

基于 Legendre 伪谱法的卫星轨道转移 燃料最优控制

梅 杰, 马广富, 杨 博

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001, jmei@hit.edu.cn)

摘 要: 以真近点角为自变量, 介绍了形式简单的卫星相对运动动力学模型, 给出了和真近点角相匹配的性能指标. 利用伪谱法将最优控制问题转化为参数优化问题, 以状态转移矩阵为基础给出了仅以初末状态为约束的最优控制律, 然后针对线性化模型, 给出了以状态方程为约束的最优控制律. 设计的控制律均为解析形式, 不需要利用 NPL 算法进行计算. 仿真结果表明设计的控制律是有效的.

关键词: 燃料最优控制; 相对轨道转移; Legendre 伪谱法; 椭圆轨道

中图分类号: V412.41

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)03-0352-06

Fuel-optimal control of satellite relative orbit transfer based on legendre pseudospectral method

MEI Jie, MA Guang-fu, YANG Bo

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China, jmei@hit.edu.cn)

Abstract: This paper addresses the fuel-optimal control problem of satellite relative orbit transfer on an arbitrary elliptical orbit based on Legendre pseudospectral method. Firstly, the relative motion equations are formulated with the true anomaly as the independent variable, which are much simple. To ensure the consistency with the dynamic equations, a special cost function is proposed. Next, the optimal control problem is transformed to a parameter optimization problem using Legendre pseudospectral method. Based on the state translation matrix, a control law is obtained under the constraint of the start and final state. Then, to the linear model, another control law based on the whole state equation is presented. Unlike the methods in the literature, the above control laws are both analytical, and no computer soft is needed. Finally, the numerical results show that the control laws work well for the fuel-optimal relative orbit transfer.

Key words: fuel-optimal control; relative orbit transfer; Legendre pseudospectral method; elliptical orbit

燃料消耗是卫星相对轨道转移任务中最为关注的问题,因为它直接决定了卫星的使用寿命. 在完成的同时使燃料最优一直是学者们研究的热点. 关于优化问题的求解主要分为两类:间接法和直接法. 间接法利用极小值原理得到最优控制的必要条件,进一步得到最优轨迹,但是该方法极

不利于复杂问题的求解,主要因为 1) 收敛半径过小, 2) 协态向量的求取很困难^[1]. 直接法将最优控制问题在所选取的节点处离散化,节点处的状态和控制量作为未知量,性能指标和状态方程表示为离散点值的函数,转化为非线性规划问题(NLP),利用 NLP 算法进行求解,节点间的值则通过插值法求得. 一般采用的插值法为线性和三次样条,而利用全局正交多项式(如 Legendre 多项式^[2]、Chebyshev 多项式^[3])进行插值的方法称为伪谱法. 伪谱法由于其计算量小、收敛半径大、精度高等优点得到了很多的应用. 文献[4]利用

收稿日期: 2009-04-01.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674101).

作者简介: 梅 杰(1986—),男,博士研究生;

马广富(1963—),男,教授,博士生导师.

拟谱法求解了几类最优控制问题,文献[5]使用 Lagrange 插值基函数,提出含初值估计的串行并分段的策略,研究了高超飞行器的再入轨迹的优化问题.文献[6]利用 Legendre 多项式插值,研究了航天器有限推力轨道转移的优化问题.上述文献均需用计算机软件求解 NLP 问题.

由于卫星的相对运动极为复杂,因此相对轨道转移问题都基于各种简化的模型,国内外学者对此做了很多的研究^[7-14],当主从星的距离和主星的轨道相比很小时,可以将卫星的相对动力学方程线性化. Carter^[15]总结了描述相对轨道的线性化方程,以真近点角为变量,将方程进行了简化,并给出了目标星轨道为椭圆时动力学方程的状态转移矩阵(STM),并以此为基础分析了卫星交会的最优控制问题^[7],但是需要计算积分. Yamanaka^[8]在文献[7]的基础上提出了非奇异的 STM,形式更为简单,得到了广泛的应用.基于文献[8],文献[9]提出了燃料最优交会问题的解析解,但需要计算各种积分,并且利用级数展开式进行了近似代替,结果非常复杂.文献[10]提出基于开普勒轨道要素的 Gauss 微分方程,文献[11]利用此方程研究了编队卫星队形的最优重构问题.文献[12]用变分法求得了 J_2 摄动情况下相对运动的 STM,形式极为复杂,在此基础上,文献[13-14]研究了小推力队形重构的能量最优和和队形保持问题,前者基于伪谱法,后者基于最小二乘方法.

本文基于 Legendre 伪谱法研究了椭圆轨道下卫星相对轨道转移的燃料最优控制问题.首先以真近点角为自变量,推导了形式简单的卫星相对运动动力学模型,给出了和真近点角相匹配的性能指标,以文献[8]提出的状态转移矩阵给出了仅以初末状态为约束的最优控制律,然后针对线性化模型,给出了以状态方程为约束的最优控制律,不需要利用 NPL 算法进行计算.最后进行了仿真分析.

1 相对运动动力学模型

考虑中心引力场作用下的两个卫星,目标星位于参考椭圆轨道上,位置矢量为 \mathbf{r} ,追踪星相对于目标星的位置矢量为 $\boldsymbol{\rho}$. 定义如下 LVLH 坐标系:坐标系中心位于目标星质心, x 轴从引力中心指向目标星, y 轴在轨道平面内与 x 轴垂直并指向卫星运动方向, z 轴沿轨道面法线方向,构成右手坐标系.则在 LVLH 坐标系中,

$$\mathbf{r} = [r \ 0 \ 0]^T, \boldsymbol{\rho} = [x \ y \ z]^T.$$

假设 μ 为万有引力常数, ω 为目标星的轨道角速度大小, r 为目标星到引力场中心的距离, $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ 为两星控制加速度之差,则卫星的线性化相对运动方程可写为^[8-9]

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y + \omega^2x + 2\mu x/r^3 + u_x, \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x + \omega^2y - \mu y/r^3 + u_y, \\ \ddot{z} = -\mu z/r^3 + u_z. \end{cases}$$

可以看出,线性化模型中法线方向和轨道面内运动是解耦的.令 a 为目标星轨道半长轴, e 为轨道偏心率, f 为真近点角, h 为单位质量的角动量.上述线性化方程很难求得解析解,文献[7]以真近点角作为自变量,将方程进行了简化,下面简略介绍这一过程.对任意变量 α ,以 $\dot{\alpha}$ 表示对时间 t 求导, α' 表示对真近点角 f 求导,则有

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega\alpha', \\ \ddot{\alpha} &= \omega\omega'\alpha' + \omega^2\alpha''. \end{aligned}$$

令 $k \triangleq \mu/h^{\frac{3}{2}} = \text{const}$,则 $\mu/r^3 = k\omega^{\frac{3}{2}}$,利用下列代换:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = (1 + e\cos f) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

则线性化的模型可写成下列的简化形式:

$$\begin{cases} \tilde{x}'' = \frac{3\tilde{x}}{(1 + e\cos f)} + 2\tilde{y}' + \frac{u_x}{(k\omega^{\frac{3}{2}})}, \\ \tilde{y}'' = -2\tilde{x}' + \frac{u_y}{(k\omega^{\frac{3}{2}})}, \\ \tilde{z}'' = -\tilde{z} + \frac{u_z}{(k\omega^{\frac{3}{2}})}. \end{cases} \quad (1)$$

在卫星不控的情况下, $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T = 0$.文献[15]求得了系统无奇异的状态转移矩阵,文献[8]在文献[15]的基础上得到了形式更为简单的椭圆轨道状态转移矩阵,轨道平面内:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - e^2} \begin{bmatrix} s & 0 & 2 - 3esJ & -c \\ c + \frac{c}{\rho} & 1 & -3\rho^2J & s + \frac{s}{\rho} \\ s' & 0 & -3e\left(s'J + \frac{s}{\rho^2}\right) & -c' \\ -2s & 0 & -3(1 - 2esJ) & 2c - e' \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -3s\left(\frac{1}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right) & 0 & c - 2e & -s\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \\ -3es\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right) & 1 - e^2 & ec - 2 & -es\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \\ 3\rho + e^2 - 1 & 0 & es & \rho^2 \\ 3\left(\frac{c}{\rho} + e\right) & 0 & s & c\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) + e \end{bmatrix}_{f_0}.$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{x}'_0 \\ \tilde{y}'_0 \end{bmatrix} \triangleq \Phi(f, f_0) \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{x}'_0 \\ \tilde{y}'_0 \end{bmatrix}.$$

轨道平面外:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(f - f_0) & \sin(f - f_0) \\ -\sin(f - f_0) & \cos(f - f_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{bmatrix}.$$

其中: $\rho = 1 + e \cos f, s = \rho \sin f, c = \rho \cos f, s' = \cos f + e \cos 2f, c' = -(\sin f + e \sin 2f), J = k^2(t - t_0)$.

2 Legendre 伪谱法

$L_N(t)$ 为 N 阶 Legendre 多项式, $t \in [-1, 1]$, $L'_N(t)$ 为其导数, $t_j (j = 1, \dots, N - 1)$ 为 $L_N(t)$ 的 $N - 1$ 个零点. 以 $t_0 = -1, t_N = 1, t_j$ 为节点 (称为 LGL 点), 构造如下拉格朗日插值基函数^[2, 16]:

$$\phi_i(t) = \frac{1}{N(N+1)L_N(t_i)} \cdot \frac{(t^2 - 1)L_N(t)}{t - t_i}, \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

注意到 $\phi_i(t_j) = \delta_{ij}$.

对定义在 $[-1, 1]$ 上的光滑函数 $F(t)$, 其插值多项式为

$$F^N(t) := \sum_{i=0}^N F(t_i) \phi_i(t), \quad (2)$$

积分公式为

$$\int_{-1}^1 F^N(t) dt := \sum_{i=0}^N F(t_i) w_i.$$

其中:

$$w_i = \frac{2}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{[L'_N(t_i)]^2}, \quad (3)$$

微分公式为

$$F'(t_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij} F(t_j).$$

其中 $\mathbf{D} := (D_{ij})$ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 阶矩阵, 其元素为^[2]

$$\mathbf{D} = (D_{ij}) := \begin{cases} \frac{L'_N(t_i)}{L'_N(t_j)} \cdot \frac{1}{t_i - t_j}, & i \neq j; \\ -\frac{N(N+1)}{4}, & i = j = 0; \\ \frac{N(N+1)}{4}, & i = j = N; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4)$$

3 燃料最优控制

根据任务的不同要求, 最优控制问题有不同的性能指标. 文献[16]以 HCW 模型分析了卫星

编队飞行的最优重构问题, 采用如下式所示的性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt.$$

本文以真近点角作为自变量, 提出如下性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \int_{f_0}^{f_T} \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{(1 + e \cos f)^2} df. \quad (5)$$

其中: f_0, f_T 分别为目标星初始时刻和终端时刻的真近点角.

由于 Legendre 多项式定义在区间 $[-1, 1]$ 上, 而要解决的最优控制问题是在区间 $[f_0, f_T]$ 上, 采用如下变换将问题转换到 $t \in [-1, 1]$ 上:

$$f = 0.5[(f_T - f_0)t + (f_T + f_0)].$$

基于线性化模型, 轨道平面内的运动和轨道平面外的运动是解耦的, 为描述简便, 仅考虑轨道面内的运动. 令

$$\mathbf{X} = [\tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \tilde{x}' \quad \tilde{y}']^T, \mathbf{U} = [u_x/k^4 \quad u_y/k^4]^T,$$

并将状态向量和控制向量用式(2)近似,

$$\mathbf{X}(t) \approx \mathbf{X}^N(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{X}_i \phi_i(t), \quad (6)$$

$$\mathbf{U}(t) \approx \mathbf{U}^N(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{U}_i \phi_i(t). \quad (7)$$

性能指标式(5)近似为

$$J = \frac{(f_T - f_0)k^8}{4} \sum_{i=0}^N \frac{\mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_i}{(1 + e \cos f_i)^2} w_i, \quad (8)$$

w_i 如式(3)所示,

$$f_i = 0.5[(f_T - f_0)t_i + (f_T + f_0)].$$

3.1 仅以初末状态为约束

由于线性模型状态转移矩阵已知, 则末端状态为

$$\mathbf{X}(f_T) = \Phi(f_T, f_0) \mathbf{X}(f_0) + \int_{f_0}^{f_T} \Phi(f_T, f) \mathbf{B}(f) \mathbf{U}(f) df.$$

其中:

$$\mathbf{B}(f) = \frac{1}{(1 + e \cos f)^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则在 LGL 点离散化, 有

$$\mathbf{X}_N = \Phi_N \mathbf{X}_0 + \frac{f_T - f_0}{2} \sum_{i=0}^N \Psi_i \mathbf{U}_i w_i. \quad (9)$$

其中: $\mathbf{X}_N = \mathbf{X}(f_T), \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(f_0), \Phi_N = \Phi(f_T, f_0), \Psi_i = \Phi(f_T, f_i) \mathbf{B}(f_i)$. 式(9)即为初末状态约束, 性能指标函数如式(8)所示, 可利用 Lagrange 乘子法求解. 令

$$\tilde{J} = \frac{(f_T - f_0)k^8}{4} \sum_{i=0}^N \frac{\mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_i}{(1 + e \cos f_i)^2} w_i +$$

$$\lambda^T (\Phi_N X_0 + \frac{f_T - f_0}{2} \sum_{i=0}^N \Psi_i U_i w_i - X_N),$$

由 $\frac{\partial J}{\partial U_i} = 0$ 可得

$$U_i + (1 + e \cos f_i)^2 k^{-8} \Psi_i^T \lambda = 0.$$

代入式(9)可得

$$\lambda = - \frac{2k^8}{f_T - f_0} (\sum_{i=0}^N \Psi_i \Psi_i^T (1 + e \cos f_i)^2 w_i)^{-1} (X_N - \Phi_N X_0).$$

则

$$U_i = \frac{2(1 + e \cos f_i)^2}{f_T - f_0} \Psi_i^T (\sum_{i=0}^N \Psi_i \Psi_i^T (1 + e \cos f_i)^2 w_i)^{-1} (X_N - \Phi_N X_0). \quad (10)$$

由式(10)求得控制加速度 $U(t)$ 在 LGL 点上的值,那么任意时刻的 $U(t)$ 则通过多项式插值式(7)得到.从式(10)可以看出, $U(t)$ 仅与插值节点的选取及初末状态有关.

3.2 以状态方程为约束

考虑整个状态方程(1)(轨道面内),令 $e = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{x}' \ \tilde{y}']^T$,则有

$$\begin{cases} e'_1 = e_3, \\ e'_2 = e_4, \\ e'_3 = \frac{3e_1}{(1 + e \cos f)} + 2e_4 + \frac{u_x}{(k^4(1 + e \cos f)^3)}, \\ e'_4 = -2e_3 + \frac{u_y}{(k^4(1 + e \cos f)^3)}. \end{cases} \quad (11)$$

令

$$E_j = [e_j(f_0) \ \dots \ e_j(f_N)]^T, j = 1, 2, 3, 4;$$

$$U_x = k^{-4} [u_x(f_0) \ \dots \ u_x(f_N)]^T,$$

$$U_y = k^{-4} [u_y(f_0) \ \dots \ u_y(f_N)]^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 + e \cos f_0 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 1 + e \cos f_N \end{pmatrix}$$

由插值多项式的微分矩阵(4),注意到式(11)中均为对 f 求导,因此需要在微分矩阵式

$$\xi = [(I_1 E_{11} + I_3 E_{13})^T \ (I_1 E_{21} + I_3 E_{23})^T \ (I_1 E_{31} + I_3 E_{33})^T \ (I_1 E_{41} + I_3 E_{43})^T]^T.$$

显然,当初末状态已知时, b 为已知的常数矩阵.卫星相对轨道转移的燃料最优控制问题转化为:求解满足线性等式约束式(14)的一组变量,使得式(8)取最小值的线性二次型参数优化问题.

用 Lagrange 乘子法对上述优化问题求解,令

(4)前乘以系数 $2/(f_T - f_0)$,以下仍简记为 D .则式(11)可离散化为

$$\begin{cases} DE_1 = E_3, \\ DE_2 = E_4, \\ DE_3 = 3CE_1 + 2E_4 + C^3 U_x, \\ DE_4 = -2E_3 + C^3 U_y. \end{cases} \quad (12)$$

令 $X = [E_1^T \ E_2^T \ E_3^T \ E_4^T \ U_x^T \ U_y^T]^T$,式(12)

可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} D & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & -I & 0 & 0 \\ -3C & 0 & D & -2I & -C^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2I & D & 0 & -C^3 \end{pmatrix} X = 0 \quad (13)$$

该问题为初末状态已知的参数优化问题.将卫星状态写成分块矩阵的形式:

$$E_j = [E_{j1} \ E_{j2}^T \ E_{j3}]^T, j = 1, 2, 3, 4.$$

其中 E_{j1} 、 E_{j3} 分别为 E_j 的第一和最后一个元素,为已知量.将 $(N + 1) \times (N + 1)$ 阶单位矩阵写成下列分块形式:

$$I_{(N+1) \times (N+1)} = [I_1 \ I_2 \ I_3],$$

其中 I_1 、 I_3 分别为 $I_{(N+1) \times (N+1)}$ 的第一列和最后一列.则有以下式成立:

$$E_j = I_{(N+1) \times (N+1)} E_j = I_1 E_{j1} + I_2 E_{j2} + I_3 E_{j3}.$$

令 $\bar{X} = [U_x^T \ U_y^T \ E_{12}^T \ E_{22}^T \ E_{32}^T \ E_{42}^T]^T$ 为所有中间状态和控制加速度组成的向量,均为未知量,式(13)可写为

$$A \bar{X} = b. \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & DI_2 & 0 & -I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & DI_2 & 0 & -I_2 \\ -C^3 & 0 & -3CI_2 & 0 & DI_2 & -2I_2 \\ 0 & -C^3 & 0 & 0 & 2I_2 & DI_2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -D & 0 & I & 0 \\ 0 & -D & 0 & I \\ 3C & 0 & -D & 2I \\ 0 & 0 & -2I & -D \end{pmatrix} \xi,$$

$$\tilde{J} = 0.5 \bar{X}^T H \bar{X} + \gamma^T (A \bar{X} - b).$$

其中:

$$H = \frac{(f_T - f_0)k^8}{2} \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{w_0}{(1 + \text{ecos} f_0)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{w_{N+1}}{(1 + \text{ecos} f_{N+1})^2} \end{pmatrix}$$

为对角阵. 则有

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{X}} = 0, \frac{\partial \bar{J}}{\partial \gamma} = 0. \tag{15}$$

式(15)写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}. \tag{16}$$

从式(16)即可求得最优控制加速度和各中间状态在 LGL 点上的值, 利用式(6)、(7)即可得到最优控制和状态的连续曲线.

4 仿真分析

初始时刻目标星的轨道根数 $a = 9\,500\text{ km}$, $e = 0.3$, $i = \Omega = 30^\circ$, $\omega = 10^\circ$, $f = 0$. 初始时刻追踪星的相对位置 $[10\,000\ 10\,000]^T\text{m}$, 相对速度为 $[4\ -23.485]^T\text{m/s}$, 节点数 $N = 64$. 要求3个轨道周期之后, 两星相对速度和位置为零.

图1~3表示以状态转移矩阵(STM)为基础的初末状态约束的仿真图. 图1为STM控制加速度大小, 性能指标为 $1.9 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, 图2为线性模型下两星的相对位置和相对速度变化情况, 图3为非线性模型下两星的相对位置和相对速度变化情况.

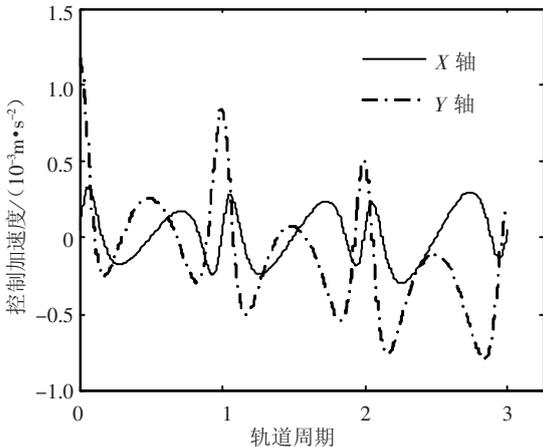


图1 控制加速度(STM)

图4~6表示以状态方程(SEQ)为基础的全状态约束的仿真图. 图4为SEQ控制加速度大小, 性能指标为 $2.95 \times 10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$, 图5为线性模型下两星的相对位置和相对速度变化情况, 图6为非线性模型下两星的相对位置和相对速度变化情况.

从上述仿真结果中可以看出, 对于线性模型, SEQ方法比较精确, 相对位置误差在5m以内, 相对速度误差在0.01m/s以内, 而将求得的控制加

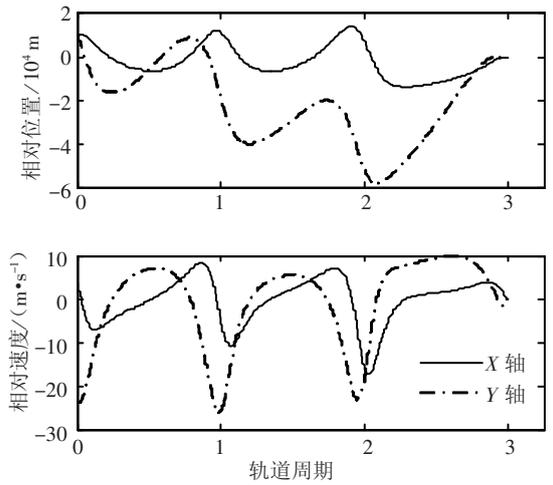


图2 相对位置与相对速度变化(线性模型)

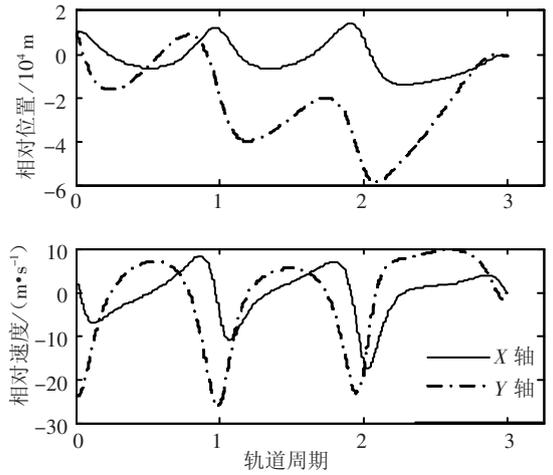


图3 相对位置与相对速度变化(非线性模型)

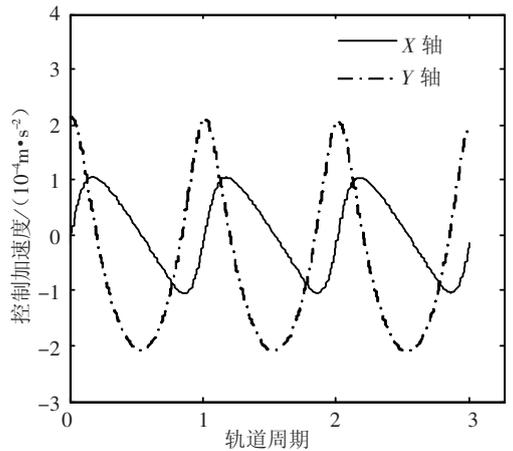


图4 控制加速度(SEQ)

速度直接用于非线性模型, 则会出现几百m的误差. 而STM方法对两种情形均存在几百m的误差. 因此本文设计的控制律可以应用于非线性模型中卫星轨道的初步转移. SEQ方法最终的性能指标比STM小, 因此对燃料的消耗更少, 而且精度较高, 但STM所得到的解析形式更为简洁.

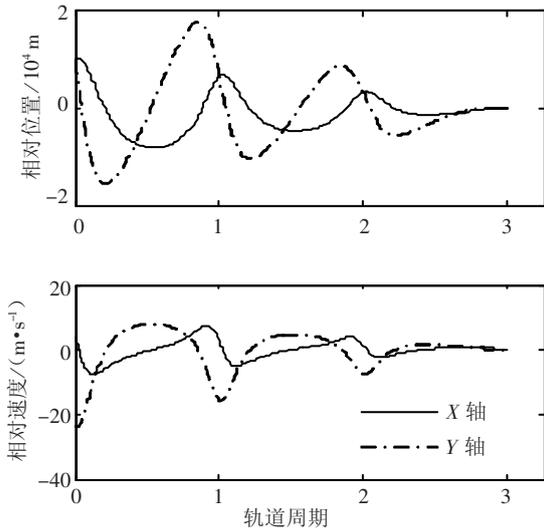


图5 相对位置与相对速度变化(线性模型)

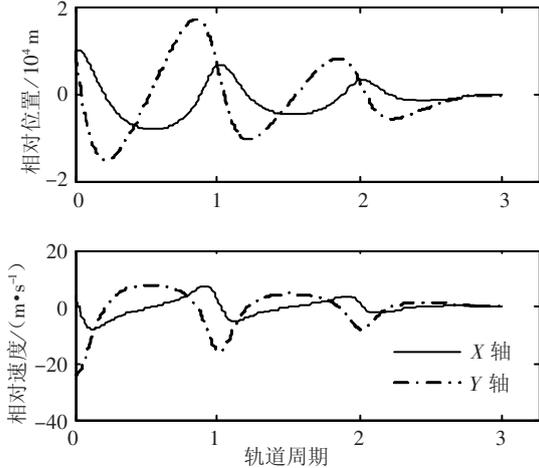


图6 相对位置与相对速度变化(非线性模型)

5 结论

1) 针对以真近点角为自变量的卫星相对运动动力学模型,给出了和真近点角相匹配的性能指标,利用状态转移矩阵给出了仅以初末状态为约束的最优控制律,然后针对线性化模型,给出了以状态方程为约束的最优控制律,设计的控制律均为解析形式,计算量小,便于在线计算。

2) 仿真结果表明设计的控制律是合理的、有效的。

3) 本文的结果主要针对线性模型,而对非线性模型及非线性约束问题,依然可以通过伪谱法转化为非线性规划问题,利用计算机软件进行求解。

参考文献:

[1] FAHROO F, ROSS M I. Costate estimation by a Legendre pseudospectral method [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(2):270-277.
 [2] ELNAGAR G, KAZEMI M A, RAZZAGHI M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems [J]. IEEE Transactions On Automatic

Control, 1995, 40(10):1793-1796.

- [3] FAHROO F, ROSS M I. Direct trajectory optimization by a estimation by a Chebyshev pseudospectral method [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1):160-166.
 [4] 童科伟,周建平,何麟书. Legendre-Gauss 拟谱法求解最优控制问题 [J]. 航空学报, 2008, 29(6):1531-1537.
 [5] 涂良辉,袁建平,罗建军. 基于伪光谱方法的有限推力轨道转移优化设计 [J]. 宇航学报, 2008, 29(4):1189-1193.
 [6] 雍恩米,唐国金,陈磊. 基于 Gauss 伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化 [J]. 宇航学报, 2008, 29(6):1766-1772.
 [7] CATER T, HUMI M. Fuel-optimal rendezvous near a point in general Keplerian orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1987, 10(6):567-573.
 [8] YAMANAKA K, ANKERSEN F. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1):60-66.
 [9] SENGUPTA P, VADALI S R. Analytical solution for power-limited optimal rendezvous near an elliptic orbit [J]. Journal of Optimiz Theory and Applications, 2008, 138:115-137.
 [10] BATTIN R H. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics [M]. New York:AIAA, 1999.
 [11] HAMEL J F, DE LAFONTAINE J. Neighboring optimum feedback control law for earth-orbiting formatting flying spacecraft. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(1):290-299.
 [12] GIM D W, ALFRIEND K T. State transition matrix of relative motion for the perturbed noncircular reference orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(6):956-971.
 [13] YAN H, ALFRIEND K T. Approximate minimum energy control laws for low-thrust formation reconfiguration [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(4):1182-1185.
 [14] YAN H, ALFRIEND K T, VADALI S R, et al. Optimal design of satellite formation relative motion orbits using least-squares methods. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(2):599-604.
 [15] CATER T E. State transition matrices for terminal rendezvous studies: brief survey and new example [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(1):148-155.
 [16] SCOTT C J, SPENCER D B. Optimal reconfiguration of satellites in formation [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2007, 44(1):230-239.