间中点和半径。

5 模型修正过程

花朵授粉算法 (Flower pollination algorithm, FPA) 具有异花授粉 (全局寻优) 和自花授粉 (局部寻优) 两大特性。异花授粉过程可以逃离任何局部景观,进而探索更大的空间;自花授粉过程使相似的解被更频繁地选择,本质上是指数收敛,收敛速度更高,性能优于遗传算法和粒子群算法^[21]。本文运用 FPA 分别进行两步和同步的区间有限元模型修正。

结构待修正参数具有不确定性,将其描述为实数域 R 内的一个闭区间:

$$\mathbf{x}^I = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] = [\bar{\mathbf{x}} - \Delta \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}] \quad (15)$$

式中:上标 I 为该参数为区间参数, $\bar{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}})/2$ 为区间中点, $\Delta \mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}})/2$ 为区间半径。结构响应区间 $\mathbf{y}^I$ 由结构参数区间中点及半径确定。

1) 两步修正参数区间中点和半径。第 1 步求解结构待修正参数的区间中点。建立目标函数:

$$\text{obj}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \sum_{k=1}^K |y_k^{\text{res}} - \tilde{y}_k^e| \quad (16)$$

式中: y_k^{res} 为 RBF 模型预测的响应特征量, $\tilde{y}_k^e$ 为灰色数学方法估计试验模型响应特征量的区间中点。第 2 步根据已修正的结构参数的区间中点来求解参数的区间半径。利用 IOR 建立目标函数:

$$\text{obj}_{\Delta \mathbf{x}} = \sum_{k=1}^K |1 - \text{IOR}(y_k^{\text{res}} | y_k^{\text{le}})| \quad (17)$$

式中: y_k^{res} 为灰色数学方法估计 RBF 模型预测响应特征量的区间, y_k^{le} 为灰色数学方法估计试验模型响应特征量的区间。其中,在每次求解参数区间半径迭代过程中,根据已修正的区间中点,采用拉丁超立方抽取 200 个区间样本参与模型修正。两步模型修正流程如图 1 所示。

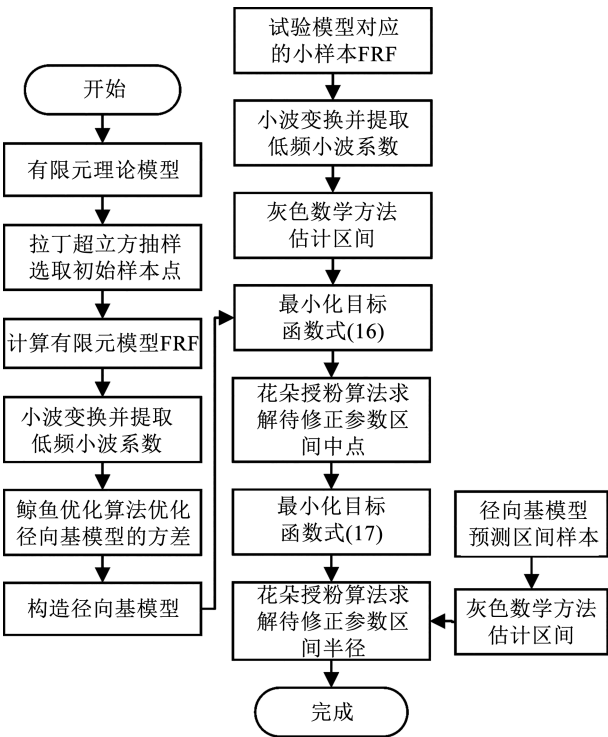


图 1 两步模型修正流程

Fig. 1 Flow chart of two-step model updating

2) 同步修正参数区间中点和半径。首先抽取 200 个参数区间样本,通过已构造的 RBF 模型预测样本响应特征量;然后使用灰色数学方法估计响应特征量区间中点和半径;最后运用 FPA 直接以式(14)为目标函数同时求解待修正参数区间中点和半径。其中,在每次同时求解参数区间中点和半径迭代过程中,同样抽取 200 个区间样本参与有限元模型修正。值得说明,式(14)完全可以替换式(17),实现两步修正参数区间中点和半径,由于篇幅所限,不再详细说明。

6 算 例

6.1 数值算例 1

如图 2 所示支撑框架结构,采用空间刚架单元模拟该结构的有限元模型。该结构共有 54 个节点,144 个自由度,70 个梁单元和 6 个边界支撑。其中,1~6 为边界上的固定节点。箭头表示激励位置,⊗ 表示测点位置。选择结构弹性模量 E 和材料密度 d 的区间中点及半径为模型待修正参数,初始有限元模型 E 和 d 的区间中点分别为 231 GPa 和 7 020 kg/m³,试验模型 E 和 d 的区间中点分别为 210 GPa 和 7 800 kg/m³,区间半径分别为 3 GPa 和 100 kg/m³。初始有限元模型和试验模型 E 和 d 的区间中点的相对误差分别为 10% 和 -10%。

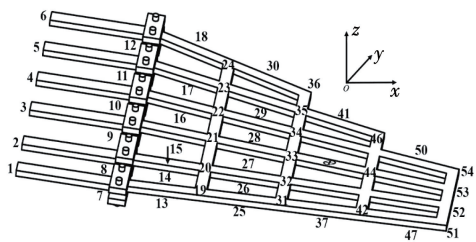


图 2 支撑框架结构

Fig.2 Supporting frame structure

本算例中选择 500 个频率点,设定小波变换分解层数为 5。根据所述方法,通过 WOA 优化确定最佳方差值来建立 RBF 模型,得到 RBF 模型的方差值为 0.089 3。然后计算得到 RMSE 为 9.29×10^{-5} ,说明构造的 RBF 模型预测精度较高。为进一步评估 RBF 模型的预测精度,图 3 给出了测试集样本第 2 和第 10 响应特征量的有限元模型计算值和 RBF 模型预测值,从图 3 可以看到,有限元模型计算值和 RBF 模型预测值几乎全部重合,可以代替有限元模型。

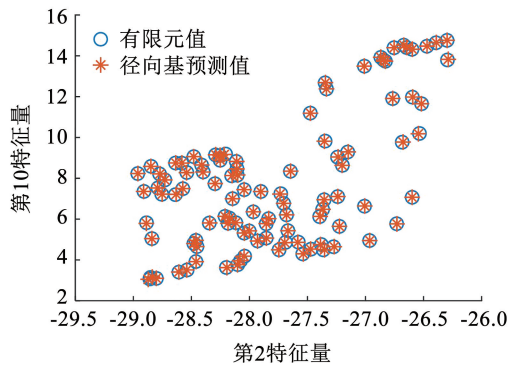


图 3 测试集样本的预测值和真实值

Fig.3 Predicted value and true value of test set sample

6.1.1 两步修正

以试验模型参数区间中点和半径抽取 50 个样本进行计算有限元模型加速度 FRF,通过小波变换并提取第 5 层低频小波系数作为仿真试验响应特征量,使用灰色数学方法评估响应特征量区间。然后按照所述两步修正过程,通过 FPA 第 1 步迭代求解结构参数区间中点,第 2 步迭代求解待修正参数的区间半径,修正后的结构参数结果见表 1。

表 1 结构修正前、后的参数区间

Tab.1 Initial and updated parameter interval of structure				
修正参数	E 区间中点/GPa	d 区间中点/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	E 区间半径/GPa	d 区间半径/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
设定值	210	7 800	3	100
有限元值	231	7 020	—	—
修正值	209.912	7 797.102	3.071	103.813
相对误差/%	4.190×10^{-2}	3.715×10^{-2}	2.367	3.813

从表 1 可以看出,修正后的相对误差较小,表明所提两步进行区间模型修正取得了很好的效果,对结构参数区间的修正是精确的,也表明了所提方法可以有效地解决试验小样本的区间模型修正问题。为进一步验证修正效果,使用表 1 中修正后的结构参数区间抽取 50 个样本分别计算修正后的有限元模型加速度 FRF(称为 RBF 模型 FRF)和响应特征量。其中,FRF 区间收敛如图 4 所示,计算修正后有限元模型第 4 和第 12 响应特征量样本与试验模型响应特征量数据比较的散点如图 5 所示。

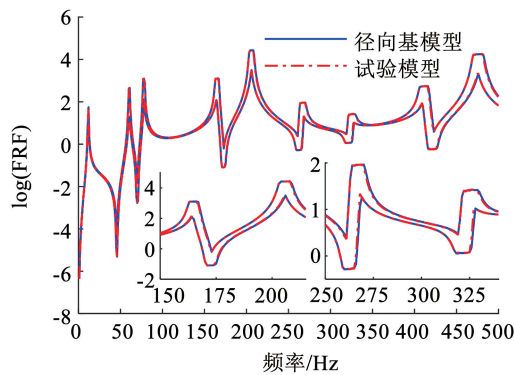


图 4 频响函数区间收敛

Fig.4 Interval convergence of FRF

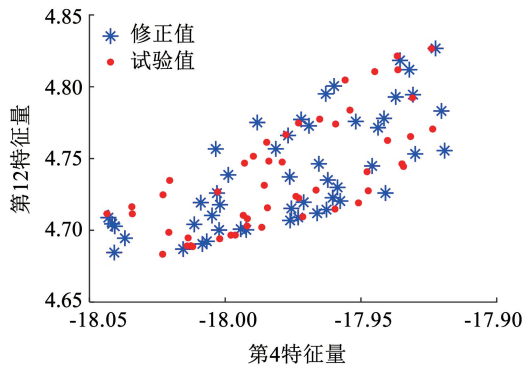


图 5 响应特征量区间散点图

Fig.5 Scatter plot of response characteristics interval

从图 4、5 可以看出,修正后的有限元模型和试验模型的 FRF 区间吻合良好,修正后的有限元模型响应特征量计算样本和试验模型响应特征量数据也吻合良好。综上所述,验证了所提两步进行区间有限元模型修正的有效性。

6.1.2 同步修正

按照所述同步修正过程,使用与两步修正相同的仿真试验数据,通过 FPA 同时迭代求解结构参数区间中点和半径,修正后的结果见表 2。

表 2 结构修正前、后的参数区间

Tab. 2 Initial and updated parameter interval of structure

修正参数	E 区间中点/ 点/GPa	d 区间中点/ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	E 区间半 径/GPa	d 区间半径/ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
设定值	210	7 800	3	100
有限元值	231	7 020	—	—
修正值	209.883	7 797.731	3.118	96.595
相对误差/%	4.285×10^{-2}	3.718×10^{-2}	3.933	3.405

从表 2 可以看出,同步修正与两步修正具有相同的修正效果。同样,为进一步验证修正效果,使用表 2 中修正后的结构参数区间抽取 50 个样本分别计算修正后的有限元模型 FRF 和响应特征量。其中,FRF 区间收敛如图 6 所示,计算修正后有限元模型第 4 和第 12 响应特征量样本与试验模型响应特征量数据比较的散点如图 7 所示。从图 6、7 可以看出,修正后的有限元模型和试验模型的 FRF 区间及响应特征量区间样本同样吻合良好。综上所述,验证了所提同步进行区间有限元模型修正的有效性。

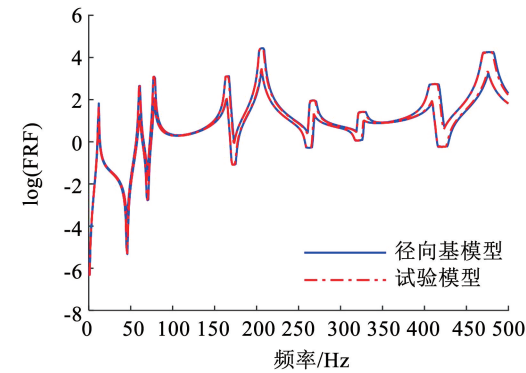


图 6 频响函数区间收敛

Fig. 6 Interval convergence of FRF

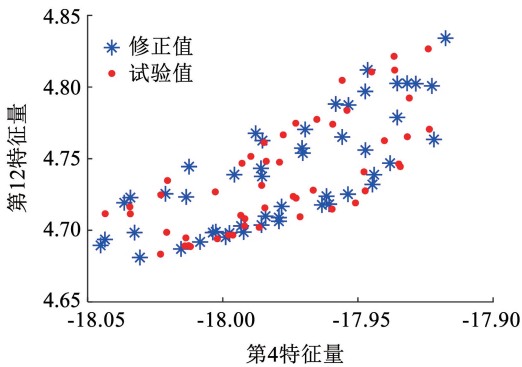


图 7 响应特征量区间散点图

Fig. 7 Scatter plot of response characteristics interval

6.2 数值算例 2

如图 8 所示空间桁架结构,该桁架模型由 72 个杆单元组成,共有 20 个节点和 48 个自由度。单元横截面积为 1 cm^2 ,箭头表示激励位置, $\times$ 表示测点

位置。选择结构弹性模量 E_1 (直杆)、 E_2 (斜杆) 和材料密度 d 的区间中点及半径为模型待修正参数。初始有限元模型 E_1 、 E_2 和 d 的区间中点分别为 231、209 GPa 和 $7\,020\text{ kg/m}^3$,试验模型 E_1 、 E_2 和 d 的区间中点分别设定为 210、190 GPa 和 $7\,800\text{ kg/m}^3$,初始有限元模型和试验模型 E_1 、 E_2 和 d 的区间中点的相对误差分别为 10 %、10 % 和 -10 %。设定两种不同的试验参数区间半径工况来验证所提模型修正方法的有效性。工况 1 为试验模型参数 E_1 、 E_2 和 d 区间半径分别设定为 3、2 GPa 和 60 kg/m^3 ;工况 2 为试验模型参数 E_1 、 E_2 和 d 区间半径分别设定为 6、5 GPa 和 200 kg/m^3 。

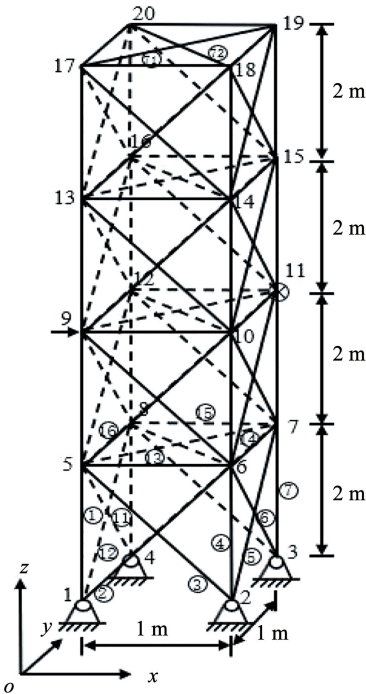


图 8 空间桁架结构

Fig. 8 Space truss structure

本算例中选择 500 个频率点,设定小波变换分解层数为 5。采用 RBF 模型的构造及验证所述方法建立 RBF 模型,得到 RBF 模型的方差值为 0.246 9,迭代情况如图 9 所示。为进一步评估 RBF 模型的预测精度,图 10 给出了测试集样本第 7 和第 15 响应特征量的有限元模型计算值和 RBF 模型预测值,从图 10 可以看到,有限元模型计算值和 RBF 模型预测值几乎全部重合,可以代替有限元模型。

6.2.1 两步修正

以试验模型参数区间中点和半径抽取 100 个样本进行计算有限元模型加速度 FRF,通过小波变换并提取第 5 层低频小波系数作为仿真试验响应特征量,并使用灰色数学方法估计响应特征量区间。然后根据所述两步修正方法进行区间模型修正。其

中,工况 1 结构参数区间中点和半径的迭代情况分别如图 11、12 所示,修正结果见表 3,工况 2 结构参

数区间修正结果见表 4。

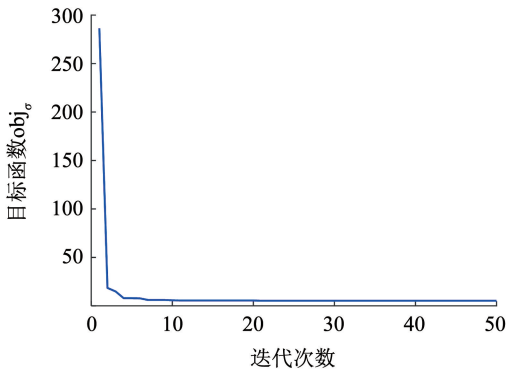


图 9 鲸鱼优化算法迭代曲线
Fig. 9 Iteration curve of WOA

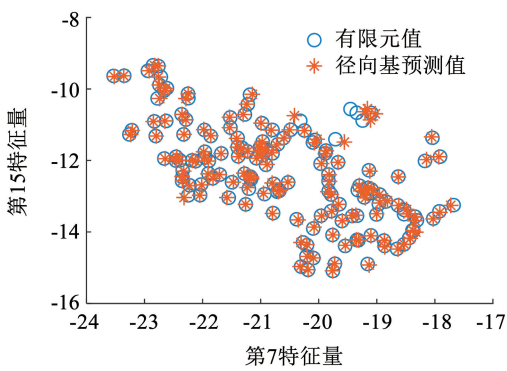


图 10 测试集样本的预测值和真实值
Fig. 10 Predicted value and true value of test set sample

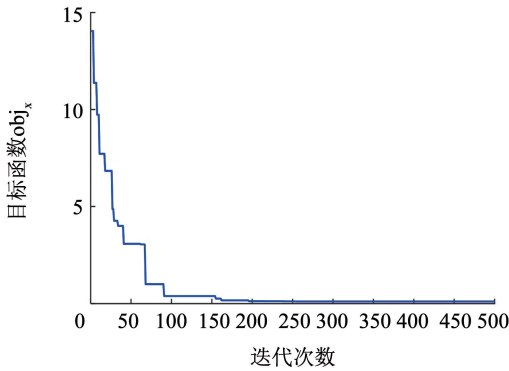


图 11 花朵授粉算法求解参数区间中点
Fig. 11 Interval midpoint iteration curve of FPA

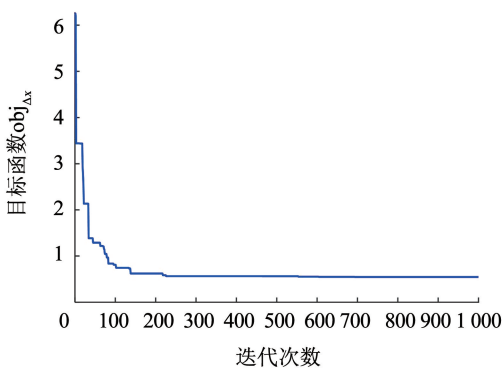


图 12 花朵授粉算法求解参数区间半径
Fig. 12 Interval radius iteration curve of FPA

表 3 空间桁架结构修正前、后参数区间(工况 1)

Tab. 3 Initial and updated parameters interval of space truss structure (case 1)

修正参数	E_1 区间中	E_2 区间中	d 区间中	E_1 区间半	E_2 区间半	d 区间半
	点/GPa	点/GPa	点/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	径/GPa	径/GPa	径/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
设定值	210	190	7 800	3	2	60
有限元值	231	209	7 020	—	—	—
修正值	210.054	189.936	7 801.451	2.986	1.938	59.601
相对误差/%	2.571×10^{-2}	3.368×10^{-2}	1.860×10^{-2}	0.467	3.100	0.665

表 4 空间桁架结构修正前、后参数区间(工况 2)

Tab. 4 Initial and updated parameters interval of space truss structure (case 2)

修正参数	E_1 区间/GPa	E_2 区间/GPa	d 区间/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
设定值	[204,216]	[185,195]	[7 600,8 000]
修正值	[204.559,216.835]	[185.158,194.786]	[7 616.061,8 008.036]
相对误差/%	[0.274,0.387]	[0.085,0.110]	[0.211,0.101]

由表 3、4 可以看出,对两种工况参数区间修正的相对误差值都较小,表明所提两步修正方法取得

很好的效果,且在不同试验响应区间下对参数区间的修正具有鲁棒性。进一步验证修正效果,使用表 3、4 中修正后的结构参数区间分别抽取 100 个样本计算两种工况修正后的有限元模型 FRF 和响应特征量。其中,工况 2 的 FRF 区间收敛如图 13 所示,计算工况 1 修正后的有限元模型第 8 和第 16 响应特征量样本与试验模型响应特征量数据比较的散点如图 14 所示。从图 13、14 可以看出,修正后的有限元模型和试验模型的 FRF 区间及响应特征量区间样本吻合良好。

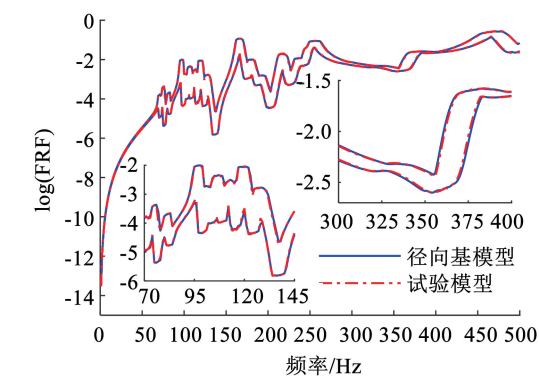


图 13 频响函数区间收敛

Fig. 13 Interval convergence of FRF

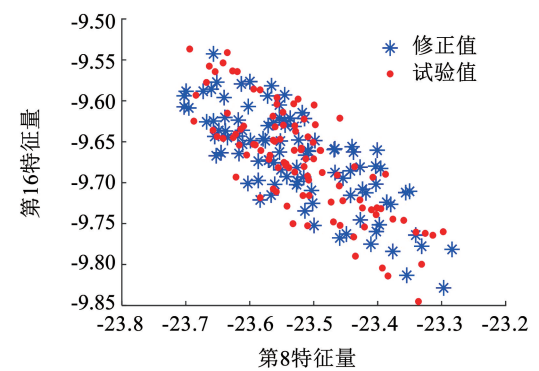


图 14 响应特征量区间散点图

Fig. 14 Scatter plot of response characteristics interval

6.2.2 同步修正

根据所提同步修正方法,使用与两步修正相同的仿真试验数据来同时求解参数区间中点和半径。其中,工况 1 结构参数区间中点和半径同步修正的迭代情况如图 15 所示。两种工况的结构参数修正结果分别见表 5、6。

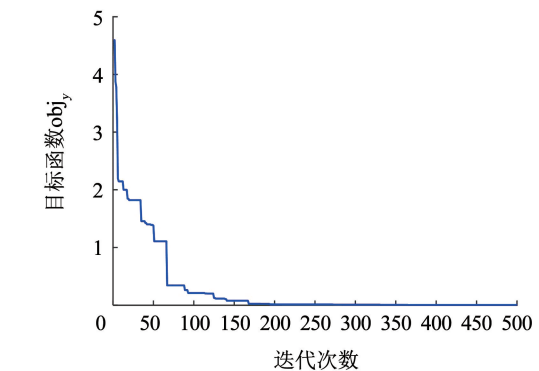


图 15 花朵授粉算法同时求解参数区间中点和半径

Fig. 15 Interval midpoint and radius iteration curve of FPA

由表 5、6 可以看出,在两种工况下同步修正参数区间的相对误差值都较小,表明在不同试验响应区间下对参数区间的修正具有鲁棒性,说明所提同步修正方法与两步修正方法具有相同的效果。再由图 11、12 和图 15 相比可以看出,同步修正参数区间

迭代 350 次之前就已收敛,而两步修正参数区间的第 2 步迭代收敛就需 500 次以上,因此在时间上同步修正相比两步修正节省了许多。同样进一步验证修正效果,使用表 5、6 修正参数区间分别抽取 100 个样本计算修正后两种工况的 FRF 和响应特征量。工况 2 的 FRF 区间收敛如图 16 所示,计算工况 1 修正后的有限元模型第 8 和第 16 响应特征量样本与试验模型响应特征量数据比较的散点如图 17 所示。从图 16、17 可以看出,修正后的有限元模型与试验模型的 FRF 区间和响应特征量区间样本同样吻合良好。

表 5 空间桁架结构修正前、后参数区间(工况 1)

Tab. 5 Initial and updated parameters interval of space truss structure (case 1)

	E_1 区间	E_2 区间	d 区间	E_1 区间	E_2 区间	d 区间
修正参数	中点/ GPa	中点/ GPa	中点/ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	半径/ GPa	半径/ GPa	半径/ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
设定值	210	190	7 800	3	2	60
有限元值	231	209	7 020	—	—	—
修正值	209.759	189.876	7 795.322	2.971	1.897	62.655
相对误差/ %	0.115	6.526×10^{-2}	5.997×10^{-2}	0.967	5.150	4.425

表 6 空间桁架结构修正前、后参数区间(工况 2)

Tab. 6 Initial and updated parameters interval of space truss structure (case 2)

修正参数	E_1 区间/GPa	E_2 区间/GPa	d 区间/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
设定值	[204,216]	[185,195]	[7 600,8 000]
修正值	[204.099,216.464]	[185.528,194.902]	[7 609.196,7 997.666]
相对误差/%	[0.049,0.215]	[0.285,0.050]	[0.121,0.029]

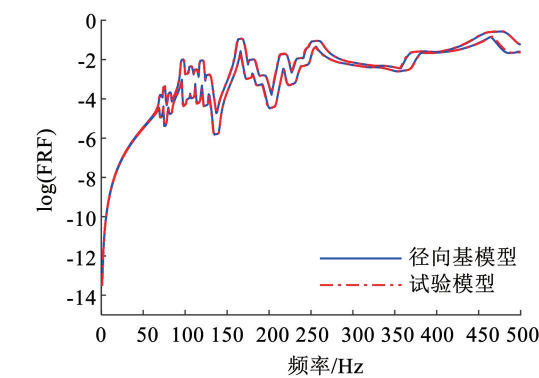


图 16 频响函数区间收敛

Fig. 16 Interval convergence of FRF

6.3 试验算例

如图 18 所示,对长 2 000 mm,宽 100 mm,高 10 mm 的简支梁结构进行试验研究。该梁材料为 Q235 钢,将其划分为 20 个单元和 21 个节点。选择 16 节点为激励位置,选择 5、8、11、14、和 17 节点为测量

位置。选择结构弹性模量 E 和材料密度 d 的区间中点及半径为结构待修正参数。根据 Q235 钢材料参数范围,设置初始有限元模型 E 和 d 的区间中点分别为 205 GPa 和 7 850 kg/m³。

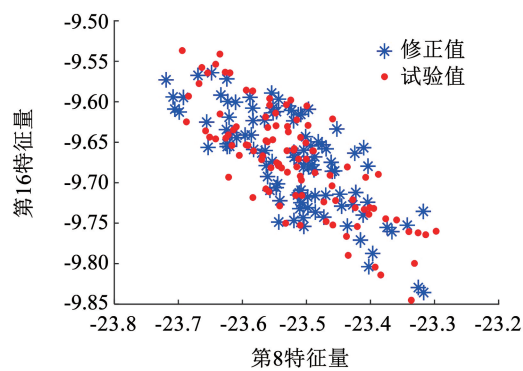


图 17 响应特征量区间散点图

Fig. 17 Scatter plot of response characteristics interval

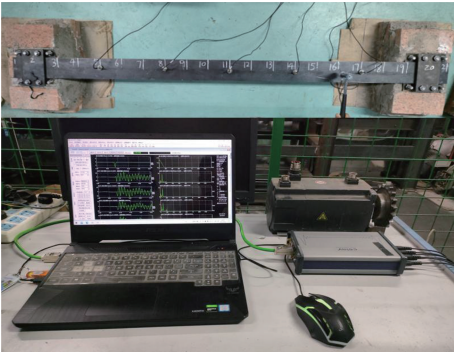


图 18 简支梁

Fig. 18 Simply supported beam

测试试验过程通过东方所的 DASP 软件进行 50 次试验,设置采样通道为 6,采样频率为 4 000 Hz,采样点数为 4 096,直接采集加速度响应数据和加速度 FRF 数据。图 19 给出了一次试验的 16 节点激励与 11 节点响应的加速度响应曲线,图 20 给出了 16 节点激励与 11 节点响应的初始有限元模型和实际测量的加速度 FRF 中值曲线。

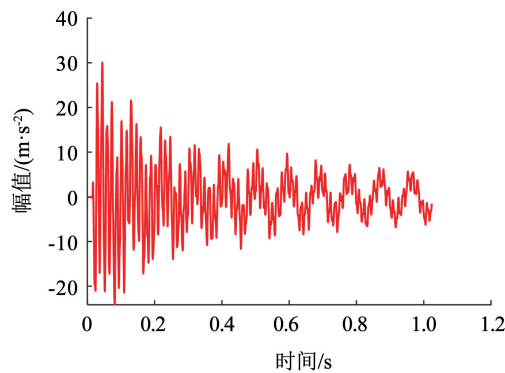


图 19 实测加速度响应

Fig. 19 Measured acceleration response

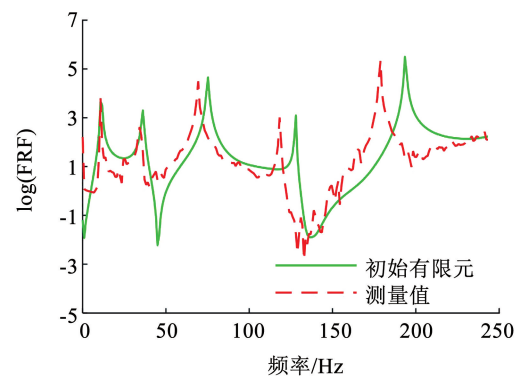


图 20 加速度频响函数

Fig. 20 Acceleration FRF

6.3.1 两步修正

本试验算例中选择 250 个频率点,设定分解层数为 4。将 16 节点激励与 11 节点响应的加速度 FRF 经过小波变换并提取第 4 层低频小波系数作为试验响应特征量,通过灰色数学方法评估试验响应特征量区间。然后按照两步修正过程,通过 FPA 第 1 步迭代求解结构参数区间中点,第 2 步迭代求解待修正参数的区间半径,修正后结果见表 7。

表 7 简支梁修正后的参数值

Tab. 7 Parameters of simply supported beam after updating		
修正参数	E 区间/GPa	d 区间/(kg · m ⁻³)
初始区间中点	205	7 850
修正后区间	[186.706,194.250]	[8 251.953,8 456.729]
区间中点修正率/%	7.084	6.420

为验证修正效果,使用表 7 中修正后的结构参数区间抽取 50 个样本计算修正后的有限元模型加速度 FRF。图 21 给出了 16 节点激励与 11 节点响应的修正前、后的有限元模型加速度 FRF 中值曲线和试验加速度 FRF 中值曲线,从图 21 可以看出修正后的有限元模型加速度 FRF 中值曲线和试验加速度 FRF 中值曲线大致吻合。图 22 给出了 16 节点激励与 11 节点响应的加速度 FRF 区间收敛,从图 22 可以看出修正后的有限元模型加速度 FRF 区间与试验加速度 FRF 区间大致吻合。

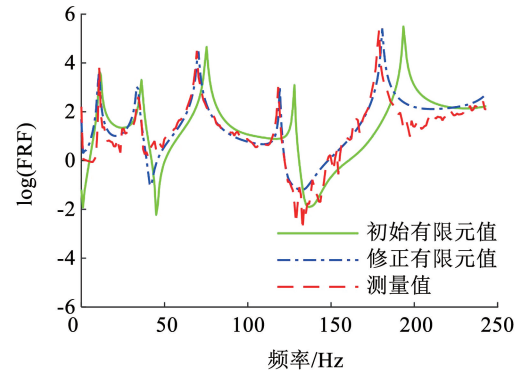


图 21 加速度频响函数

Fig. 21 Acceleration FRF

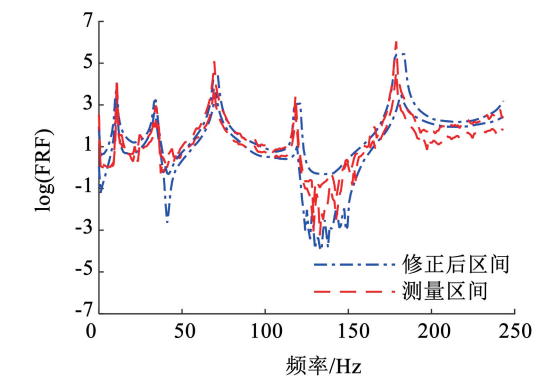


图 22 频响函数区间收敛

Fig. 22 Interval convergence of FRF

为进一步验证修正效果,测量不同位置的加速度 FRF 与修正后的有限元模型相对应位置的加速度 FRF 进行比较。图 23 给出了 16 节点激励与 17 节点响应的修正前、后有限元模型加速度 FRF 中值曲线和试验加速度 FRF 中值曲线,从图 23 可以看出修正后的有限元模型加速度 FRF 中值曲线与试验加速度 FRF 中值曲线大致吻合。图 24 给出了 16 节点激励与 17 节点响应的修正后有限元模型加速度 FRF 区间收敛和试验加速度 FRF 区间收敛。从图 24 可以看出,修正后的有限元模型加速度 FRF 区间和试验加速度 FRF 区间大致吻合。综上所述,验证了所提两步进行区间有限元模型修正的有效性。

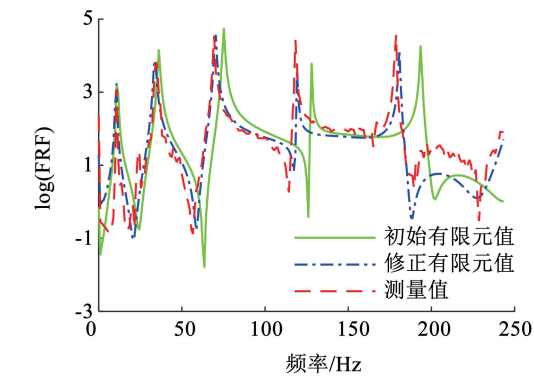


图 23 加速度频响函数

Fig. 23 Acceleration FRF

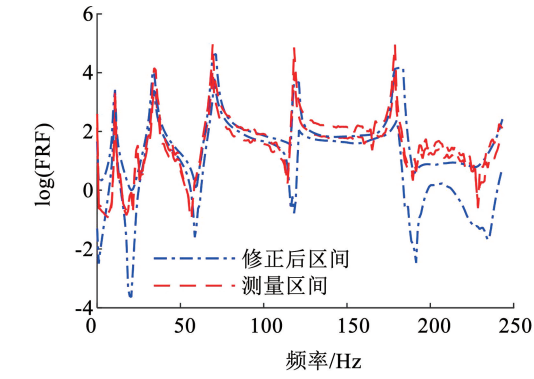


图 24 频响函数区间收敛

Fig. 24 Interval convergence of FRF

6.3.2 同步修正

按照所述同步修正过程,使用与两步修正相同的试验数据,通过 FPA 同时迭代求解结构参数区间中点和半径,修正后的结果见表 8。

表 8 简支梁结构修正后的参数值

Tab. 8 Parameter values of simply supported beam structure after updating

修正参数	E 区间/GPa	d 区间/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
初始区间中点	205	7 850
修正后区间	[187.668,196.964]	[8 394.221,8 642.139]
区间中点修正率/%	6.187	8.512

同样为验证修正效果修正,使用表 8 中修正后的结构参数区间抽取 50 个样本计算修正后的有限元模型加速度 FRF。图 25、26 分别给出了 16 节点激励与 11 节点响应的有限元模型与试验加速度 FRF 中值曲线和区间收敛,从图 25、26 可以看出修正后的有限元模型与试验加速度 FRF 中值曲线和区间大致吻合。

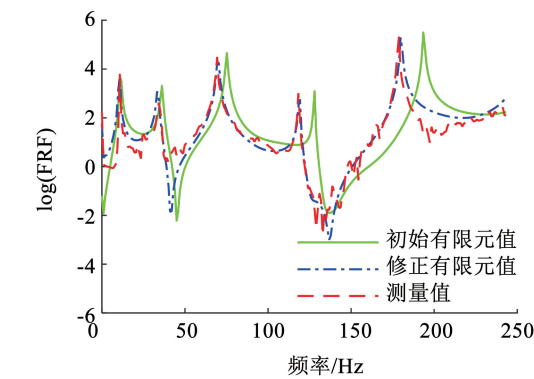


图 25 加速度频响函数

Fig. 25 Acceleration FRF

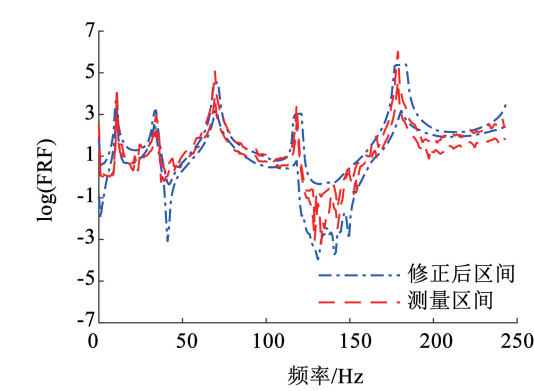


图 26 频响函数区间收敛

Fig. 26 Interval convergence of FRF

同样为进一步验证修正效果,测量不同位置的加速度 FRF 进行比较,图 27、28 分别给出了 16 节点激励与 17 节点响应的有限元模型与试验加速度 FRF 中值曲线和区间收敛,可以看出修正后的有限

元模型与试验加速度 FRF 中值曲线和区间大致吻合。综上所述,验证了所提同步进行区间有限元模型修正的有效性。

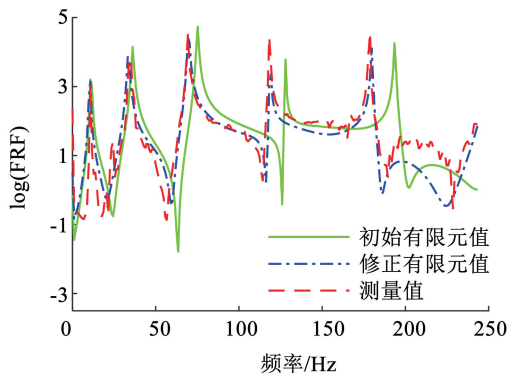


图 27 加速度频响函数

Fig. 27 Acceleration FRF

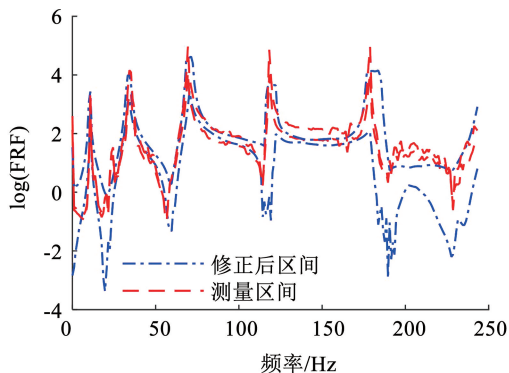


图 28 频响函数区间收敛

Fig. 28 Interval convergence of FRF

7 结 论

1) 考虑参数不确定性对于结构响应的影响,提出了以结构参数区间中点和半径为修正目标的两步和同步的区间模型修正方法,可以较好地修正结构参数的区间中点和半径,且在不同试验响应区间下对参数区间的修正都具有鲁棒性。同时,可以有效地解决试验小样本的不确定性模型修正问题。

2) 算例表明,两步和同步修正都可以达到相同的效果,且在迭代求解过程中表征区间进行模型修正的参数样本量较小,提高了模型修正效率。但在时间上同步修正相比两步修正节省了许多。

3) 在使用参数样本参与不确定性模型修正时构造了 RBF 模型,并采用 WOA 优选了 RBF 模型的方差值,使所构造的 RBF 模型具有良好的拟合精度和预测能力,能代替有限元模型进行迭代计算,提高模型修正效率。

4) 将加速度 FRF 经过小波变换,提取低频小波系数作为区间模型修正的响应特征量,具有保留

FRF 特性的优点,且可以大量减少输出响应数目,提高了模型修正计算效率。

参考文献

- [1] JIN S S, JUNG H J. Sequential surrogate modeling for efficient finite element model updating[J]. Computers & Structures, 2016, 168: 30. DOI: 10.1016/j.compstruc.2016.02.005
- [2] 陈光宋, 钱林方, 王明明, 等. 基于统计信息的多体系统区间不确定性分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(8): 117
CHEN Guangsong, QIAN Linfang, WANG Mingming, et al. An interval analysis method based on statistical information for a multibody system with uncertainty[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(8): 117. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2019.08.018
- [3] 陈学前, 沈展鹏, 刘信恩. 基于响应面与灵敏度分析的区间不确定性参数识别方法[J]. 振动与冲击, 2019, 38(16): 267
CHEN Xueqian, SHEN Zhanpeng, LIU Xin'en. A method of interval uncertain parameter identification based on a response surface model and sensitivity analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(16): 267. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2019.16.038
- [4] 杨修铭, 郭杏林, 李东升. 基于 Kriging 模型的频响函数有限元模型修正方法[J]. 计算力学学报, 2018, 35(4): 487
YANG Xiuming, GUO Xinglin, LI Dongsheng. Kriging model based finite element model updating method using frequency response function[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2018, 35(4): 487. DOI: 10.7511/jslx20170303001
- [5] 魏锋涛, 卢凤仪, 郑建明. 基于多策略的改进径向基代理模型方法[J]. 计算机集成制造系统, 2019, 25(3): 764
WEI Fengtao, LU Fengyi, ZHENG Jianming. Augmented radial basis function metamodel method based on multi-strategy[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2019, 25(3): 764. DOI: 10.13196/j.cims.2019.03.023
- [6] CHEN Xueqian, SHEN Zhanpeng, LIU Xin'en. A copula-based and Monte Carlo sampling approach for structural dynamics model updating with interval uncertainty[J]. Shock and Vibration, 2018, 2018: 1. DOI: 10.1155/2018/3958016
- [7] DENG Zhongmin, GUO Zhaopu, ZHANG Xuede. Non-probabilistic set-theoretic models for transient heat conduction of thermal protection systems with uncertain parameters[J]. Applied Thermal Engineering, 2016, 95: 10. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2015.10.152
- [8] ZHENG Bowen, YU Kaiping, LIU Shuaishuai, et al. Interval model updating using universal grey mathematics and Gaussian process regression model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 141: 106455. DOI: 10.1016/j.ymssp.2019.106455
- [9] SHI Qinghe, WANG Xiaojun, WANG Ruixing. An interval updating model for composite structures optimization[J]. Composite Structures, 2019, 209: 177. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.10.055
- [10] FANG Shengen, ZHANG Qiuhe, REN Weixin. An interval model updating strategy using interval response surface models[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2015, 60/61: 909. DOI: 10.1016/j.ymssp.2015.01.016
- [11] 骆勇鹏, 黄方林, 韩建平, 等. 灵敏度的模态区间分析方法及其在不确定性参数识别中的应用[J]. 振动工程学报, 2016, 29(4): 577