

DOI:10.11918/202404062

脱靶量及其变化率双重加权的微分对策制导律

花文华^{1,2}, 李群生^{1,2}, 张拥军^{1,2}, 张金鹏^{1,2}

(1. 中国空空导弹研究院, 河南 洛阳 471009; 2. 空基信息感知与融合全国重点实验室, 河南 洛阳 471009)

摘要: 为进一步增强导弹飞行弹道的收敛速度, 定义末端的脱靶量和脱靶量变化率作为性能优化指标, 并基于线性二次型微分对策理论进行了制导律的推导, 推导结果实现了减少脱靶量的同时向着最大化脱靶量收敛速度的方向上进行控制的目的。本研究从一般意义上进行导弹和目标控制系统动态特性的建模, 适用于二者具有高阶控制系统动态特性的形式, 推导结果具有一般性。针对导弹和目标具有一阶控制系统动态特性的情况, 进行了制导律的扩展, 并相应完成了对策空间的分析和典型制导参数的取值分析。非线性系统仿真针对比例导引、典型微分对策制导律和本研究所提出的脱靶量及其变化率双重加权的微分对策制导律进行了对比分析, 仿真情形包括目标常值机动、S型机动和随机机动3种情形, 并采用单发命中概率作为制导性能衡量指标。结果表明, 所提出制导律的弹道快速收敛性能和低过载需求, 在最小化脱靶量的同时最大化脱靶量的收敛速度, 实现了在拦截导弹飞行弹道快速收敛的方向上进行控制的目的。

关键词: 制导律; 高阶控制系统动态特性; 飞行弹道特性; 微分对策制导; 末制导

中图分类号: V448.133

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2025)04-0031-09

Dual-weighted differential game guidance law for miss distance and its rate of change

HUA Wenhua^{1,2}, LI Qunsheng^{1,2}, ZHANG Yongjun^{1,2}, ZHANG Jinpeng^{1,2}

(1. China Airborne Missile Academy, Luoyang 471009, Henan, China; 2. National Key Laboratory of Air-based Information Perception and Fusion, Luoyang 471009, Henan, China)

Abstract: To further improve the rate of trajectory convergence, terminal miss distance and miss distance rate are defined as performance index for guidance law derivation based on linear quadratic differential game theory. The derivation results realize the control purpose of minimizing miss distance while maximizing miss distance convergence rate. The control systems of intercept missile and its target are modeled in a general sense, applicable to forms where both exhibit higher-order dynamic characteristics. The derived guidance law has a wide general adaptability. The proposed guidance law is extended to the typical situation of missile and its target with one-order control system dynamics. A comparative analysis of nonlinear system simulations has been performed for proportional navigation, conventional differential game guidance law, and the dual-weighted differential game guidance law proposed in this study. The simulation scenarios include three types of maneuvers: constant-maneuvering, S-type maneuvering and random starting maneuvering of target. The single shot kill probability is used for guidance performance evaluation. The simulation results show the advantages of fast trajectory convergence rate and low acceleration requirements of the proposed guidance law. The proposed guidance law minimizes the miss distance while maximizing the trajectory convergence rate of the miss distance, achieving the control purpose of fast trajectory convergence of interception missile.

Keywords: guidance law; high-order controlled missile; flight trajectory performance; differential game guidance; terminal guidance

导弹控制系统动态特性表征了控制指令到产生实际加速度的延迟特性。该延迟特性会以产生瞬时脱靶量或视线法向上的角速度的形式, 带来脱靶量和控制量的增加, 因此先进的制导律一般都会将被控制对象的动态特性考虑到制导律的设计当中, 如

最优制导律考虑了导弹的一阶控制系统动态特性, 微分对策制导律则同时考虑了导弹和目标的控制系统动态特性。为简化推导过程而得到制导律的解析解, 一般会将被控对象的动态特性进行简化, 合理的简化有利于过程设计, 但当被控对象的动态特性复

收稿日期: 2024-04-24; 录用日期: 2024-07-19; 网络首发日期: 2025-03-14

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/23.1235.T.20250314.1126.008>

基金项目: 航空科学基金(201901012009)

作者简介: 花文华(1983—), 博士, 高级工程师

通信作者: 花文华, huawh6611@126.com

杂,过于简化,也会带来额外的控制偏差。

为了增强对导弹控制系统的适应性,许多文献[1-5]开展了这方面的研究工作。文献[1]假设目标是静止的,给出了一种具有终端碰撞角度约束且适用于任意阶控制系统动态特性导弹的最优制导律。文献[2]考虑任意阶导弹机动动态,给出了一种满足终端角度约束的微分对策制导律,但在具体的推导过程中,为得到解析解,假设拦截导弹和目标具有理想机动动态,使得最终的结果并不适用于具有高阶控制系统动态特性的拦截导弹和目标的情形。文献[3]基于微分对策双边优化理论,给出了一种解析的一般形式线性二次型微分对策制导律,可适用于具有高阶控制系统动态特性的拦截导弹和目标的系统综合分析。文献[4]考虑载机-多防御导弹-多来袭导弹的对抗情形,给出了一种武器目标分配方法和一种适用于多对象间对抗的最优协同策略,且不受限于被控对象线性控制系统的阶次。文献[5]假设拦截弹和目标具有一般控制系统动态特性,从控制脱靶量上界而非脱靶量最小化的角度,提出了一种线性二次型最优制导律。上述文献都仅以脱靶量作为控制目标,本文基于微分对策理论,将脱靶量和脱靶量变化率同时考虑到线性二次型性能指标当中,所推导的制导律在最小化脱靶量的同时最大化脱靶量的收敛速度,实现了在拦截导弹飞行弹道快速收敛的方向上进行控制的目的。该制导律同样适用于拦截导弹和目标具有高阶控制系统动态特性的形式。

本文首先对所要研究的问题进行描述和建模,给出具有高阶控制系统动态特性的拦截导弹和目标的状态方程。然后,进行一般形式脱靶量及其变化率双重加权的微分对策制导律的推导,给出解析解。其次,针对拦截导弹具有一阶控制系统形式进行制导律的扩展,给出制导增益和对策空间分析,以及关键参数的取值分析。最后,通过非线性系统仿真验证和对比多种制导律的拦截性能,给出结论。

1 问题描述与建模

制导末端导弹和目标的相对运动关系如图 1 所示, X 轴沿初始视线方向, a 、 v 和 γ 分别为加速度、飞行速度和航向角,下标 P 和 E 分别为导弹和目标的状态。图 1 中 y 为导弹和目标之间的相对位移, λ 为视线角,初始值为 λ_0 ,其变化率 $\dot{\lambda}$ 为视线角速度, r 为弹目距离,其变化率 \dot{r} 为接近速度。

基于下述假设进行问题的分析:1) 导弹和目标可视为质点,弹目间的相对运动关系可沿初始视线方向进行线性化,速度大小近似保持不变。2) 导弹和目标的控制系统是可线性化且满足最小相位特性。

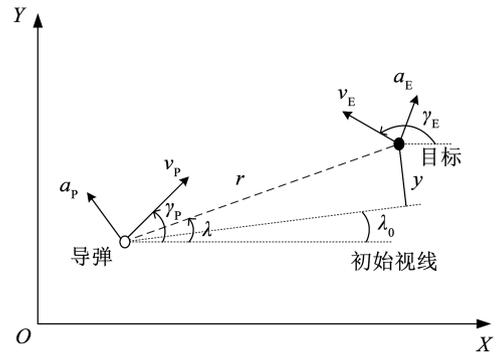


图 1 平面弹目相对运动关系

Fig. 1 Planar engagement geometry

文献[6]验证了上述末制导段线性化假设在机动目标拦截上的有效性和可行性,本文还将通过非线性系统仿真对基于上述假设的推导结果进行验证。

假设导弹和目标控制系统的阶次分别为 $n_p \geq 0$ 和 $n_e \geq 0$,且结合假设式(2)将其建模为式(1)所示的一般形式,下标 $i = P, E$ 分别对应导弹和目标:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_i(t) \\ \dot{p}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i^{11} & a_i^{12} \\ a_i^{21} & a_i^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i(t) \\ p_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_i^1 \\ b_i^2 \end{bmatrix} u_i(t) \quad (1)$$

式中: a_i, p_i 分别为加速度和其余的 $n_i - 1$ 个控制系统状态变量, a_m^{11}, b_m^1 为标量, $a_i^{21}, (a_i^{12})^T, b_i^2 \in \mathbf{R}^{n_i-1}$ 为向量,矩阵 $a_i^{22} \in \mathbf{R}^{(n_i-1) \times (n_i-1)}$, $b_i^1, b_i^2 \geq 0$ 满足控制系统最小相位特性假设, u_i 为控制指令。由于假设控制系统是线性的,导弹和目标的控制系统总可以写成式(1)所示的形式,从而进行后续推导。文献[7]给出了另外一种建模高阶控制系统的形式,加速度并非状态变量,与式(1)可等价转换,但后续推导表明本文采取的建模方式更容易得到解析解。

基于图 1 和假设式(1),导弹和目标相对运动关系分别可近似表示为:

$$\dot{y}(t) = v(t) \quad (2)$$

$$\dot{v}(t) = a_E(t) - a_P(t) \quad (3)$$

基于假设式(1), $\cos(\gamma_{i0} - \lambda_0) \approx 1$,其中 $i = P, E$,进一步选取状态变量 $x = [y \ v \ a_P \ p_P \ a_E \ p_E]^T$,则导弹与目标间的相对运动方程可近似写成以下线性化形式:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_P u_P(t) + \mathbf{B}_E u_E(t) \quad (4)$$

$$\text{式中: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_P^{11} & a_P^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_P^{21} & a_P^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_E^{11} & a_E^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_E^{21} & a_E^{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_E = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ d_2]^T。$$

基于上文假设式(1)、(2),导弹的飞行时间可

近似为

$$t_f = r_0/v_c \quad (5)$$

式中: r_0 为导弹和目标的初始距离, v_c 为接近速度。假设当前时刻为 t , 则剩余飞行时间 t_{go} 可表示为

$$t_{go} = t_f - t \quad (6)$$

2 制导律的推导

2.1 制导方法的选取分析

比例导引法 (proportional navigation, PN) 是应用最广泛的制导律形式, 在接近速度为负的情况下, 总是在控制导弹减少视线角速度的方向上运动, 力图通过构建一个导弹-目标-命中点的碰撞三角形, 实现对目标的毁伤。比例导引法具有广泛的衍生形式, 典型形式包括扩展比例导引 (augmented proportional navigation, APN)、最优制导律 (optimal guidance law, OGL) 和微分对策制导律 (differential game guidance law, DGL)^[8-11]。这些典型制导律都可认为是 PN 的扩展或衍生形式, 称为比例导引类制导律, 它们在基本形式上都可以写为如下式所示的形式:

$$a_{mc} = N(t) \frac{z(t)}{t_{go}^2} \quad (7)$$

式中: N 为有效导航比, z 为瞬时脱靶量。比例导引类制导律之间的区别主要在 N 和 z 的计算上。

APN、OGL 和 DGL 等典型形式都包括一个比例导引部分或与视线角速度相关的部分: $z = y + \dot{y}t_{go}$ ($z \approx t_{go}^2 |\dot{r}| \dot{\lambda}$), 而由于考虑了目标的机动, 导弹和目标的控制系统动态特性等, 瞬时脱靶量 z 具有了不同的组成形式。瞬时脱靶量与视线角速度具有近似关系, 因此如果能够调整 z 的收敛速度, 将能够促进视线角速度的收敛。瞬时脱靶量表达式 z 中 y 表示导弹和目标之间的相对位移, 而 \dot{y} 则决定了 z 的收敛速度。本文的设计目标为最小化 y 的同时最大化 \dot{y} , 并通过控制参数的合理选取, 实现在促进视线角速度快速收敛, 进而飞行弹道快速收敛的方向上进行控制的目的。

2.2 性能指标定义

微分对策制导律是应对弹目追逃问题最为有效的形式, 并不需要对目标的机动方式进行假设, 且理论上可以提供设计指标下的导弹最优制导控制策略和目标最优逃逸策略, 以及表征脱靶量或其他终端约束的鞍点解或对策解。文献[12-13]的研究结果表明, 微分对策制导律具有一个保证较小脱靶量的捕获区域, 且对目标信息的估计误差具有更强的鲁棒性。

定义线性二次型性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{G} \mathbf{x}(t_f) +$$

$$\frac{1}{2} \int_t^{t_f} [u_p^T(\tau) u_p(\tau) - u_E^T(\tau) \eta u_E(\tau)] d\tau \quad (8)$$

式中: \mathbf{G} 、 η 为加权设计参数, $\eta > 0$, $\mathbf{G} = \text{diag}(g_y, g_v, 0, 0, 0, 0)$ 。采用 g_y 、 g_v , 同时对脱靶量及其变化率进行加权, $g_y \rightarrow \infty$ 为零脱靶量拦截情形, 脱靶量趋于零, $g_y < \infty$ 时脱靶量为非零的有限值; g_v 是对脱靶量变化率的加权, $g_v < 0$, 期望最小化脱靶量的同时提升脱靶量的收敛速度; η 反映了目标相对于导弹的机动能力, 当假设目标具有较强的机动能力时, η 取较小值, $\eta \rightarrow \infty$ 则表示对非机动目标的拦截情形, 假设导弹机动能力大于目标, $\eta > 1$ 。

2.3 一般形式制导律的推导

结合式(4)和式(8), 构造哈密尔顿 (Hamilton) 函数:

$$H = \frac{1}{2} u_p^T u_p - \frac{1}{2} \eta u_E^T u_E + \mathbf{p}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_p u_p(t) + \mathbf{B}_E u_E(t)) \quad (9)$$

式中 \mathbf{p} 为待定的协态向量。

由协态方程可以得到:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t) \quad (10)$$

进一步求解可以得到:

$$\mathbf{p}(t) = \Phi^T(t_f, t) \mathbf{p}(t_f) \quad (11)$$

式中 Φ 为相应于系统(4)的状态转移矩阵。结合横截条件, 可以得到:

$$\mathbf{p}(t) = \Phi^T(t_f, t) \mathbf{G} \mathbf{x}(t_f) \quad (12)$$

由上述条件, 可以得到导弹和目标的最优控制量分别为:

$$\frac{\partial H}{\partial u_p} = 0 \Rightarrow u_p^* = -\mathbf{B}_p^T \Phi^T(t_f, t) \mathbf{G} \mathbf{x}(t_f) \quad (13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_E} = 0 \Rightarrow u_E^* = \eta^{-1} \mathbf{B}_E^T \Phi^T(t_f, t) \mathbf{G} \mathbf{x}(t_f) \quad (14)$$

将式(13)、(14)代入式(4), 并从 t 到 t_f 进行积分, 经进一步简化后, 可以得到:

$$\mathbf{x}(t_f) = \frac{\Phi(t_f, t) \mathbf{x}(t)}{I + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) (\mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^T - \eta^{-1} \mathbf{B}_E \mathbf{B}_E^T) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{G} d\tau} \quad (15)$$

由式(4)并经拉氏反变换, 可以得到:

$$\begin{aligned} \Phi(t_f, t) \mathbf{B}_p &= L^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})_{t_{go}}^{-1} \mathbf{B}_p = L^{-1} \left(\frac{\mathbf{x}(s)}{u_p(s)} \right)_{t_{go}} = \\ L^{-1} \left[\frac{y(s)}{u_p(s)} \frac{v(s)}{u_p(s)} \frac{a_p(s)}{u_p(s)} \frac{p_p(s)}{u_p(s)} \frac{a_E(s)}{u_p(s)} \frac{p_E(s)}{u_p(s)} \right]_{t_{go}}^T &= \\ [-\kappa_{p1} \quad -\kappa_{p2} \quad \kappa_{p3} \quad \kappa_{p4} \quad 0 \quad 0]^T & \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t_f, t) \mathbf{B}_E &= L^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})_{t_{go}}^{-1} \mathbf{B}_E = L^{-1} \left(\frac{\mathbf{x}(s)}{u_E(s)} \right)_{t_{go}} = \\ L^{-1} \left[\frac{y(s)}{u_E(s)} \frac{v(s)}{u_E(s)} \frac{a_m(s)}{u_E(s)} \frac{p_m(s)}{u_E(s)} \frac{a_i(s)}{u_E(s)} \frac{p_i(s)}{u_E(s)} \right]_{t_{go}}^T &= \\ [\kappa_{E1} \quad \kappa_{E2} \quad 0 \quad 0 \quad \kappa_{E5} \quad \kappa_{E6}]^T & \quad (17) \end{aligned}$$

式中: L^{-1} 为拉氏反变换, $k_{P1} \sim k_{P4}$ 、 k_{E1} 、 k_{E2} 、 k_{E5} 、 k_{E6} 为中间参量, 满足 $\kappa_{P1} = L^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{u_P(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{P2} = L^{-1} \left(\frac{1}{s} \frac{a_P(s)}{u_P(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{P3} = L^{-1} \left(\frac{a_P(s)}{u_P(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{P4} = L^{-1} \left(\frac{p_P(s)}{u_P(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{E1} = L^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{u_E(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{E2} = L^{-1} \left(\frac{1}{s} \frac{a_E(s)}{u_E(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{E5} = L^{-1} \left(\frac{a_E(s)}{u_E(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{E6} = L^{-1} \left(\frac{p_E(s)}{u_E(s)} \right) \Big|_{t_{go}}$; $a_P(s)/u_P(s)$ 、 $a_E(s)/u_E(s)$ 分别为导弹和目标控制系统的传递函数。

定义 1 $D_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, 可以得到:

$$\begin{aligned} \kappa_y(t_f, t) &= D_y \Phi(t_f, t) = D_y L^{-1} \left[\begin{array}{c} X(s) \\ x(0) \end{array} \right] \Big|_{t_{go}} = \\ L^{-1} \left[\begin{array}{cccccc} \gamma(s) & \gamma(s) & \gamma(s) & \gamma(s) & \gamma(s) & \gamma(s) \\ \gamma(0) & v(0) & a_P(0) & p_P(0) & a_E(0) & p_E(0) \end{array} \right] \Big|_{t_{go}} &= \\ [1 \ t_{go} &- \kappa_{y3} \ - \kappa_{y4} \ \kappa_{y5} \ \kappa_{y6}] \end{aligned} \quad (18)$$

式中: $\kappa_{y3} = L^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{a_P(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{y4} = L^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{p_P(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{y5} = L^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{a_E(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{y6} = L^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{p_E(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$ 为中间参量; $a_P(s)/u_P(0)$ 、 $a_E(s)/u_E(0)$ 分别为导弹和目标加速度对于初始状态的响应, $a_P(s)/p_P(0)$ 、 $a_E(s)/p_E(0)$ 分别为导弹和目标对于其他相关初始状态的响应。

定义 2 $D_v = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, 可以得到:

$$\begin{aligned} \kappa_v(t_f, t) &= D_v \Phi(t_f, t) = D_v L^{-1} \left[\begin{array}{c} X(s) \\ x(0) \end{array} \right] \Big|_{t_{go}} = \\ L^{-1} \left[\begin{array}{cccccc} v(s) & v(s) & v(s) & v(s) & v(s) & v(s) \\ \gamma(0) & v(0) & a_P(0) & p_P(0) & a_E(0) & p_E(0) \end{array} \right] \Big|_{t_{go}} &= \\ [0 \ 1 &- \kappa_{v3} \ - \kappa_{v4} \ \kappa_{v5} \ \kappa_{v6}] \end{aligned} \quad (19)$$

式中: $\kappa_{v3} = L^{-1} \left(\frac{1}{s} \frac{a_P(s)}{a_P(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{v4} = L^{-1} \left(\frac{1}{s} \frac{a_P(s)}{p_P(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{v5} = L^{-1} \left(\frac{1}{s} \frac{a_E(s)}{a_E(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$, $\kappa_{v6} = L^{-1} \left(\frac{1}{s} \frac{a_E(s)}{p_E(0)} \right) \Big|_{t_{go}}$ 为中间参量。

将式(16)~(19)代入式(15), 并进一步推导, 可以得到:

$$y(t_f) = \frac{\left(1 + g_v \int_t^{t_f} c_{22} d\tau\right) z_y - \left(g_v \int_t^{t_f} c_{12} d\tau\right) z_v}{1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11} + g_v c_{22} + g_y g_v c_{11} c_{22} - g_y g_v c_{21} c_{12}) d\tau} \quad (20)$$

$$v(t_f) = \frac{\left(1 + g_y \int_t^{t_f} c_{11} d\tau\right) z_v - \left(g_y \int_t^{t_f} c_{21} d\tau\right) z_y}{1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11} + g_v c_{22} + g_y g_v c_{11} c_{22} - g_y g_v c_{21} c_{12}) d\tau} \quad (21)$$

式中: $c_{11} = g_y (\kappa_{P1}^2 - \eta^{-1} \kappa_{E1}^2)$, $c_{12} = g_v (\kappa_{P1} \kappa_{P2} - \eta^{-1} \kappa_{E1} \kappa_{E2})$,

$c_{21} = g_y (\kappa_{P1} \kappa_{P2} - \eta^{-1} \kappa_{E1} \kappa_{E2})$, $c_{22} = g_v (\kappa_{P2}^2 - \eta^{-1} \kappa_{E2}^2)$, $z_y(t)$ 、 $z_v(t)$ 对应于导弹和目标由给定的时间 t 起不施加任何控制, 并以该瞬时的参数飞行至命中, 所产生的脱靶量和脱靶量变化率, 称为零控脱靶量和零控脱靶量变化率, 采用下式计算:

$$\begin{cases} z_y(t) = \kappa_y(t_f, t) \mathbf{x}(t) \\ z_v(t) = \kappa_v(t_f, t) \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (22)$$

将式(20)、(21)代入式(13)、(14), 可以得到导弹和目标一般形式的最优控制策略分别为:

$$u_{Pc}^* = \frac{N_{Py}}{t_{go}^2} z_y(t) + \frac{N_{Pv}}{t_{go}} z_v(t) \quad (23)$$

$$u_{Ec}^* = \frac{N_{Ey}}{t_{go}^2} z_y(t) + \frac{N_{Ev}}{t_{go}} z_v(t) \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} N_{Py} &= \frac{g_y \kappa_{P1} \left(1 + g_v \int_t^{t_f} c_{22} d\tau\right) - g_v g_y \kappa_{P2} \left(\int_t^{t_f} c_{21} d\tau\right)}{1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11} + g_v c_{22} + g_y g_v c_{11} c_{22} - g_y g_v c_{21} c_{12}) d\tau} t_{go}^2 \\ N_{Pv} &= \frac{g_v \kappa_{P2} \left(1 + g_y \int_t^{t_f} c_{11} d\tau\right) - g_y g_v \kappa_{P1} \left(\int_t^{t_f} c_{12} d\tau\right)}{1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11} + g_v c_{22} + g_y g_v c_{11} c_{22} - g_y g_v c_{21} c_{12}) d\tau} t_{go} \\ N_{Ey} &= \frac{g_y \eta^{-1} \kappa_{E1} \left(1 + g_v \int_t^{t_f} c_{22} d\tau\right) - g_y g_v \eta^{-1} \kappa_{E2} \left(\int_t^{t_f} c_{21} d\tau\right)}{1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11} + g_v c_{22} + g_y g_v c_{11} c_{22} - g_y g_v c_{21} c_{12}) d\tau} t_{go}^2 \\ N_{Ev} &= \frac{g_v \eta^{-1} \kappa_{E2} \left(1 + g_y \int_t^{t_f} c_{11} d\tau\right) - g_y g_v \eta^{-1} \kappa_{E1} \left(\int_t^{t_f} c_{12} d\tau\right)}{1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11} + g_v c_{22} + g_y g_v c_{11} c_{22} - g_y g_v c_{21} c_{12}) d\tau} t_{go} \end{aligned}$$

式中: N_{Py} 、 N_{Pv} 分别为导弹的制导增益, N_{Ey} 、 N_{Ev} 分别为目标的控制增益。

式(22)~(24)即构成了所推导的脱靶量及其变化率双重加权的微分对策制导律, 适用于高阶控制系统动态特性导弹的制导控制。

2.4 典型形式的制导律

制导律(23)适用于导弹具有高阶控制系统动态特性的情况, 而在实际应用中可以通过对控制系统的合理假设, 考虑传递函数主极点和零点的影响, 以及控制对象实际的气动力响应时间特性等, 实现合理的简化。基于导弹气动力参数的分析和自动驾驶仪的设计, 可以确定控制系统的响应时间, 如上升时间达到额定值 85% 所需的时间, 可以采用该响应时间近似得到控制系统的一阶响应特性。假设导弹和目标都具有一阶控制系统动态特性, 即:

$$\frac{a_P}{u_P} = \frac{1}{\tau_P s + 1} \quad (25)$$

$$\frac{a_E}{u_E} = \frac{1}{\tau_E s + 1} \quad (26)$$

式中, τ_P 、 τ_E 分别为导弹和目标的一阶控制系统时间

常数。

基于式(25)、(26),可以相应得到以下参数的典型形式:

$$k_{p1} = \tau_P (\exp(-t_{go}/\tau_P) + t_{go}/\tau_P - 1) \quad (27)$$

$$k_{p2} = 1 - \exp(-t_{go}/\tau_P) \quad (28)$$

$$k_{E1} = \tau_E (\exp(-t_{go}/\tau_E) + t_{go}/\tau_E - 1) \quad (29)$$

$$k_{E2} = 1 - \exp(-t_{go}/\tau_E) \quad (30)$$

$$k_{y3} = \tau_P^2 (\exp(-t_{go}/\tau_P) + t_{go}/\tau_P - 1) \quad (31)$$

$$k_{y5} = \tau_E^2 (\exp(-t_{go}/\tau_E) + t_{go}/\tau_E - 1) \quad (32)$$

$$k_{v3} = \tau_P (1 - \exp(-t_{go}/\tau_P)) \quad (33)$$

$$k_{v5} = \tau_E (1 - \exp(-t_{go}/\tau_E)) \quad (34)$$

利用式(27)~(34)对参数 c_{11}, c_{12}, c_{21} 和 c_{22} 进行求解,进一步可以得到 $z_y(t), z_v(t), N_{Py}$ 和 N_{Pv} 等导弹制导参数。 N_{Py} 和 N_{Pv} 的计算涉及到 c_{11}, c_{12}, c_{21} 和 c_{22} 从当前时刻 t 到飞行时间 t_f 的积分运算,经进一步解算可以得到:

$$\int_t^{t_f} c_{11} d\tau = g_y (\eta^{-1} \tau_P^3 f_{11}(t_{go}/\tau_E) - \tau_P^3 f_{11}(t_{go}/\tau_P)) \quad (35)$$

$$\int_t^{t_f} c_{12} d\tau = g_v (\tau_P^2 f_{12}(t_{go}/\tau_P) - \eta^{-1} \tau_E^2 f_{12}(t_{go}/\tau_E)) \quad (36)$$

$$\int_t^{t_f} c_{21} d\tau = g_y (\tau_P^2 f_{12}(t_{go}/\tau_P) - \eta^{-1} \tau_E^2 f_{12}(t_{go}/\tau_E)) \quad (37)$$

$$\int_t^{t_f} c_{22} d\tau = g_v (\eta^{-1} \tau_E f_{22}(t_{go}/\tau_E) - \tau_P f_{22}(t_{go}/\tau_P)) \quad (38)$$

其中:

$$f_{11}(\alpha) = 0.5 \exp(-2\alpha) + 2\alpha^2 \exp(-\alpha) - 1/3\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha - 0.5$$

$$f_{12}(\alpha) = 0.5 \exp(-2\alpha) + (\alpha - 1) \exp(-\alpha) + 0.5\alpha^2 - \alpha + 0.5$$

$$f_{22}(\alpha) = 0.5 \exp(-2\alpha) - 2 \exp(-\alpha) - \alpha + 1.5$$

2.5 制导增益和对策空间分析

2.5.1 制导增益分析

图2、3分别给出了不同加权参数 g_y 和 g_v 下的导弹制导增益 N_{Py} 和 N_{Pv} 的变化曲线。如图2所示,在 g_v 一定和 t_{go} 较大的情况下, N_{Py} 趋于常值,而在较大的 g_y 和 t_{go} 的情况下, N_{Pv} 基本保持一致且随飞行时间逐渐减小,而在较小的 t_{go} 和 g_y 的情况下,表现出一定的非最小相位特性。由图3可以发现,在 g_v 绝对值较大时,相应的制导增益 N_{Pv} 会增加,而 N_{Py} 则会减少,导弹向着瞬时脱靶量或视线角速度收敛的方向上进行控制,可以更快地完成弹道的收敛。

2.5.2 对策空间分析

由式(23)、(24)可知,当下式成立时:

$$1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11} + g_v c_{22} + g_y g_v c_{11} c_{22} - g_y g_v c_{21} c_{12}) d\tau = 0 \quad (39)$$

存在共轭点。

对于微分对策双方优化问题,共轭点不存在的

充分条件是存在鞍点解,而鞍点解当且仅当系统(4)所对应的 Riccati 微分方程的解 $P(t)$ 有限时才存在^[14]:

$$\dot{P}(t) = PA + A^T P + P(\eta^{-2} B_E B_E^T - B_P B_P^T) P \quad (40)$$

式中, $P(t_f) = G$ 。而当且仅当制导增益有界时, $P(t)$ 才能保持是有限的。进一步由式(39)可以得到:

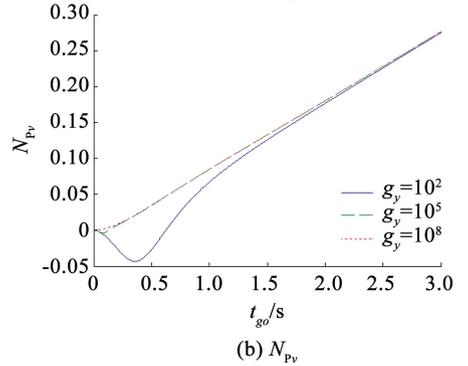
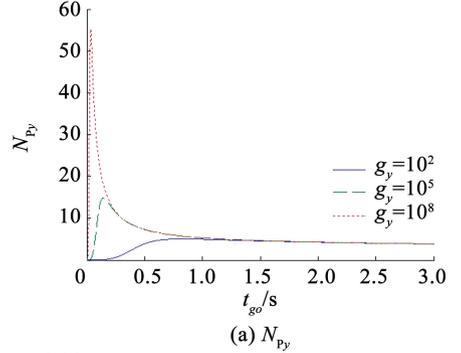


图2 不同 g_y 下的制导增益, $g_v = -0.2, \eta = 3$

Fig. 2 Guidance gains for different $g_y, g_v = -0.2, \eta = 3$

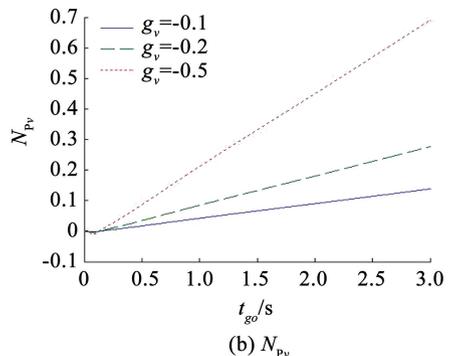
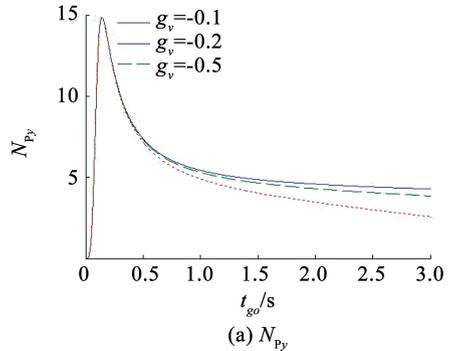


图3 不同 g_v 下的制导增益, $g_y = 10^5, \eta = 3$

Fig. 3 Guidance gains for different $g_v, g_y = 10^5, \eta = 3$

$$g_v = \frac{1 + \int_t^{t_f} (g_y c_{11}) d\tau}{\int_t^{t_f} (g_y c_{21} c_{12} - g_y c_{11} c_{22} - c_{22}) d\tau} \quad (41)$$

图 4 给出了共轭情况下不同 g_y 取值对应的 g_v 曲线,其中 $\eta=3$ 。从图 4 中可以发现,在 t_{go} 较小的情况下, g_v 倾向于取为负值。考虑导弹命中目标的需求, t_{go} 总是减少且趋近于零, g_v 取为负值是合理的。如图 4 所示,对于小的 g_y , t_{go} 一定的情况下, g_v 会出现奇异。为避免该情况, g_y 应取较大的数值,对应较大的终端脱靶量约束,与实际期望相符。

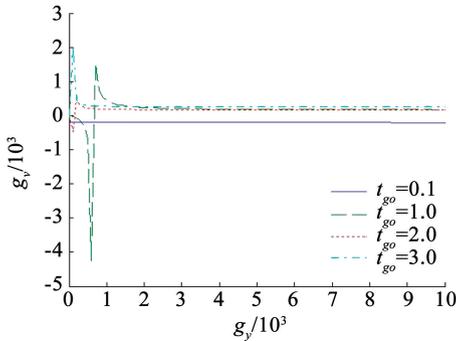


图 4 共轭情况下 g_v 和 g_y 的相对关系

Fig. 4 Relationship between g_v and g_y in case of conjugate

图 5 给出了共轭情况下 g_y 和 η 之间的关系曲线。从图 5 中可以发现,对于较大的 g_y , η 趋于常值,随着剩余飞行时间 t_{go} 的减少, η 呈增加的趋势。 η 的增加对应导弹和目标过载能力比值的减少,因此在所提出制导律的控制下,导弹加速度的需求会有所减少。

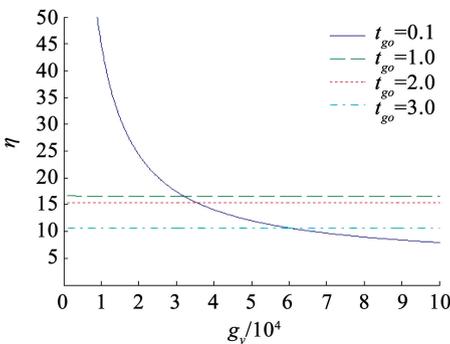


图 5 共轭情况下 g_y 和 η 之间的关系, $g_v = -0.2$

Fig. 5 Relationship between g_y and η in case of conjugate, $g_v = -0.2$

图 6 为共轭情况下 g_v 和 η 之间的关系。从图 6 中可以看出,对于一定的 g_y 和不同的 t_{go} ,会出现 $\eta < 0$ 的情况,与实际情况是相违背的,这也限制了 g_v 的取值范围。在 g_y 取较大数值的情况, g_v 倾向于取为绝对值较小的数值,当对末端脱靶量施加较强约束的情况下,对收敛速度的直接约束会减弱。

图 7 给出了不同 t_{go} 数值下, g_v 、 g_y 与 η 的对应关系。在 t_{go} 较大的情况下, g_y 倾向于选取较小的数值,不同的 g_y 对应的 η 基本重合,不是确定 η 的关

键因素;在 t_{go} 较小的情况下, g_y 倾向于选取较大的数值,可以扩大 g_v 的取值范围,有利于增加脱靶量的收敛速度。

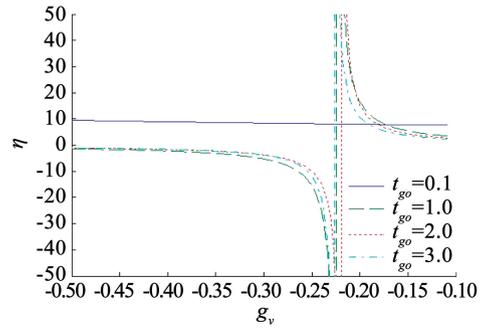
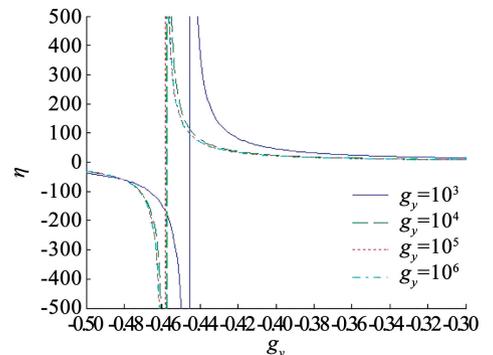
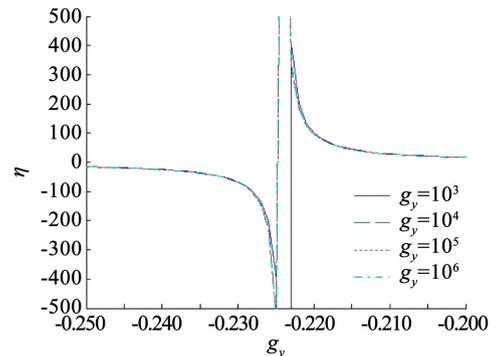


图 6 共轭情况下 g_v 和 η 之间的关系, $g_y = 10^5$

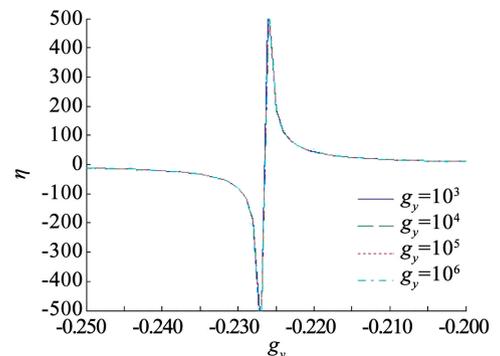
Fig. 6 Relationship between g_v and η in case of conjugate, $g_y = 10^5$



(a) $t_{go} = 0.3$ s



(b) $t_{go} = 1.0$ s



(c) $t_{go} = 3.0$ s

图 7 共轭且不同 t_{go} 情况下 g_v 、 g_y 与 η 之间的关系

Fig. 7 Relationship between g_y , g_v and η for different t_{go} in case of conjugate

3 仿真验证和分析

非线性系统仿真中选取导弹和目标的初始位置为(0,0)和(3 000, 4 000),飞行速度分别为500、300 m/s。假设二者控制系统可近似为一阶,时间常数分别为0.2、0.4 s。导弹的初始航向 $\gamma_p = 80^\circ$,目标为 $\gamma_E = 150^\circ$ 。仿真中,PN的导航比取为4,DGL涉及的制导参数包括终端脱靶量加权参数和目标相对于导弹的机动能力参数分别取为 10^5 和3。本文所推导的脱靶量及其变化率双重加权的微分对策制导律采用DGL-DW(dualweighted)表示,依据对策空间典型制导参数的分析结果,选取 $g_y = 10^5, g_v = -0.2, \eta = 3$ 。目标按照6 g的加速度进行机动逃逸,导弹的加速度限幅值为10 g,仿真结果见图8~11。

图8为目标常值机动下PN、DGL和DGL-DW 3种制导律对应的导弹飞行弹道。从图8中可以看出,DGL-DW对应的导弹飞行弹道最为平直,达到了弹道快速收敛的目的。图9为对应的导弹加速度,DGL-DW弹道最为平直,所需的加速度也最小,DGL制导初始段完成弹道的调整,末端的过载小于PN,3种制导律中PN的需用加速度最大,指令达到了限幅值。

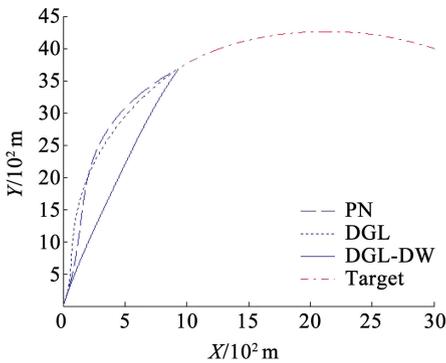


图8 不同制导律下的飞行弹道,目标常值机动

Fig. 8 Flight trajectories for different guidance laws, constant maneuvering target

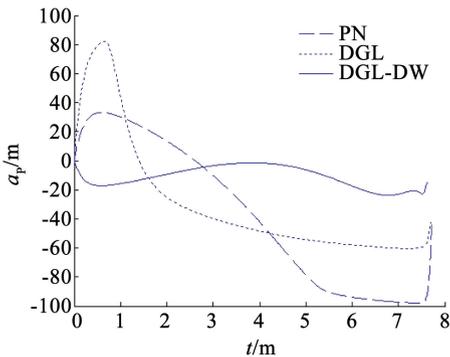


图9 不同制导律下的导弹加速度,目标常值机动

Fig. 9 Missile acceleratons for different guidance laws, constant maneuvering target

图10为DGL-DW的制导增益,弹道初始阶段 N_{Py} 较大,控制弹道的快速收敛,而制导末端 N_{Py} 较大,在减少脱靶量的方向上进行控制。图11为导弹

的零控脱靶量和零控脱靶量变化率曲线,零控脱靶量趋于0,而零控脱靶量变化率则是增大的,更有利于弹道的快速收敛。

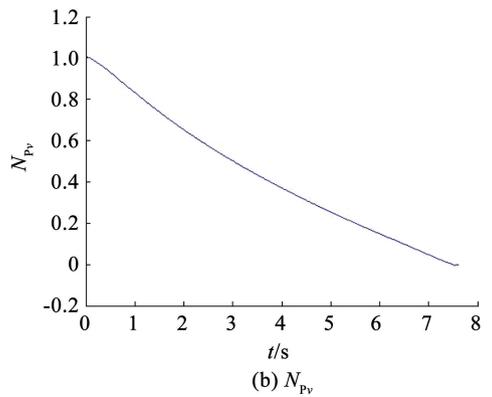
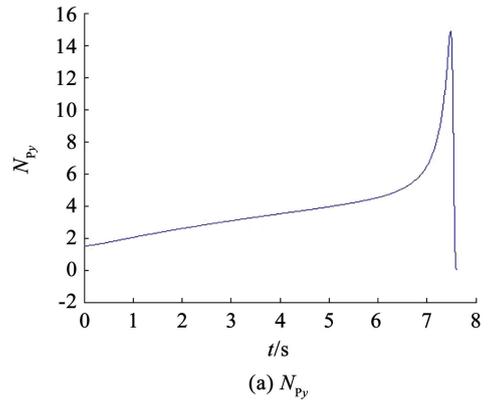


图10 DGL-DW的制导增益

Fig. 10 Guidance gain of DGL-DW

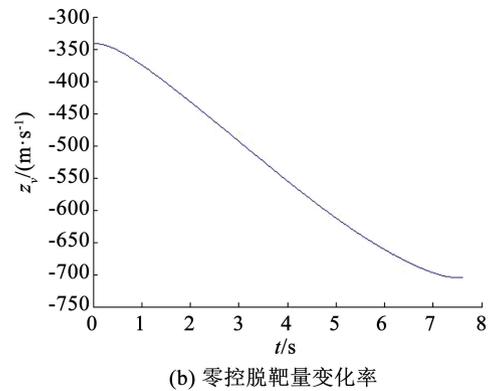
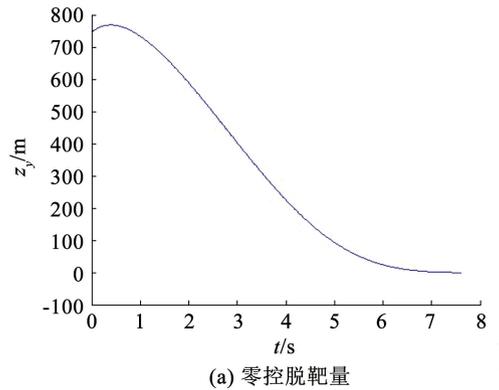


图11 DGL-DW的零控脱靶量和零控脱靶量变化率

Fig. 11 Zero-effort miss distance and zero-effort miss distance rate of DGL-DW

图 12、13 进一步给出了目标 S 型机动情况下的仿真结果,其中目标机动指令为 $u_E = 6g\sin(2\pi t)$ 。从图中可以发现,与常值目标机动相类似,DGL-DW 的飞行弹道最为平滑且收敛速度最快,同时对过载需求也是最低的。

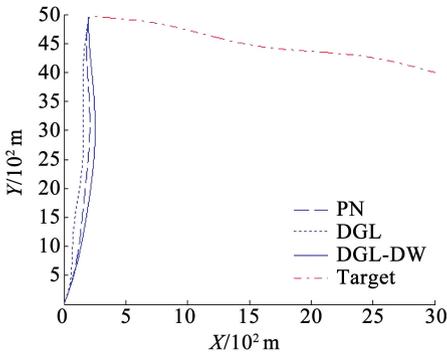


图 12 不同制导律下的飞行弹道,目标 S 型机动

Fig. 12 Flight trajectories for different guidance laws, S-type maneuvering target

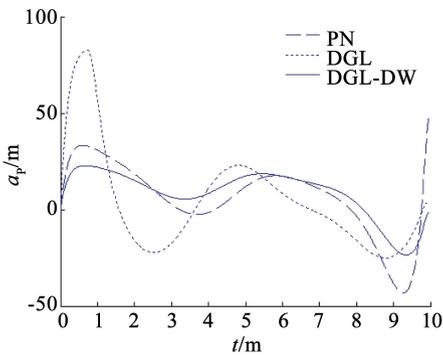


图 13 不同制导律下的导弹加速度,目标正弦机动

Fig. 13 Missile acceleratons for different guidance laws, S-type maneuvering target

假设目标机动形式为具有随机开始时间的阶跃机动。仿真基于 Monte Carlo 实验法,并采用单发命中概率(single shot kill probability, SSKP)^[12,15]作为性能衡量指标,对 3 种制导律的拦截性能进行了进一步的比较。3 种制导律取相同的目标随机机动开始时间,仿真次数为 500 次。如图 14 所示,对于给定的 SSKP,例如 0.95, DGL-DW 所要求的弹头杀伤半径小于 PN 和 DGL,具有较好的目标拦截性能。

进一步,假设导弹采用尾舵控制的三回路自动驾驶仪,将弹体及其控制系统建模为以下的三阶传递函数形式:

$$\frac{a_p}{u_p} = \frac{\tau_z s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \quad (42)$$

式中: $0 < \tau_1, \tau_2, \tau_3 < 1$, 对于尾舵控制的导弹, τ_z 为负值且绝对值一般在 0.1 以下。将式(42)转化为相应于式(1)的状态空间表达形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_p \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \tau_z \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a_3} & \frac{\tau_z - a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} u_p \quad (43)$$

式中: p_2, p_3 为导弹控制系统状态变量, $a_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, a_2 = \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3, a_3 = \tau_1\tau_2\tau_3$ 。利用式(43)可以得到导弹状态变量 a_p, p_2, p_3 对初始状态 $a_p(0), p_2(0), p_3(0)$, 以及控制量 u_p 的传递函数,进而计算得到 DGL-DW 制导律闭环所需的所有参数。限于篇幅,这里不再给出制导律具体的展开形式。

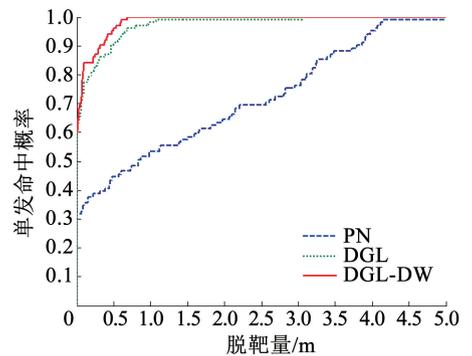


图 14 目标机动随机开始下的 SSKP,一阶导弹控制模型
Fig. 14 SSKP for random starting target maneuver, one-order missile control model

仿真中导弹控制系统模型采用式(42),而 DGL 制导律并不适用于式(42)所示的三阶传递函数形式,将传递函数近似为 $\frac{a_p}{u_p} = \frac{1}{a_1 s + 1}$ 。DGL-DW 分别针对式(42)的全状态形式和近似形式进行制导律闭环仿真,并分别采用 DGL-DW1 和 DGL-DW2 表示。仿真中取 $\tau_z = -0.10 \text{ s}, \tau_1 = 0.08 \text{ s}, \tau_2 = 0.05 \text{ s}, \tau_3 = 0.15 \text{ s}$,可以得到简化后的控制系统时间常数 $a_1 = 0.28 \text{ s}$ 。仿真结果见图 15。

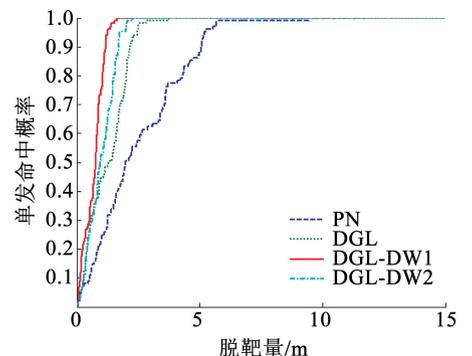


图 15 目标机动随机开始下的 SSKP,三阶导弹控制模型
Fig. 15 SSKP for random starting target maneuver, three-order missile control model

从图 15 中可以发现,随着导弹控制系统阶次的

增加,各制导律的性能都有所下降,以PN最为明显,DGL-DW2和DGL的性能下降较少,DGL-DW1考虑的是全状态的导弹控制系统模型,性能最好。导弹控制系统要求较快的响应速度,简化前后的时间常数一般不会存在太大的偏差。仿真中还发现,简化后的模型与全状态系统越接近,性能越好,准确的模型是进一步提升系统性能的重要因素。

4 结 论

1)基于线性二次型微分对策理论完成了脱靶量及其变化率双重加权的制导律的推导,且适用于导弹和目标具有高阶控制系统动态特性的情况。

2)考虑导弹和目标具有典型一阶控制系统动态的情况,进行了制导律的扩展,并完成了制导增益和对策空间的分析,给出了脱靶量及其收敛速度控制的权系数的取值分析。

3)非线性系统仿真表明,所提出的制导律达到了减少脱靶量的同时向着最大化脱靶量收敛速度的方向上进行控制的目的,对典型目标机动和随机时间开始的阶越机动等,具有良好的弹道收敛特性和较低的控制量需求。

参考文献

- [1]RYOO C K, CHO H, TAHK M J. Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(4): 724. DOI: 10.2514/1.8392
- [2]SHAFERMAN V, SHIMA T. Linear quadratic differential games guidance law for imposing a terminal intercept angle[C]//AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Reston: AIAA, 2008: 7302. DOI:10.2514/6.2008-7302
- [3]花文华,陈兴林. 高阶控制导弹线性二次型微分对策制导律[J]. *固体火箭技术*, 2011, 34(4): 403
HUA Wenhua, CHEN Xinglin. LQG differential game guidance law for high-order controlled missiles [J]. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2011, 34(4): 403. DOI: 10.3969/j. issn. 1006-2793. 2011. 04. 001
- [4]WEISS M, SHIMA T. Minimum effort pursuit/evasion guidance with specified miss distance[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, 39(5): 1069. DOI:10.2514/1. G001623
- [5]SHALUMOV V, SHIMA T. Weapon-target-allocation strategies in multiagent target-missile-defender engagement [J]. *Journal of*

- Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 40(10): 2452. DOI: 10.2514/1. G002598
- [6]SHINAR J, KEBKE A, SHIMA T. On the validity of linearized analysis in the interception of reentry vehicles [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Reston: AIAA, 1998: 4303. DOI: 10.2514/6.1998-4303
- [7]PROKOPOV Y O, SHIMA T. Linear quadratic optimal cooperative strategies for active aircraft protection [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(3): 753. DOI: 10.2514/1.58531
- [8]花文华,张金鹏. 纯方位量测下增强可观测性的微分对策制导律[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2023, 55(4): 122
HUA Wenhua, ZHANG Jinpeng. Differential game guidance law for enhanced observability with bearings-only measurements[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2023, 55(4): 122. DOI:10.11918/202111094
- [9]BALHANCE N, WEISS M, SHIMA T. Cooperative guidance law for intrasalvo tracking [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 40(6): 1441. DOI:10.2514/1. G002250
- [10]LIANG Haizhao, WANG Jianying, WANG Yonghai, et al. Optimal guidance against active defense ballistic missiles via differential game strategies[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(3): 978. DOI:10.1016/j. cja. 2019. 12. 009
- [11]LIU Yanfang, QI Naiming, TANG Zhiwei. Linear quadratic differential game strategies with two-pursuit versus single-evader [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2012, 25(6): 896. DOI: 10.1016/S1000-9361(11)60460-3
- [12]SHINAR J, SHIMA T. Nonorthodox guidance law development approach for intercepting maneuvering targets [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, 25(4): 658. DOI: 10.2514/2.4960
- [13]花文华,孟庆龄,张拥军. 寻的导弹范数型微分对策制导律[J]. *高技术通讯*, 2013, 23(4): 392
HUA Wenhua, MENG Qingling, ZHANG Yongjun. Norm differential game guidance laws for homing missiles [J]. *Chinese High Technology Letters*, 2013, 23(4): 392. DOI: 10.3772/j. issn. 1002-0470. 2013. 04. 010
- [14]RYOO C K, CHO H, TAHK M J. Time-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraints[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(3): 483. DOI:10.1109/TCST.2006.872525
- [15]SHINAR J, TURETSKY V, OSHMAN Y. Integrated estimation/guidance design approach for improved homing against randomly maneuvering targets [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(1): 154. DOI:10.2514/1.22916

(编辑 张红)