

DOI:10.11918/202402003

关于时滞车辆队列闭环稳定性的最紧要特征值

沈永明, 朱旭, 闫茂德

(长安大学 电子与控制工程学院, 西安 710064)

摘要: 为研究时滞车辆队列的闭环稳定性与通信拓扑之间的本质关系揭示问题, 针对二阶车辆队列与任意通信拓扑, 提出了一种普适的最紧要特征值(MEE)搜寻方法。首先, 基于车辆纵向动力学模型与含时滞分布式控制器, 构建了时滞车辆队列闭环系统, 并通过根趋势定义与 Hermite 稳定判据确定了系统仅存在一个时滞稳定区间。接着, 对于拉普拉斯矩阵特征值全为实数的情况, 通过分析系统最大容许时滞与拉普拉斯矩阵特征值之间的单调性关系, 证明了二阶车辆队列的 MEE 必定为拉普拉斯矩阵的最大特征值。然后, 对于部分特征值为共轭复数的情况, 发现一对共轭复数特征值所对应的最大容许时滞大小相等, 并给出了最大容许时滞的解析式。最后, 在上述单调性关系分析过程中揭示了共轭复数特征值幅值与相角对 MEE 的影响规律, 提出了简明的 MEE 搜寻规则。研究结果表明, 通过仿真实例验证了所提理论方法的正确性, 与传统遍历式的最大容许时滞求解方法相比, 所提方法可大幅度降低运算量。MEE 搜寻方法适用于任意通信拓扑下的二阶车辆队列系统闭环稳定性分析, 具有普适性。

关键词: 时滞车辆队列; 通信拓扑; 最紧要特征值(MEE); 最大容许时滞; 单调性分析

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2025)04-0040-12

Most exigent eigenvalues for closed-loop stability of delayed vehicle platoons

SHEN Yongming, ZHU Xu, YAN Maode

(School of Electronics and Control Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: To reveal the inherent relationship between the closed-loop stability of delayed vehicle platoons and communication topologies, a universal method of searching the most exigent eigenvalue (MEE) is proposed for second-order vehicle platoons under arbitrary communication topologies. First, for the case where all eigenvalues of the Laplacian matrix are real, by analyzing the monotonicity relationship between the maximum allowable delay and the eigenvalues, it is proven that the MEE of the second-order vehicle platoon must be the maximum eigenvalue of the Laplacian matrix. Then, for the case where some eigenvalues are complex conjugates, it is found that the maximum allowable delays corresponding to a pair of complex conjugate eigenvalues are equal in size, and an analytical expression for the maximum allowable delay is provided. Furthermore, during the analysis of the aforementioned monotonic relationship between the maximum allowable delay and the eigenvalues, the influence of the magnitude and phase of the complex conjugate eigenvalues on the MEE is revealed, and a concise MEE search rule is proposed. The results show that the proposed theoretical method is validated through simulation examples. Compared with traditional traversal methods of calculating the maximum allowable delay, the proposed method significantly reduces the computational burden. This method of searching the MEE is applicable to the closed-loop stability analysis of second-order vehicle platoons under arbitrary communication topologies and demonstrates universality.

Keywords: delayed vehicle platoon; communication topology; most exigent eigenvalue (MEE); maximum allowable delay; monotonicity analysis

自主车辆队列(简称车辆队列)可以减少交通拥堵,降低能源消耗,增强行车安全性^[1]。在车辆队列中,通过车-车通信、车-基础设施通信等方式进行信息交互,实现车辆的协同控制和安全行

驶^[2]。对于具有线性时不变动力学特性的车辆队列,当且仅当其闭环系统的所有特征根实部均为负数时,闭环稳定(又称内部稳定)^[3]。然而,由于车联无线通信环境和通信带宽的限制,车辆内部交互

收稿日期: 2024-02-01; 录用日期: 2024-03-28; 网络首发日期: 2024-12-16

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/23.1235.t.20241216.1121.002>

基金项目: 国家自然科学基金(62003054, 52372406); 陕西省重点研发计划资助项目(2023YBGY398)

作者简介: 沈永明(1999—), 男, 博士研究生; 闫茂德(1974—), 男, 教授, 博士生导师

通信作者: 朱旭, zx@chd.edu.cn

的信息中普遍含有通信时滞。通信时滞的存在,导致车辆队列的状态(位置、速度、加速度等)不仅与当前时刻有关,还与过去时刻有关。通信时滞削弱了车辆队列的静态和动态性能,严重降低了系统的闭环稳定性,甚至导致系统不稳定^[4],因此时滞车辆队列的闭环稳定性分析,是车辆队列控制设计的必需环节,已经成为控制领域的研究热点之一^[5]。

时滞车辆队列的闭环稳定性分析,主要研究系统临界稳定处的最大容许时滞求解^[6-7]。然而,囿于时滞系统具有无穷维特性,其特征方程的解有无穷多个,导致最大容许时滞的求解方法不多^[8-9]。现有关于车辆队列闭环稳定性分析的主流方法,如时域分析法(Lyapunov-Razumikhin 法^[10]、Lyapunov-Krasovskii 法^[11]等)与频域分析法(奈奎斯特判据^[12]、小增益理论^[13]等),仅能得到车辆队列闭环稳定的充分条件,而非充要条件,无法获得最大容许时滞。近年来,一些学者利用频域分析中的特征根聚类法^[14]、直接法^[15-17]等推导了线性时不变时滞系统的最大容许时滞。尽管如此,这些传统的最大容许时滞求解方法依赖暴力搜索和穷尽式计算。利用传统遍历式方法求解车辆队列的最大容许时滞时,需先将车辆队列降维分解成若干个等价的子系统,各子系统与通信拓扑拉普拉斯矩阵特征值一一对应,然后遍历所有特征值并计算其所对应的时滞稳定边界,所有时滞稳定边界的最小值方为整个车辆队列的最大容许时滞^[14-17]。

然而,传统遍历式求解方法未揭示最大容许时滞与通信拓扑之间的本质关系,需要穷尽式计算,运算量大,尤其对于大规模车辆队列,该缺陷更为明显。针对该缺陷,Cepeda-gomez 等^[18]首次提出了最紧要特征值(most exigent eigenvalue, MEE)的概念,指出 MEE 是通信拓扑拉普拉斯矩阵的关键特征值,对应车辆队列的最大容许时滞,反映了最大容许时滞与通信拓扑之间的本质关系。车辆队列的闭环稳定性等价于其 MEE 对应子系统的稳定性,因此只要找到 MEE,就可直接、快速地求解最大容许时滞,这对实现车辆队列闭环稳定性的快速分析具有重要意义。遗憾的是,Cepeda-gomez 等^[18]并未深入研究 MEE 问题,即如何从拉普拉斯矩阵的所有特征值中找到 MEE。

近年来,在多智能体系统 MEE 问题的研究方面有了一些进展。Koh 等^[19]、Jafarizadeh 等^[20]指出,

对于无向通信拓扑下的含时滞一阶多智能体系统, MEE 为拉普拉斯矩阵的最大特征值。Ma 等^[21]针对 PD(proportional-derivative)控制协议作用下的一阶多智能体系统,认为 MEE 也是拉普拉斯矩阵的最大特征值。对于一阶多智能体系统,由于其子系统特征方程在形式上足够简单, MEE 可以通过观察子系统时滞稳定边界的表达式直接得到,一般不需要进行解析证明。车辆队列是一种典型的多智能体系统。然而,一阶车辆队列忽略了车辆速度对车辆队列性能的影响,导致在处理复杂的交通状况时不够精确;二阶车辆队列能更好地反映实际交通中车辆的复杂相互作用,但其子系统特征方程的复杂度增加,难以通过观察的方式直接得到 MEE,因此上述关于一阶多智能体系统 MEE 的搜寻方法并不能拓展到二阶车辆队列。对于二阶车辆队列 MEE 问题的研究,需要分析子系统时滞稳定边界与拉普拉斯矩阵特征值之间的单调性关系,研究难度明显增加。

上述研究的另一个局限性为其结果仅适用于拉普拉斯矩阵的特征值全为实数的情况,而无法适用于拉普拉斯矩阵的部分特征值为共轭复数的情况,缺乏普适性。实际交通场景中车辆队列的通信拓扑是多样的,因而通信拓扑的拉普拉斯矩阵通常存在共轭复数特征值。因此,在研究 MEE 问题时,不仅要考虑特征值的幅值,还不能忽视相角。特征值的幅值和相角之间具有耦合性,会导致上述单调性关系的分析难度进一步增大。另外,复数特征值会导致系统特征方程产生复系数,这也提升了上述单调性关系的研究难度与不确定性。总之,由于上述难点的存在,任意通信拓扑下含时滞二阶车辆队列的 MEE 问题尚未解决。

鉴于此,本文针对二阶车辆队列和任意通信拓扑,开展关于时滞车辆队列闭环稳定性的 MEE 问题研究,提出了一种普适的 MEE 搜寻方法,揭示了系统最大容许时滞与通信拓扑之间的本质关系,可附带产生大幅度降低最大容许时滞求解运算量的良好效果,从而快速实现车辆队列的闭环稳定性分析。

首先,针对现有研究未考虑二阶车辆队列 MEE 的问题,通过分析子系统时滞稳定边界与拉普拉斯矩阵特征值之间的单调性关系,提出了一种二阶车辆队列的 MEE 搜寻方法,揭示了最大容许时滞与通信拓扑之间的本质关系,可大幅度降低最大容许时滞求解的运算量。其次,提出了关于通信拓扑拉普

拉斯矩阵实数特征值的 MEE 搜寻规则。最后揭示了共轭复数特征值的幅值和相角对 MEE 的影响规律。基于此,本文所提 MEE 搜寻方法适用于任意通信拓扑下的二阶车辆队列系统闭环稳定性分析,具有普适性。

1 问题描述

1.1 图论基础

考虑由一辆领航车与 $N-1$ 辆跟随车组成的车辆队列,使用图 $G = \{V, E, \tilde{A}\}$ 描述车与车之间的通信拓扑。将每一辆车看作一个节点, $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 为节点集合。若两个节点之间存在信息交互,则称它们之间存在一条边, $E \subseteq V \times V$ 为边的集合。 $\tilde{A} = [a_{ij}]_{N \times N}$ 为图 G 的邻接矩阵,当第 i 辆车能接收到第 j 辆车的信息时, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$ 。

$D = \text{diag}\{\sum_{j=1}^N a_{1j}, \sum_{j=1}^N a_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}\}$ 为图 G 的入度矩阵。

拉普拉斯矩阵为 $L = D - \tilde{A}$, L 的特征值为 $\lambda_i, i \in V$ 。队列中每辆跟随车都能获取到领航车的信息。有的跟随车通过与领航车的通信,直接获取领航车的信息;有的跟随车虽不与领航车直接通信,但可通过其他跟随车的中继通信,获取领航车的信息。

对于闭环稳定的车辆队列,图 G 中必然存在有向生成树,从而拉普拉斯矩阵 L 有一个零特征值,且其余特征值的实部全为正实数^[22]。不失一般性,假设 L 的特征值以实部大小升序排列,即 $\lambda_1 = 0 < \text{Re}(\lambda_2) \leq \text{Re}(\lambda_3) \leq \dots \leq \text{Re}(\lambda_N)$, $\text{Re}(\cdot)$ 表示实部。

假设 L 的一对共轭复数特征值为 λ_i 与 λ_{i+1} , 即 $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda_i}$, $\overline{(\cdot)}$ 表示复共轭。 $\lambda_i = |\lambda_i| \cdot e^{j\angle\lambda_i}$, $\lambda_{i+1} = |\lambda_i| \cdot e^{-j\angle\lambda_i}$, 其中, $|\lambda_i| > 0$ 为 λ_i 的幅值, $\angle\lambda_i \in (0, \pi/2)$ 为 λ_i 的相角。

1.2 含时滞自主车辆队列控制系统建模

考虑第 i 辆车的纵向动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{r}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \end{cases}, i \in V \quad (1)$$

式中, $r_i(t)$ 、 $v_i(t)$ 、 $u_i(t)$ 分别为第 i 辆车在 t 时刻的位置、速度和控制输入。式(1)的状态空间表达式为

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = \mathbf{A}x_i(t) + \mathbf{B}u_i(t) \quad (2)$$

式中: $x_i(t) = \begin{bmatrix} r_i(t) \\ v_i(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

车辆队列的间距策略采用固定间距策略,以增加道路容量^[23],定义车辆队列的跟车误差为

$$\begin{cases} \tilde{r}_i(t) = r_i(t) - r_1(t) + i \times d_0 \\ \tilde{v}_i(t) = v_i(t) - v_1(t) \end{cases}, i \in V \quad (3)$$

式中: $r_1(t)$ 、 $v_1(t)$ 分别为领航车在 t 时刻的位置和速度, d_0 为相邻两辆车之间的期望车间距。令 $\tilde{x}_i(t) = [\tilde{r}_i(t), \tilde{v}_i(t)]^T$, 车辆队列的控制目标为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_i(t)\| = 0$ 。

然后,设计分布式控制器为

$$u_i(t) = -\mathbf{K} \sum_{j=1}^N a_{ij} [\tilde{x}_i(t - \tau) - \tilde{x}_j(t - \tau)] \quad (4)$$

式中: $\mathbf{K} = [k_r, k_v]$, $k_r > 0$ 、 $k_v > 0$ 分别为位置反馈增益和速度反馈增益; τ 为固定的通信时滞,且假设所有车-车通信信道的时滞是大小相等的。

结合式(2)与分布式控制器(4),可得到如下车辆队列闭环动力学模型:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{X}(t) - [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K})]\mathbf{X}(t - \tau) \quad (5)$$

式中: $\mathbf{X}(t) = [\tilde{x}_1^T(t), \tilde{x}_2^T(t), \dots, \tilde{x}_N^T(t)]^T$, \mathbf{I}_N 为 N 维单位矩阵, \otimes 为 Kronecker 积。

通过一个非奇异变换矩阵 \mathbf{R} , 可实现状态变换 $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\zeta}(t)$, $\boldsymbol{\zeta}(t) = [\boldsymbol{\zeta}_1^T(t), \boldsymbol{\zeta}_2^T(t), \dots, \boldsymbol{\zeta}_N^T(t)]^T$, $\boldsymbol{\zeta}_i(t) \in \mathbf{R}^2$ 。通过上述状态变换,式(5)转换为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\boldsymbol{\zeta}(t) - [\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K})]\boldsymbol{\zeta}(t - \tau) \quad (6)$$

式中, $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ 。进一步,将式(6)降维分解成若干个子系统:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}_i(t) - \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K}\boldsymbol{\zeta}_i(t - \tau) \quad (7)$$

对车辆队列闭环系统(5)的闭环稳定性分析等价于对所有子系统(7)的稳定性分析。需要说明的是, $\lambda_1 = 0$ 在分析车辆队列闭环稳定性问题时通常不需要被考虑。因此,后续仅考虑 $i \in \tilde{V} = V \setminus \{1\}$, 表示 \tilde{V} 是由 V 去掉元素 1 后形成的。

1.3 最大容许时滞与 MEE 问题

子系统(7)的特征方程为

$$f_i(s, \tau) = \det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A} + \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K}e^{-s\tau}) = P_i(s) + Q_i(s, \lambda_i)e^{-s\tau} = 0 \quad (8)$$

式中: s 为拉普拉斯变量, $Q_i(s, \lambda_i) = \lambda_i Q_i^*(s)$, $P_i(s)$ 、 $Q_i^*(s)$ 分别为关于 s 的实系数多项式。

随着时滞 τ 的增加,子系统特征方程(8)的根可能移动至虚轴,此时为一对共轭纯虚根,记作 $s = \pm j\omega_i$, $j^2 = -1$, $\omega_i > 0$ 为穿越频率。纯虚根 $s = \pm j\omega_i$ 穿越虚轴的方向用根趋势 (root tendency, RT) 表示。根趋势的定义为

$$RT \Big|_{s=\pm j\omega_i}^{\tau} = \text{sgn} \left[\text{Re} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{s=\pm j\omega_i} \right) \right] \quad (9)$$

若 $RT = +1$, 则 $s = \pm j\omega_i$ 从左往右穿越虚轴, 是不稳定的穿越行为; 若 $RT = -1$, 则 $s = \pm j\omega_i$ 从右往左穿越虚轴, 是稳定的穿越行为。

接下来, 将 $s = \pm j\omega_i$ 代入子系统特征方程(8), 并应用如下两个重要条件, 可得到子系统(7)的时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 。

1) 幅值条件为

$$|P_i(\pm j\omega_i)| = |Q_i(\pm j\omega_i, \lambda_i)| \quad (10)$$

2) 相角条件为

$$\angle P_i(\pm j\omega_i) - \angle Q_i(\pm j\omega_i, \lambda_i) \pm \bar{\tau}_i \omega_i + \pi = 2k\pi \quad (11)$$

式中: k 为整数, 其取值需要保证 $\bar{\tau}_i > 0$ 且 $\bar{\tau}_i$ 取最小值, k 通常取 0 或 1。

在计算时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 时, 仅需考虑正穿越频率 ω_i , 证明过程简述如下。首先, 定义对应于 $s = +j\omega_i$ 和 $s = -j\omega_i$ 的时滞稳定边界分别为 $\bar{\tau}_{i1}$ 和 $\bar{\tau}_{i2}$, 那么 $\bar{\tau}_i = \min\{\bar{\tau}_{i1}, \bar{\tau}_{i2}\}$ 。然后, 考虑两种情况, 分别对应于实数特征值 λ_i 和一对共轭复数特征值 λ_i 与 λ_{i+1} 。

1) 若 λ_i 是实数, 则 $Q_i(s, \lambda_i)$ 为关于 s 的实系数多项式。 $\overline{P_i(-j\omega_i)} = P_i(j\omega_i)$, $\overline{Q_i(-j\omega_i, \lambda_i)} = Q_i(j\omega_i, \lambda_i)$ 。根据幅值条件(10)与相角条件(11), 可得

$$\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_{i1} = \bar{\tau}_{i2} \quad (12)$$

2) 若 λ_i 与 λ_{i+1} 是一对共轭复数, 则 $Q_i(s, \lambda_i)$ 与 $Q_{i+1}(s, \lambda_{i+1})$ 为关于 s 的复系数多项式。 $\overline{P_{i+1}(-j\omega_{i+1})} = P_{i+1}(j\omega_{i+1}) = \overline{P_i(-j\omega_i)} = P_i(j\omega_i)$, $\overline{Q_{i+1}(-j\omega_{i+1}, \lambda_{i+1})} = Q_i(j\omega_i, \lambda_i) \neq \overline{Q_i(-j\omega_i, \lambda_i)}$, $\overline{Q_{i+1}(j\omega_{i+1}, \lambda_{i+1})} = Q_i(-j\omega_i, \lambda_i)$ 。首先, 根据幅值条件(10), 容易得到 $\omega_{i+1} = \omega_i$ 。然后, 根据相角条件(11), 可得到 $\bar{\tau}_{i1} = \bar{\tau}_{(i+1)2}$, $\bar{\tau}_{i2} = \bar{\tau}_{(i+1)1}$, $\bar{\tau}_{i1} \neq \bar{\tau}_{i2}$ 。因此, 对于一对共轭复数特征值所对应的子系统, 它们的时滞稳定边界大小相等, 即

$$\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_{i+1} = \min\{\bar{\tau}_{i1}, \bar{\tau}_{i2}\} = \min\{\bar{\tau}_{i1}, \bar{\tau}_{(i+1)1}\} \quad (13)$$

在计算出所有子系统(7)的时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 之后, 车辆队列闭环系统(5)的最大容许时滞为 $\bar{\tau} = \min_{i \in \bar{V}} \bar{\tau}_i$ 。然而, 对于大规模车辆队列, 计算所有的 $\bar{\tau}_i$ 将导致十分庞大的运算量。由 MEE 的概念可知, 若能找到车辆队列闭环系统(5)的 MEE, 则可规避

遍历式的最大容许时滞 $\bar{\tau}$ 的计算方式, 从而实现闭环稳定性的快速分析。因此, 这就引出了车辆队列的 MEE 问题, 即如何从拉普拉斯矩阵的所有特征值中找到 MEE。

2 自主车辆队列的最紧要特征值分析

针对二阶车辆队列闭环系统(5), 分别在通信拓扑拉普拉斯矩阵特征值全为实数与部分特征值为共轭复数两种情况下, 分析子系统时滞稳定边界与拉普拉斯矩阵特征值之间的单调性关系, 给出 MEE 的搜寻方法与解析结果。

2.1 拉普拉斯矩阵特征值全为实数

针对通信拓扑拉普拉斯矩阵 L 特征值全为实数的情况, 提出 MEE 搜寻方法。 L 的特征值满足 $\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$ 。此时, 子系统特征方程(8)中的 $P_i(s)$ 和 $Q_i(s, \lambda_i)$ 分别为

$$\begin{cases} P_i(s) = s^2 \\ Q_i(s, \lambda_i) = \lambda_i(k_v s + k_r) \end{cases} \quad (14)$$

根据幅值条件(10), 可得

$$\omega_i^4 - \lambda_i^2 k_v^2 \omega_i^2 - \lambda_i^2 k_r^2 = 0 \quad (15)$$

根据笛卡儿符号准则或一元二次方程的求根公式可知, 式(15)有且仅有一个正实数根, 即子系统(7)有且仅有一个正实数穿越频率 ω_i 。在此基础上, 给出如下引理, 通过判断子系统(7)的根趋势, 确定车辆队列闭环系统(5)的时滞稳定区间数量。

引理 1 若拉普拉斯矩阵 L 的特征值全为实数, 车辆队列闭环系统(5)至多存在一个时滞稳定区间。

证明 若车辆队列闭环系统(5)通信拓扑的拉普拉斯矩阵特征值全为实数, 根据子系统特征方程(8)可得

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{s=\pm j\omega_i}^{\tau} = \frac{\lambda_i \omega_i}{\alpha_1 \pm j\alpha_2} \left\{ -k_v \omega_i \cos(\tau \omega_i) + k_r \sin(\tau \omega_i) \pm j[k_v \cos(\tau \omega_i) + k_v \omega_i \sin(\tau \omega_i)] \right\} \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_i(k_v - k_r \tau) \cos(\tau \omega_i) - \lambda_i k_v \tau \sin(\tau \omega_i) \\ \alpha_2 &= 2\omega_i - \lambda_i(k_v - k_r \tau) \sin(\tau \omega_i) - \lambda_i k_v \tau \cos(\tau \omega_i) \end{aligned}$$

$\frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{s=\pm j\omega_i}^{\tau}$ 的实部为

$$\text{Re} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{s=\pm j\omega_i}^{\tau} \right) = \frac{\lambda_i \omega_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \left[-k_v \omega_i \cos(\tau \omega_i) + k_r \sin(\tau \omega_i) \right] \left[-\lambda_i k_v \tau \sin(\tau \omega_i) + \lambda_i(k_v - k_r \tau) \cos(\tau \omega_i) \right] +$$

$$\begin{aligned} & [k_r \cos(\tau\omega_i) + k_v \omega_i \sin(\tau\omega_i)] \cdot \\ & [2\omega_i - \lambda_i(k_v - k_r\tau) \sin(\tau\omega_i) - \\ & \lambda_i k_v \tau \cos(\tau\omega_i)] \} = \\ & \frac{\lambda_i \omega_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \{ 2\omega_i [k_r \cos(\tau\omega_i) + \\ & k_v \omega_i \sin(\tau\omega_i)] - \lambda_i k_v^2 \omega_i \} \quad (17) \end{aligned}$$

将 $s = \pm j\omega_i$ 代入式(8), 可得 $k_r \cos(\tau\omega_i) + k_v \omega_i \sin(\tau\omega_i) = \omega_i^2 / \lambda_i$ 。由式(15)可得 $\lambda_i^2 = \omega_i^4 / (k_r^2 + k_v^2 \omega_i^2)$, 因此式(17)可化简为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{s=\pm j\omega_i} \right) &= \frac{\lambda_i \omega_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \left(\frac{2\omega_i^3}{\lambda_i} - \lambda_i k_v^2 \omega_i \right) = \\ & \frac{\omega_i^4 (2k_r^2 + k_v^2 \omega_i^2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (k_r^2 + k_v^2 \omega_i^2)} > 0 \quad (18) \end{aligned}$$

结合式(9)可知, 子系统(7)纯虚根 $s = \pm j\omega_i$ 处的根趋势为 $\operatorname{RT} = \operatorname{sgn}[\operatorname{Re}(\frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{s=\pm j\omega_i})] = +1$, 因此随着 τ 的持续增加, $s = \pm j\omega_i$ 必定从左往右穿越虚轴, 这意味着每个子系统至多存在一个时滞稳定区间 $\tau \in (0, \bar{\tau}_i]$ 。又考虑到整个系统的时滞稳定区间是所有子系统时滞稳定区间的交集, 所以对于拉普拉斯矩阵特征值全为实数的情况, 车辆队列闭环系统(5)至多存在一个时滞稳定区间 $\tau \in (0, \bar{\tau}]$ 。证毕

根据引理 1, 车辆队列闭环系统(5)若存在时滞稳定区间 $\tau \in (0, \bar{\tau}]$, 需要在 $\tau=0$ 时渐近稳定。利用 Routh-Hurwitz 稳定判据^[24], 对 $\tau=0$ 时的车辆队列闭环系统(5)进行闭环稳定性分析, 可得当且仅当 $k_r > 0$ 与 $k_v > 0$ 时, 车辆队列闭环系统(5)在 $\tau=0$ 时渐近稳定。

根据相角条件(11)、(12), 可得子系统(7)的时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 为

$$\bar{\tau}_i = \frac{\tan^{-1}(\Theta\omega_i)}{\omega_i} \quad (19)$$

式中: $\Theta = \frac{k_v}{k_r} > 0$, ω_i 为式(15)的正实数根。

接下来, 给出拉普拉斯矩阵特征值全为实数情况下的 MEE 搜寻方法以及解析结果。

定理 1 若拉普拉斯矩阵 L 的特征值全为实数, 车辆队列闭环系统(5)的 MEE 为 L 的最大特征值 λ_N , 从而其最大容许时滞为

$$\bar{\tau} = \frac{\tan^{-1}(k_v \omega_N / k_r)}{\omega_N} \quad (20)$$

式中, $\omega_N = \sqrt{(\lambda_N^2 k_v^2 + \sqrt{\lambda_N^4 k_v^4 + 4\lambda_N^2 k_r^2})} / 2$ 。

证明 二阶车辆队列的 MEE, 可通过分析时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 与 L 特征值 λ_i 之间的单调性关系进行搜寻。证明分为两个步骤。

Step1 ω_i 与 λ_i 之间的单调性关系。

定义 $\hat{\lambda}_i = \lambda_i^2$ 与 $\hat{\omega}_i = \omega_i^2$, 则式(15)可写为

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\hat{\omega}_i^2}{k_r^2 + k_v^2 \hat{\omega}_i} \quad (21)$$

对 $\hat{\lambda}_i$ 关于 $\hat{\omega}_i$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{\omega}_i} &= \frac{2\hat{\omega}_i (k_r^2 + k_v^2 \hat{\omega}_i) - k_v^2 \hat{\omega}_i^2}{(k_v^2 \hat{\omega}_i + k_r^2)^2} = \\ & \frac{k_v^2 \hat{\omega}_i^2 + 2k_r^2 \hat{\omega}_i}{(k_v^2 \hat{\omega}_i + k_r^2)^2} > 0 \quad (22) \end{aligned}$$

再者, 由于 $\lambda_i > 0$ 且 $\omega_i > 0$, 因此, $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \hat{\lambda}_i} \cdot \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{\omega}_i}$

$\frac{\partial \hat{\omega}_i}{\partial \omega_i} = \frac{\omega_i}{\lambda_i} \cdot \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{\omega}_i} > 0$, 且 $\frac{\partial \omega_i}{\partial \lambda_i} > 0$ 。

Step2 $\bar{\tau}_i$ 与 ω_i 之间的单调性关系。

对于式(19), 对 $\bar{\tau}_i$ 关于 ω_i 求导, 并定义一个相关函数:

$$\varphi_i(\omega_i) = \omega_i^2 \frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \omega_i} = \frac{\Theta\omega_i}{1 + \Theta^2\omega_i^2} - \tan^{-1}(\Theta\omega_i) \quad (23)$$

由于 $\Theta\omega_i > 0$, 根据文献[15]的引理 2.1, 必然有 $\frac{\Theta\omega_i}{1 + \Theta^2\omega_i^2} < \tan^{-1}(\Theta\omega_i)$ 。因此, $\varphi_i(\omega_i) < 0$, 即

$\frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \omega_i} < 0$ 。

综合上述两个步骤, 可得 $\frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \omega_i} < 0$ 。因

此, 时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 随 L 特征值 λ_i 的增大而减小, 即车辆队列闭环系统(5)的 MEE 为 L 的最大特征值 λ_N , 与 MEE 对应的子系统时滞稳定边界(17)即为整个系统的最大容许时滞。证毕

注 1 对于车辆队列闭环系统(5), 当通信拓扑的拉普拉斯矩阵特征值全为实数时, 定理 1 通过分析时滞稳定边界与特征值之间的单调性关系, 揭示了最大容许时滞与通信拓扑之间的本质关系。定理 1 指出, 仅需要考虑拉普拉斯矩阵的最大特征值, 就可实现最大容许时滞的快速求解, 从而大幅度降低车辆队列闭环稳定性分析的运算量。

2.2 拉普拉斯矩阵的部分特征值为共轭复数

针对通信拓扑拉普拉斯矩阵 L 的部分特征值为共轭复数的情况,提出 MEE 搜寻方法。 L 的特征值均具有正实部,且满足 $\text{Re}(\lambda_2) \leq \text{Re}(\lambda_3) \leq \dots \leq \text{Re}(\lambda_N)$ 。此时,子系统特征方程(8)中的 $P_i(s)$ 和 $Q_i(s, \lambda_i)$ 分别为

$$\begin{cases} P_i(s) = s^2 \\ Q_i(s, \lambda_i) = |\lambda_i| (k_v s + k_r) e^{j\angle \lambda_i} \end{cases} \quad (24)$$

根据幅值条件(10),可得

$$\omega_i^4 - |\lambda_i|^2 k_v^2 \omega_i^2 - |\lambda_i|^2 k_r^2 = 0 \quad (25)$$

根据笛卡儿符号准则或者一元二次方程的求根公式可知,式(25)有且仅有一个正实数根,即子系统(7)有且仅有一个正实数穿越频率 ω_i 。在此基础上,给出如下引理,通过判断子系统(7)的根趋势,确定车辆队列闭环系统(5)时滞稳定区间的数量。

引理 2 若拉普拉斯矩阵 L 的部分特征值为共轭复数,车辆队列闭环系统(5)至多存在一个时滞稳定区间。

证明 若车辆队列闭环系统(5)通信拓扑的拉普拉斯矩阵存在共轭复数特征值,定义 $\sigma_i = |\lambda_i| \cos(\angle \lambda_i)$ 与 $\iota_i = |\lambda_i| \sin(\angle \lambda_i)$,则 $\lambda_i = \sigma_i + j\iota_i$ 。根据子系统特征方程(8)可得

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_{s = \pm j\omega_i} = \frac{\omega_i [\beta_1 \sigma_i \mp \beta_2 \iota_i + j(\beta_1 \iota_i \pm \beta_2 \sigma_i)]}{\beta_3 \sigma_i \pm \beta_4 \iota_i + j(\pm 2\omega_i + \beta_3 \iota_i \mp \beta_4 \sigma_i)} \quad (26)$$

其中:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= k_r \sin(\tau \omega_i) - k_v \omega_i \cos(\tau \omega_i) \\ \beta_2 &= k_r \cos(\tau \omega_i) + k_v \omega_i \sin(\tau \omega_i) \\ \beta_3 &= (k_v - k_r \tau) \cos(\tau \omega_i) - k_v \tau \omega_i \sin(\tau \omega_i) \\ \beta_4 &= (k_v - k_r \tau) \sin(\tau \omega_i) + k_v \tau \omega_i \cos(\tau \omega_i) \end{aligned}$$

$\left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_{s = \pm j\omega_i}$ 的实部为

$$\text{Re} \left(\left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_{s = \pm j\omega_i} \right) = \frac{\omega_i [\pm 2\omega_i (\beta_1 \iota_i \pm \beta_2 \sigma_i) + |\lambda_i|^2 (\beta_1 \beta_3 - \beta_2 \beta_4)]}{(\beta_3 \sigma_i \pm \beta_4 \iota_i)^2 + (\pm 2\omega_i + \beta_3 \iota_i \mp \beta_4 \sigma_i)^2} \quad (27)$$

接下来,化简式(27),从而判断其正负性。首先,对式(27)中的一部分表达式进行化简:

$$\begin{aligned} \beta_1 \beta_3 - \beta_2 \beta_4 &= [k_r \sin(\tau \omega_i) - k_v \omega_i \cos(\tau \omega_i)] \cdot \\ & \quad [(k_v - k_r \tau) \cos(\tau \omega_i) - k_v \tau \omega_i \sin(\tau \omega_i)] - \\ & \quad [k_r \cos(\tau \omega_i) + k_v \omega_i \sin(\tau \omega_i)] \cdot \\ & \quad [(k_v - k_r \tau) \sin(\tau \omega_i) + k_v \tau \omega_i \cos(\tau \omega_i)] = \\ & \quad -k_v (k_v - k_r \tau) \omega_i \cos^2(\tau \omega_i) - \\ & \quad k_r k_v \tau \omega_i \sin^2(\tau \omega_i) - k_r k_v \tau \omega_i \cos^2(\tau \omega_i) - \end{aligned}$$

$$k_v (k_v - k_r \tau) \omega_i \sin^2(\tau \omega_i) = -k_v^2 \omega_i \quad (28)$$

然后,将 $s = \pm j\omega_i$ 代入式(8),可得 $\beta_1 \iota_i \pm \beta_2 \sigma_i = \pm \omega_i^2$ 。由式(25)可得 $|\lambda_i|^2 = \omega_i^4 / (k_r^2 + k_v^2 \omega_i^2)$ 。最后,令 $\gamma_1 = \beta_3 \sigma_i \pm \beta_4 \iota_i$, $\gamma_2 = \pm 2\omega_i + \beta_3 \iota_i \mp \beta_4 \sigma_i$,式(27)可化简为

$$\text{Re} \left(\left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_{s = \pm j\omega_i} \right) = \frac{\omega_i^3 (2k_r^2 + k_v^2 \omega_i^2)}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) (k_r^2 + k_v^2 \omega_i^2)} > 0 \quad (29)$$

结合式(9)可知,子系统(7)纯虚根 $s = \pm j\omega_i$ 处

的根趋势为 $\text{RT} = \text{sgn} \left[\text{Re} \left(\left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_{s = \pm j\omega_i} \right) \right] = +1$ 。因此,随着 τ 的持续增加, $s = \pm j\omega_i$ 必定从左往右穿越虚轴,这意味着每个子系统至多存在一个时滞稳定区间 $\tau \in (0, \bar{\tau}_i]$ 。又考虑到整个系统的时滞稳定区间是所有子系统时滞稳定区间的交集,所以对于拉普拉斯矩阵的部分特征值为共轭复数的情况,车辆队列闭环系统(5)至多存在一个时滞稳定区间 $\tau \in (0, \bar{\tau}]$ 。证毕

根据引理 2,若车辆队列闭环系统(5)存在时滞稳定区间 $\tau \in (0, \bar{\tau}]$,需要在 $\tau = 0$ 时渐近稳定,因此给出如下引理。

引理 3 若拉普拉斯矩阵 L 的部分特征值为共轭复数,当且仅当满足下列条件时,车辆队列闭环系统(5)在 $\tau = 0$ 时渐近稳定。

$$k_v^2 \sigma_i (\sigma_i^2 + \iota_i^2) - k_r \iota_i^2 > 0 \quad (30)$$

证明 当车辆队列闭环系统(5)的通信拓扑拉普拉斯矩阵的部分特征值为共轭复数时,若子系统特征方程(8)在 $\tau = 0$ 时渐近稳定,根据 Hermite 稳定判据^[25],需保证下列判断矩阵是正定的。

$$\nabla_i = \begin{bmatrix} 2k_v \sigma_i & -2k_r \iota_i \\ -2k_r \iota_i & 2k_v k_v (\sigma_i^2 + \iota_i^2) \end{bmatrix} \quad (31)$$

∇_i 正定,需要其顺序主子式 $|\nabla_i^{(1)}|$ 、 $|\nabla_i^{(2)}|$ 均大于 0,即:

$$|\nabla_i^{(1)}| = 2k_v \sigma_i > 0 \quad (32a)$$

$$|\nabla_i^{(2)}| = 4k_v k_v^2 \sigma_i (\sigma_i^2 + \iota_i^2) - 4k_r^2 \iota_i^2 > 0 \quad (32b)$$

显然,式(32a)必然成立。故当所有的子系统(7)均满足式(32b)时,车辆队列闭环系统(5)在 $\tau = 0$ 时渐近稳定。证毕

根据相角条件(11),可得到子系统(7)的 $\bar{\tau}_{i1}$ 与 $\bar{\tau}_{(i+1)1}$ 分别为:

$$\bar{\tau}_{i1} = \frac{\angle \lambda_i + \tan^{-1}(\Theta \omega_i)}{\omega_i} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{(i+1)1} = \frac{\pi - \angle \lambda_i + \tan^{-1}(\Theta \omega_i)}{\omega_i}, & \tan^{-1}(\Theta \omega_i) \leq \angle \lambda_i \\ \bar{\tau}_{(i+1)1} = \frac{-\angle \lambda_i + \tan^{-1}(\Theta \omega_i)}{\omega_i}, & \tan^{-1}(\Theta \omega_i) > \angle \lambda_i \end{cases} \quad (34)$$

式中 ω_i 为式(25)的正实数根。由式(13)可知,子系统(7)的时滞稳定边界为 $\bar{\tau}_i = \min\{\bar{\tau}_{i1}, \bar{\tau}_{(i+1)1}\}$ 。接下来,给出一个引理,以确定 $\bar{\tau}_{i1}$ 和 $\bar{\tau}_{(i+1)1}$ 中的哪一个对应于子系统(7)的时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 。

引理 4 对于一对共轭复数特征值所对应的子系统(7),当满足引理 3 时,其时滞稳定边界为

$$\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_{(i+1)1} = \frac{-\angle \lambda_i + \tan^{-1}(\Theta \omega_i)}{\omega_i} \quad (35)$$

证明 虽然式(34)中 $\bar{\tau}_{(i+1)1}$ 存在两种形式,但实际上仅存在一种形式——式(34)。接下来,先证明这一点,然后在式(33)与式(34)中确定 $\bar{\tau}_i$ 。

首先,式(34)之间的切换点为

$$\tan^{-1}(\Theta \omega_i) = \angle \lambda_i \quad (36)$$

根据 $\tan(\angle \lambda_i) = \frac{\sin(\angle \lambda_i)}{\cos(\angle \lambda_i)}$, 且 $\Theta = \frac{k_v}{k_r}$, 式(36)

可写为

$$\omega_i = \frac{k_r \sin(\angle \lambda_i)}{k_v \cos(\angle \lambda_i)} \quad (37)$$

根据定理 1 的证明,可直接得到 $|\lambda_i|$ 与 ω_i 之间的单调性关系,即 $\frac{\partial |\lambda_i|}{\partial \omega_i} > 0$ 。将式(37)代入式(25),可得

$$\begin{aligned} |\lambda_i|^2 &= \frac{\omega_i^4}{k_r^2 + k_v^2 \omega_i^2} = \frac{k_r^4 \sin^4(\angle \lambda_i)}{k_v^4 \cos^4(\angle \lambda_i)} = \frac{k_r^2 \sin^2(\angle \lambda_i)}{k_v^2 \cos^2(\angle \lambda_i)} \\ &= \frac{k_r^2 \sin^4(\angle \lambda_i)}{k_v^4 [\cos^2(\angle \lambda_i) + \sin^2(\angle \lambda_i)] \cos^2(\angle \lambda_i)} = \frac{k_r^2 \sin^4(\angle \lambda_i)}{k_v^4 \cos^2(\angle \lambda_i)} \end{aligned} \quad (38)$$

因此, $\omega_i > \frac{k_r \sin(\angle \lambda_i)}{k_v \cos(\angle \lambda_i)} \Leftrightarrow |\lambda_i| > \frac{k_r \sin^2(\angle \lambda_i)}{k_v \cos(\angle \lambda_i)}$ 。

然后,根据 $\sigma_i = |\lambda_i| \cos(\angle \lambda_i)$ 与 $\nu_i = |\lambda_i| \sin(\angle \lambda_i)$, 式(30)可写为

$$|\lambda_i| > \frac{k_r \sin^2(\angle \lambda_i)}{k_v \cos(\angle \lambda_i)} \quad (39)$$

综上所述,当满足引理 3 时,必定存在 $\tan^{-1}(\Theta \omega_i) > \angle \lambda_i$, 故 $\bar{\tau}_{(i+1)1}$ 为式(34)。

然后,比较 $\bar{\tau}_{i1}$ 与 $\bar{\tau}_{(i+1)1}$ 的大小。根据式(33)、(34), 且 $\angle \lambda_i \in (0, \pi/2)$, 可得到 $\bar{\tau}_{(i+1)1} = \frac{-\angle \lambda_i + \tan^{-1}(\Theta \omega_i)}{\omega_i} < \frac{\angle \lambda_i + \tan^{-1}(\Theta \omega_i)}{\omega_i} = \bar{\tau}_{i1}$ 。因此, $\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_{(i+1)1}$ 。证毕

注 2 引理 4 表明,对于一对共轭复数特征值所对应的子系统(7),仅需计算与负相角相关的时滞稳定边界。此种情况下,时滞稳定边界求解的运算量减少 1/2。

接下来,给出拉普拉斯矩阵部分特征值为共轭复数情况下的 MEE 搜寻方法。

定理 2 若拉普拉斯矩阵 L 的部分特征值为共轭复数,当满足引理 3 时,车辆队列闭环系统(5)的 MEE 可按照下列规则进行搜寻。

规则 1 对于拉普拉斯矩阵 L 的任意两对共轭复数特征值,如果它们的幅值和相角满足下列条件:

$$\begin{cases} |\lambda_i| \geq \frac{k_r}{\sqrt{2} k_v^2}, \angle \lambda_i < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \\ |\lambda_j| \geq \frac{k_r}{\sqrt{2} k_v^2}, \angle \lambda_j < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (40)$$

当 $|\lambda_i| \leq |\lambda_j|$ 且 $\angle \lambda_i \leq \angle \lambda_j$ 时,在搜寻 MEE 时只需考虑 λ_{j+1} 。

规则 2 对于拉普拉斯矩阵 L 的所有实数特征值,在搜寻 MEE 时只需考虑其中的最大特征值。

假设 λ_M 为满足规则 1 的复数特征值, λ_N 为模值最大的实数特征值,则车辆队列闭环系统(5)的最大容许时滞为

$$\bar{\tau} = \min\left\{ \frac{-\angle \lambda_i + \tan^{-1}(k_v \omega_M / k_r)}{\omega_M}, \frac{\tan^{-1}(k_v \omega_N / k_r)}{\omega_N} \right\} \quad (41)$$

式中: $\omega_M = \sqrt{(|\lambda_M|^2 k_v^2 + \sqrt{|\lambda_M|^4 k_v^4 + 4 |\lambda_M|^2 k_r^2})/2}$, ω_N 已在式(20)中给出。

证明 规则 2 可由定理 1 直接得到。因此,仅证明规则 1,通过分析时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 与 L 的特征值 λ_i 之间的单调性关系进行证明。

Step1 $\bar{\tau}_i$ 与 $|\lambda_i|$ 之间的单调性关系。

根据定理 1 的证明,可得 $\frac{\partial \omega_i}{\partial |\lambda_i|} > 0$ 。接下来,分析 $\bar{\tau}_i$ 与 ω_i 之间的单调性关系。

对于式(35),对 $\bar{\tau}_i$ 关于 ω_i 求导,并定义一个相关函数:

$$\psi_i(\omega_i) = \omega_i^2 \frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \omega_i} = \phi_i(\omega_i) + \angle \lambda_i \quad (42)$$

式中 $\phi_i(\omega_i)$ 已在式(23)给出。

由于难以直接确定 $\psi_i(\omega_i)$ 的正负性,所以需要
对 $\psi_i(\omega_i)$ 关于 ω_i 求导,可得

$$\frac{\partial \psi_i(\omega_i)}{\partial \omega_i} = \frac{\Theta(1 + \Theta^2 \omega_i^2) - 2\Theta^3 \omega_i^2}{(1 + \Theta^2 \omega_i^2)^2} - \frac{\Theta}{1 + \Theta^2 \omega_i^2} = \frac{-2\Theta^3 \omega_i^2}{(1 + \Theta^2 \omega_i^2)^2} < 0 \quad (43)$$

同时,由式(42)可知,当 $\omega_i \rightarrow 0^+$ 时, $\psi_i(\omega_i) \rightarrow \angle \lambda_i$; 当 $\omega_i \rightarrow +\infty$ 时, $\psi_i(\omega_i) \rightarrow -\pi/2 + \angle \lambda_i$ 。故 $\psi_i(\omega_i)$ 有且仅有一个零点 ω_{ic} , 即 $\psi_i(\omega_{ic}) = 0$ 。因此,当 $\omega_i \in (0, \omega_{ic})$ 时, $\psi_i(\omega_i) > 0$; 当 $\omega_i \in (\omega_{ic}, +\infty)$ 时, $\psi_i(\omega_i) < 0$ 。

进一步,对于式(42),对 $\psi_i(\omega_i)$ 关于 ω_i 继续求二阶导,可得

$$\frac{\partial^2 \psi_i(\omega_i)}{\partial \omega_i^2} = \frac{4\Theta^3 \omega_i (\Theta^2 \omega_i^2 - 1)}{(1 + \Theta^2 \omega_i^2)^3} \quad (44)$$

当 $\omega_i = \frac{1}{\Theta}$ 时, $\frac{\partial^2 \psi_i(\omega_i)}{\partial \omega_i^2} = 0$ 。将 $\omega_i = \frac{1}{\Theta}$ 代入式(42),

并结合式(40),可得 $\psi_i(\frac{1}{\Theta}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \angle \lambda_i < 0$ 。

$\psi_i(\omega_i)$ 关于 ω_i 的变化趋势见图1。从图1中可以看出,

当 $\omega_i \in [\frac{1}{\Theta}, +\infty)$ 时, $\psi_i(\omega_i) < 0$, 即 $\frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \omega_i} < 0$ 。另外,

根据式(25)与 $\frac{\partial \omega_i}{\partial |\lambda_i|} > 0$, 可推断出 $|\lambda_i| \geq \frac{k_r}{\sqrt{2k_v^2}} \Leftrightarrow$

$\omega_i \geq \frac{1}{\Theta}$ 。因此,当 $|\lambda_i| \geq \frac{k_r}{\sqrt{2k_v^2}}$ 时, $\frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial |\lambda_i|} = \frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \omega_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial |\lambda_i|} <$

$0, \bar{\tau}_i$ 随 $|\lambda_i|$ 的增大而减小。

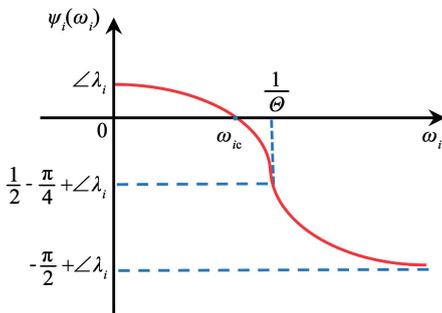


图1 $\psi_i(\omega_i)$ 关于 ω_i 的变化趋势

Fig. 1 Variation tendency of $\psi_i(\omega_i)$ with respect to ω_i

Step2 $\bar{\tau}_i$ 与 $\angle \lambda_i$ 之间的单调性关系。

对于式(35),对 $\bar{\tau}_i$ 关于 $\angle \lambda_i$ 求导,可得

$$\frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \angle \lambda_i} = -\frac{1}{\omega_i} < 0 \quad (45)$$

因此, $\bar{\tau}_i$ 随 $\angle \lambda_i$ 的增大而减小。

综上所述,当共轭复数特征值的幅值与相角分别满足式(40)时,时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 随 $|\lambda_i|$ 或 $\angle \lambda_i$ 的增大而减小,规则1得证。通过规则1与规则2搜寻车辆队列闭环系统(5)的MEE,与MEE对应的子系统时滞稳定边界(41)为整个系统的最大容许时滞。证毕

注3 对于车辆队列闭环系统(5),当通信拓扑拉普拉斯矩阵的部分特征值为共轭复数时,定理2在定理1的基础上,进一步分析了共轭复数特征值的幅值和相角对MEE的影响规律,揭示了最大容许时滞与通信拓扑之间的本质关系,并实现了对任意通信拓扑的普适性。定理2指出,仅需要考虑拉普拉斯矩阵的复数特征值 λ_{j+1} 以及最大实数特征值,就可实现最大容许时滞的直接、快速求解,从而大幅度降低车辆队列闭环稳定性分析的运算量。

注4 定理2的证明过程表明,特征值的幅值和相角对MEE搜寻的定性影响规律为:子系统时滞稳定边界随幅值的增大而减小,也随相角的增大而减小;并且幅值对分析时滞稳定边界与相角之间的单调性结果无影响,但是相角对分析时滞稳定边界与幅值之间的单调性结果有影响。因此,特征值的幅值和相角对MEE搜寻的影响是耦合的、综合的。

注5 相较于文献[19-21]中的MEE搜寻方法仅适用于一阶多智能体系统,定理1与定理2提出了适用于二阶车辆队列的MEE搜寻方法,其证明过程所使用的单调性分析方法,适用于二阶乃至更高阶系统。同时,相较于文献[19-21]中的方法仅适用于少数类型的通信拓扑(其拉普拉斯矩阵全为实数),定理2首次考虑了拉普拉斯矩阵存在共轭复数特征值的情况,所提方法适用于任意通信拓扑。

3 仿真实例

首先,考虑由1辆领航车与6辆跟随车组成的车辆队列,给出两个仿真实例,分别针对通信拓扑拉普拉斯矩阵特征值全为实数与部分特征值为共轭复数两种情况进行仿真,验证所提理论方法的正确性。然后,给出一个大规模车辆队列仿真实例,验证所提理论方法在计算系统最大容许时滞方面的高效性,见图2。控制器增益设置为 $k_r = 1, k_v = 2$ 。采用固定间距策略,期望间距为 $d_0 = 15$ m。各跟随车的初始误差设置为 $\vec{r}(0) = [1, -1, 0, 1, 1, -1]^T$ m, $\vec{v}(0) = [-1, 1, -1, 1, 1, -1]^T$ m/s。

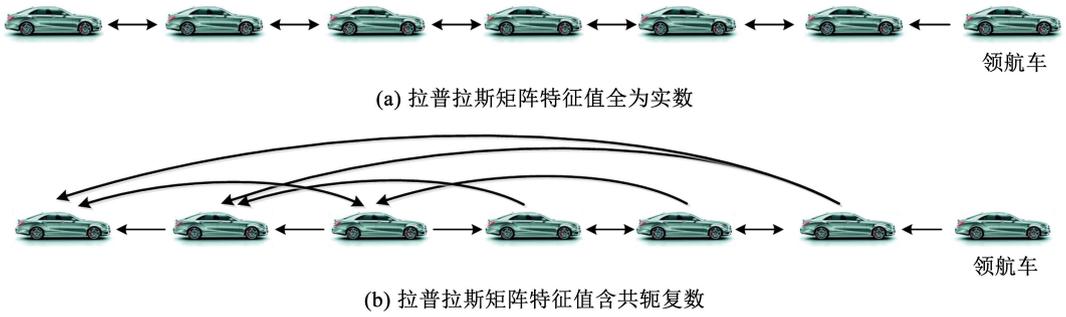


图 2 通信拓扑

Fig. 2 Communication topology

实例 1(拉普拉斯矩阵特征值全为实数) 使用图 2(a) 的双向跟随式通信拓扑, 验证定理 1 的正确性。首先, 根据式 (15) 与式 (19), 绘制时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 关于 L 特征值 λ_i 的变化趋势(见图 3)。从图 3 中可以看出, $\bar{\tau}_i$ 随 λ_i 的增大而减小。

此外, 为验证所计算的最大容许时滞是准确的, 选取 3 个时滞: 第 1 个稍小于最大容许时滞, $\tau = 0.190 0$ s; 第 2 个在最大容许时滞处, $\tau = 0.197 5$ s; 第 3 个稍大于最大容许时滞, $\tau = 0.200 0$ s。利用基于拟多项式映射的寻根器(Quasi-polynomial mapping-based root-finder, QPmR)^[26], 获取图 2(a) 所示车辆队列在虚轴附近的极点分布情况, 同时给出对应情况下车辆队列的位置误差, 仿真结果见图 4、5(系统极点为复数时总以共轭形式存在, 因此仿真仅展示实轴以上部分的复平面区域, 并且各子系统最右侧

极点用“*”表示, 而整个系统最右侧极点用“·”表示)。

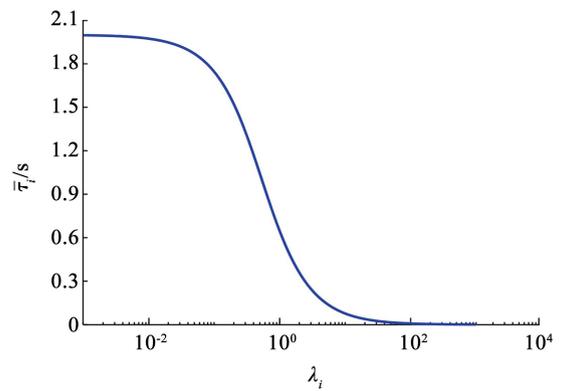


图 3 拉普拉斯矩阵全实数特征值时 $\bar{\tau}_i$ 关于 λ_i 的变化趋势
Fig. 3 Variation tendency of $\bar{\tau}_i$ with respect to λ_i when all the eigenvalues of the Laplacian matrix are real

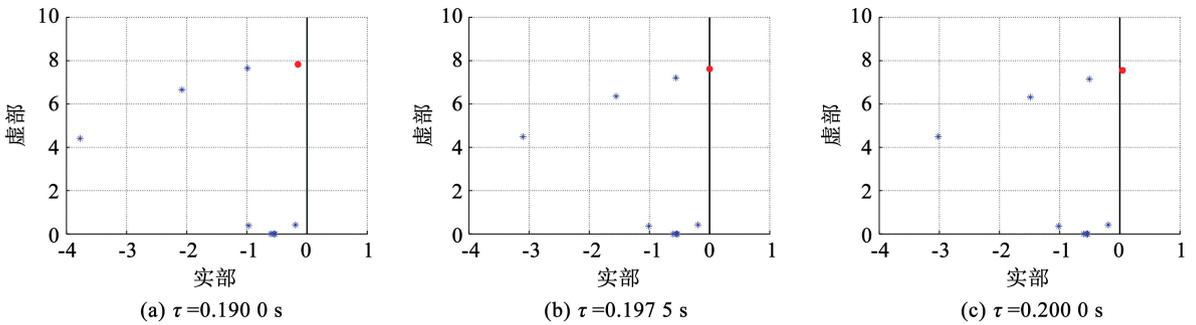


图 4 拉普拉斯矩阵特征值全为实数时车辆队列的极点分布

Fig. 4 Pole distribution of vehicle platoons when all eigenvalues of the Laplacian matrix are real

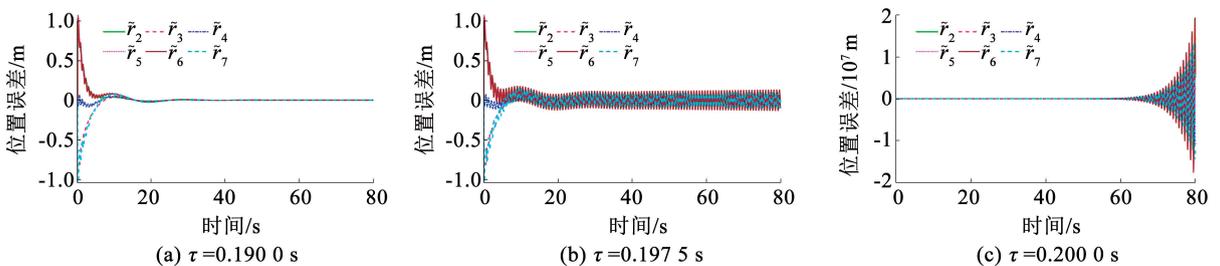


图 5 拉普拉斯矩阵特征值全为实数时车辆队列的位置误差

Fig. 5 Spacing errors of vehicle platoons when all eigenvalues of the Laplacian matrix are real

图4(a)与图5(a)中,当时滞小于最大容许时滞时,所有极点均位于复平面左半平面,且车辆队列的位置误差随时间收敛,系统闭环稳定;图4(b)与图5(b)中,当时滞位于最大容许时滞处时,最右侧极点位于虚轴上,且位置误差等幅振荡,系统临界稳定;图4(c)与图5(c)中,当时滞大于最大容许时滞时,最右侧极点位于复平面右半平面,且位置误差随时间发散,系统不稳定。该仿真结果表明所计算的车辆队列闭环系统(5)最大容许时滞是准确的。

实例2(拉普拉斯矩阵部分特征值为共轭复数)使用图2(b)的通信拓扑,验证定理2的正确性。

首先,根据式(25)与式(35),绘制时滞稳定边界 $\bar{\tau}_i$ 关于 L 特征值幅值 $|\lambda_i|$ 与相角 $\angle\lambda_i$ 的变化趋势,见图6。从图6中可以看出, $\bar{\tau}_i$ 随 $|\lambda_i|$ 的增大而减小, $\bar{\tau}_i$ 也随 $\angle\lambda_i$ 的增大而减小。

分别为 $\lambda_2 = 0.2323, \lambda_{3,4} = 1.7859 \cdot e^{\pm j0.1719}, \lambda_{5,6} = 3.3792 \cdot e^{\pm j0.2276}, \lambda_7 = 3.6643$ 。然后,对各个特征值所对应的子系统求解时滞稳定边界,可得 $\bar{\tau}_2 = 1.4565 \text{ s}, \bar{\tau}_{3,4} = \min\{0.4455, 0.3493\} = 0.3493 \text{ s}, \bar{\tau}_{5,6} = \min\{0.2551, 0.1867\} = 0.1867 \text{ s}, \bar{\tau}_7 = 0.2046 \text{ s}$ 。对于两对共轭复数特征值 $\lambda_{3,4}$ 与 $\lambda_{5,6}$ 所对应的子系统, $\bar{\tau}_6 < \bar{\tau}_4$,表明仅需计算 λ_6 所对应的时滞稳定边界,符合定理2的规则1。同时,在所有实数特征值所对应的时滞稳定边界中, $\bar{\tau}_7$ 最小,符合定理2的规则2,因此MEE只需要在 λ_6 和 λ_7 中进行搜寻,且最大容许时滞 $\bar{\tau} = \min\{\bar{\tau}_6, \bar{\tau}_7\} = 0.1867 \text{ s}$,理论推导与仿真结果一致,所以定理2是正确的。

此外,为验证所计算的最大容许时滞是准确的,选取3个时滞:第1个稍小于最大容许时滞, $\tau = 0.1800 \text{ s}$;第2个在最大容许时滞处, $\tau = 0.1867 \text{ s}$;第3个稍大于最大容许时滞, $\tau = 0.1900 \text{ s}$ 。利用QPmR获取图2(b)所示车辆队列在虚轴附近的极点分布情况,同时给出对应情况下车辆队列的位置误差,仿真结果见图7、8。图7(a)与图8(a)中,当时滞小于最大容许时滞时,所有极点均位于复平面左半平面,且车辆队列的位置误差随时间收敛,系统闭环稳定;图7(b)与图8(b)中,当时滞位于最大容许时滞处时,最右侧极点位于虚轴上,且位置误差等幅振荡,系统临界稳定;图7(c)与图8(c)中,当时滞大于最大容许时滞时,最右侧极点位于复平面右半平面,且位置误差随时间发散,系统不稳定。该仿真结果表明所计算的车辆队列闭环系统(5)最大容许时滞是准确的。

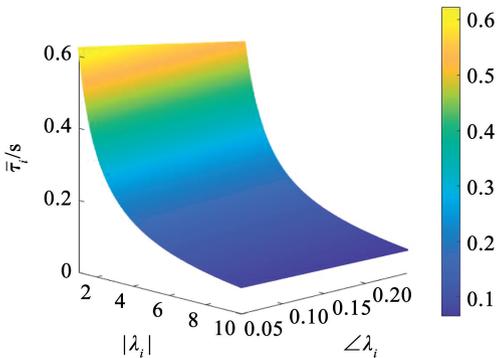


图6 拉普拉斯矩阵部分特征值为共轭复数时 $\bar{\tau}_i$ 关于 $|\lambda_i|$ 与 $\angle\lambda_i$ 的变化趋势

Fig. 6 Variation tendency of $\bar{\tau}_i$ with respect to $|\lambda_i|$ and $\angle\lambda_i$ when some eigenvalues of the Laplacian matrix are complex conjugates

图2(b)的 L 有1个零特征值,其余6个特征值

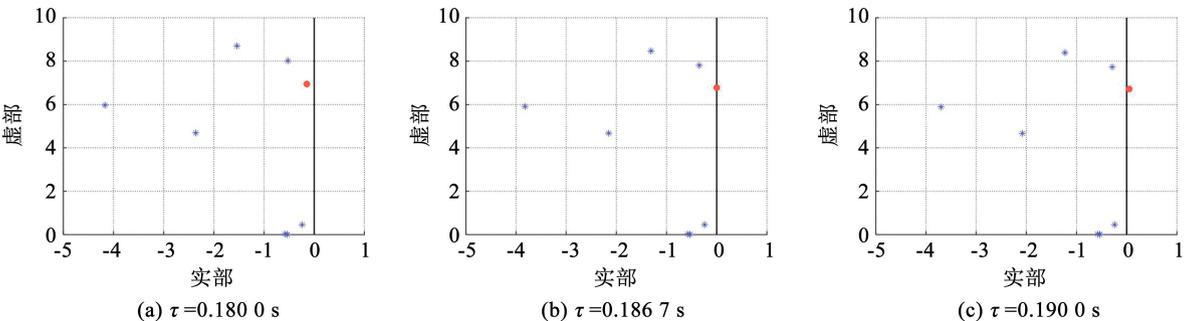


图7 拉普拉斯矩阵部分特征值为共轭复数时车辆队列的极点分布

Fig. 7 Pole distribution of vehicle platoons when some eigenvalues of the Laplacian matrix are complex conjugates

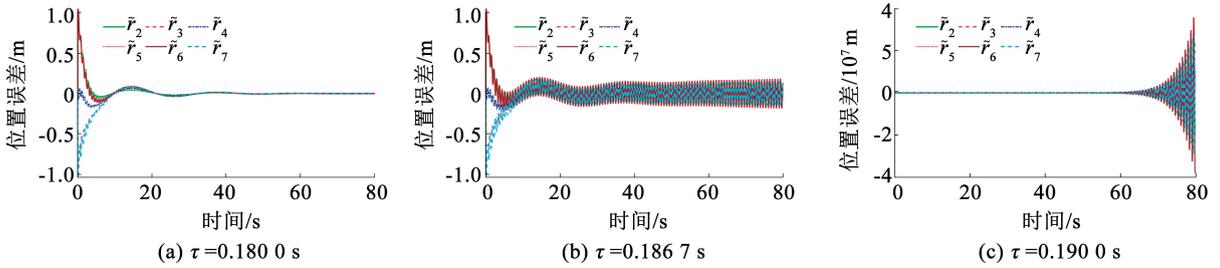


图 8 拉普拉斯矩阵部分特征值为共轭复数时车辆队列的位置误差

Fig. 8 Spacing errors of vehicle platoons when some eigenvalues of the Laplacian matrix are complex conjugates

实例 3 (大规模车辆队列) 使用图 2(a) 的通信拓扑, 考虑车辆队列的规模 N 为从 2 ~ 1 000 的整数, 验证所提 MEE 搜寻方法在计算系统最大容许时滞方面的高效性, 仿真时间仅需 3.840 3 s, 仿真结果见图 9。从图 9 中可以看出, 整个车辆队列闭环系统(5) 的最大容许时滞随车辆队列规模的增大而减小。

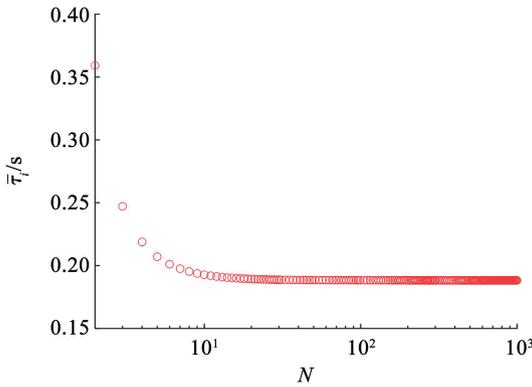


图 9 不同规模车辆队列的最大容许时滞

Fig. 9 Maximum allowable delays of vehicle platoons with different scales

最后, 以车辆队列规模 N 为 100 的整数倍为例, 分别以传统遍历式的最大容许时滞求解方法与本文所提 MEE 搜寻方法, 在同一台配备了 2.93 GHz 英特尔酷睿 2 双核处理器和 4 GB RAM, 并安装了 Matlab R2019b 的计算机中求解车辆队列闭环系统(5) 的最大容许时滞, 两种方法的仿真时间见图 10。

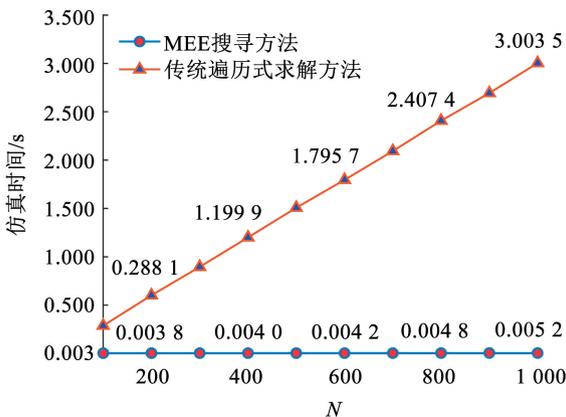


图 10 不同规模车辆队列求解最大容许时滞的仿真时间

Fig. 10 Simulation time of calculating maximum allowable delays of vehicle platoons with different scales

从图 10 中可以看出, 通过传统遍历式求解方法需遍历所有子系统, 仿真时间会随着车辆队列规模的增大而明显增大, 而通过 MEE 搜寻方法, 仅需考虑与 MEE 相对应的子系统, 随着车辆队列规模的增大, 仿真时间仅小幅度增大。再者, MEE 搜寻方法在计算效率上显著优于传统遍历式求解方法。例如, 规模 $N = 1\ 000$ 时, 传统遍历式求解方法计算最大容许时滞的仿真时间为 3.003 5 s, 相比之下, MEE 搜寻方法计算最大容许时滞的仿真时间仅为 0.005 2 s, 快 3 个数量级。该仿真结果表明了所提理论方法在计算车辆队列闭环系统(5) 最大容许时滞方面的高效性。

4 结 论

本文针对二阶车辆队列和任意通信拓扑, 开展了关于时滞车辆队列闭环稳定性的 MEE 问题研究, 提出了一种普适的 MEE 搜寻方法, 揭示了系统最大容许时滞与通信拓扑之间的本质关系, 从而实现了车辆队列闭环稳定性的快速分析。

1) 对于拉普拉斯矩阵特征值全为实数的情况, 通过分析子系统时滞稳定边界与拉普拉斯矩阵特征值之间的单调性关系, 证明了二阶车辆队列的 MEE 必定为拉普拉斯矩阵最大特征值。

2) 对于拉普拉斯矩阵的部分特征值为共轭复数的情况, 通过单调性关系分析, 揭示了共轭复数特征值的幅值和相角对 MEE 的影响规律。所提 MEE 搜寻规则指出, 仅需考虑拉普拉斯矩阵的一部分复数特征值与最大实数特征值。

3) 通过仿真实例验证了所提方法的正确性, 并与传统遍历式的最大容许时滞求解方法相比, 所提方法可实现最大容许时滞的快速求解, 从而大幅度降低车辆队列闭环稳定性分析的运算量。

参考文献

[1] ZHANG Hao, LIU Juan, WANG Zhuping, et al. Adaptive switched control for connected vehicle platoon with unknown input delays[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(3): 1511. DOI: 10.1109/TCYB.2021.3104622

- [2]王昊,秦严严. 网联车混合交通流渐进稳定性解析方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2019, 51(3): 88
WANG Hao, QIN Yanyan. Asymptotic stability analysis of traffic flow mixed with connected vehicles[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2019, 51(3): 88. DOI: 10.11918/j. issn. 0367-6234.201711066
- [3]ZHENG Yang, EBEN LI S, WANG Jianqiang, et al. Stability and scalability of homogeneous vehicular platoon: study on the influence of information flow topologies[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2016, 17(1): 14. DOI: 10.1109/ITITS.2015.2402153
- [4]常雪阳,徐庆,李克强,等. 通信时延与丢包下智能网联汽车控制性能分析[J]. 中国公路学报, 2019, 32(6): 216
CHANG Xueyang, XU Qing, LI Keqiang, et al. Analysis of intelligent and connected vehicle control under communication delay and packet loss[J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(6): 216. DOI: 10.19721/j. cnki. 1001-7372.2019.06.022
- [5]XU Qing, CHANG Xueyang, WANG Jiawei, et al. Cloud-based connected vehicle control under time-varying delay: stability analysis and controller synthesis [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2023, 72(11): 14074. DOI: 10.1109/TVT.2023.3288522
- [6]MA Dan, CHEN Jie, CHAI Tianyou. Exact computation of maximal allowable delay for general second-order multi-agents consensus[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(18): 9681. DOI: 10.1002/rnc.5488
- [7]CAO Yulei, LI Chongtao, HE Tingyi, et al. A novel rekasius substitution based exact method for delay margin analysis of multi-area load frequency control systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2021, 36(6): 5222. DOI: 10.1109/TPWRS.2021.3076122
- [8]JIN Chi, GU Keqin, BOUSSAADA I, et al. Stability analysis of a more general class of systems with delay-dependent coefficients[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(5): 1989. DOI: 10.1109/TAC.2018.2832459
- [9]MAO Xiaochen, WANG Zaihua. Stability switches and bifurcation in a system of four coupled neural networks with multiple time delays [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 82(3): 1551. DOI: 10.1007/s11071-015-2260-5
- [10]XU Zhanrui, JIAO Xiaohong. Robust control of connected cruise vehicle platoon with uncertain human driving reaction time [J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2022, 7(2): 368. DOI: 10.1109/TIV.2021.3131641
- [11]YU Guokuan, WONG P K, HUANG Wei, et al. Distributed adaptive consensus protocol for connected vehicle platoon with heterogeneous time-varying delays and switching topologies [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(10): 17620. DOI: 10.1109/ITITS.2022.3170437
- [12]ABOLFAZLI E, BESSELINK B, CHARALAMBOUS T. On time headway selection in platoons under the MPF topology in the presence of communication delays [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(7): 8881. DOI: 10.1109/ITITS.2021.3087484
- [13]ZHANG Lu, CHEN Zhiyong, YU Xinghuo, et al. Sliding-mode-based robust output regulation and its application in PMSM servo systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2023, 70(2): 1852. DOI: 10.1109/TIE.2022.3163536
- [14]GAO Qingbin, OLGAC N. Stability analysis for LTI systems with multiple time delays using the bounds of its imaginary spectra[J]. Systems & Control Letters, 2017, 102: 112. DOI: 10.1016/j. sysconle.2017.02.003
- [15]MA Dan, CHEN Jie. Delay margin of low-order systems achievable by PID controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(5): 1958. DOI: 10.1109/TAC.2018.2853567
- [16]MA Qian, XU Shengyuan. Consensusability of first-order multiagent systems under distributed PID controller with time delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(12): 7908. DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3084366
- [17]ZHU Xu, YAN Maode, YANG Panpan, et al. Computation of the exact time delay margin for vehicle platoon under generic communication topologies[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition), 2024, 11(4): 761. DOI: 10.1016/j. jtte.2022.06.010
- [18]CEPEDA-GOMEZ R, OLGAC N. Exhaustive stability analysis in a consensus system with time delay and irregular topologies [C]// Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco: IEEE, 2011: 3369. DOI: 10.1109/ACC.2011.5990807
- [19]KOH M H, SIPAHI R. Effects of edge elimination on the delay margin of a class of LTI consensus dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(12): 4397. DOI: 10.1109/TAC.2018.2825884
- [20]JAFARIZADEH S, VEITCH D. Robust weighted-average continuous-time consensus with communication time delay [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(4): 2074. DOI: 10.1109/TCYB.2021.3118656
- [21]MA Dan, CHEN Jianqi, LU Renquan, et al. Delay consensus margin of first-order multiagent systems with undirected graphs and PD protocols[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(9): 4192. DOI: 10.1109/TAC.2020.3035556
- [22]陈阳舟,黄小龙,詹璟原. 不确定通信拓扑下多智能体系统鲁棒一致性[J]. 控制理论与应用, 2020, 37(8): 1709
CHEN Yangzhou, HUANG Xiaolong, ZHAN Jingyuan. Robust consensus of multi-agent systems with uncertain communication topology[J]. Control Theory & Applications, 2020, 37(8): 1709. DOI: 10.7641/CTA.2020.90927
- [23]朱旭,张泽华,闫茂德. 含输入时延与通信时延的车辆队列PID控制系统稳定性[J]. 交通运输工程学报, 2022, 22(3): 184
ZHU Xu, ZHANG Zehua, YAN Maode. Stability of PID control system for vehicle platoon with input delay and communication delay [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2022, 22(3): 184. DOI: 10.19818/j. cnki. 1671-1637.2022.03.015
- [24]KHANAPURI E, CHINTALAPATI T, SHARMA R, et al. Learning based longitudinal vehicle platooning threat detection, identification and mitigation[J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2023, 8(1): 290. DOI: 10.1109/TIV.2021.3122144
- [25]ZHAN Xuzhou, HU Yongjian. On the relation between Hurwitz stability of matrix polynomials and matrix-valued Stieltjes functions [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2023, 417: 114614. DOI: 10.1016/j. cam.2022.114614
- [26]SARI A, SÖNMEZ Ş, AYASUN S, et al. Delay-dependent stability analysis of multi-area LFC-EVs system[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2023, 14(3): 2178. DOI: 10.1109/TSG.2022.3212779