

# 梁杆结构稳定性分析中的传递矩阵模型缩减法

张宏生, 兰朋, 陆念力

(哈尔滨工业大学 机电工程学院, 哈尔滨 150001, hszhanghit@gmail.com)

**摘要:** 为了准确地分析梁杆结构的稳定性问题并降低系统刚度阵的阶数, 提出了基于传递矩阵法和精确有限元的模型缩减法. 将具有弹性支撑的非共线链式分支子结构当作一个超单元, 结合梁单元精确刚度阵, 使用传递矩阵法联系两端载荷和位移关系, 得到该超单元在整体坐标系下的刚度阵, 且该刚度阵为与普通梁单元同阶的对称方阵, 可直接组装到系统刚度阵中. 求解该缩减后系统刚度阵的行列式可得到结构的欧拉临界力. 由于子结构的内部自由度不出现在系统刚度阵中, 在保证计算精度的同时极大降低了系统刚度阵的阶数. 典型算例的稳定性分析验证了方法的正确性和有效性.

**关键词:** 有限单元法; 稳定性分析; 模型缩减; 传递矩阵法

中图分类号: O242.21

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)03-0414-04

## A model reduction technique of transfer matrix in the stability analysis of beam structures

ZHANG Hong-sheng, LAN Peng, LU Nian-li

(School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China, hszhanghit@gmail.com)

**Abstract:** To analyze the stability of beam structures accurately and reduce the order of the system stiffness matrix, a model reduction technique based on transfer matrix method and exact finite element method is presented. The noncollinear branch chain substructure with elastic supports is modeled as a super element. In combination of exact stiffness matrix of beams, the force-displacement relation between both ends is developed by the transfer matrix method. The symmetrical stiffness matrix of the super element in the global coordinate system is derived, which has the same order as the classic beam element and can be assembled into the system stiffness matrix directly. The Euler critical force of the structure can be obtained from the determination of the reduced system stiffness matrix. The internal DOFs of the substructure are not used in the model, so the order of the model is greatly reduced and the accuracy of the computation is guaranteed. The validity and efficiency of the proposed method are shown by solving various numerical examples found in the literature.

**Key words:** finite element method; stability analysis; model reduction; transfer matrix method

有限元方法的核心是单元刚度阵, 对于稳定性分析, 单元刚度阵的精度至关重要. 很多学者致力于梁杆单元刚度阵的推导. 由于推导方式的不同, 梁杆单元刚度阵大致可以分成插值形函数单元<sup>[1-2]</sup>、微分方程单元<sup>[3-4]</sup>和插值形函数并用微分方程修正单元<sup>[5-6]</sup>. 鉴于三次 Hermite 插

值<sup>[1]</sup>的梁单元精度不高, 在稳定性分析中, 需要 3、4 个单元拟合一根杆件才能获得满意的精度<sup>[7]</sup>, 但是这将极大地增加系统刚度阵的阶数, 从而导致计算费用急剧增加. 因此文献[2-7]的工作都是从单元层次改进单元的精度, 达到一个杆件只需要一个单元模拟即可. 对于由  $n$  个节点组成的平面结构, 其系统刚度阵为  $3n \times 3n$  阶矩阵. 为了降低模型的求解规模, 人们提出了基于静力凝聚的子结构法<sup>[1]</sup>, 但是该方法需要对内部自由度的分块刚度阵求逆, 当内部自由度阶数很高

收稿日期: 2008-12-23.

基金项目: 国家科技支撑计划资助项目(2006BAJ12B03-2).

作者简介: 张宏生(1981—), 男, 博士研究生;

陆念力(1955—), 男, 教授, 博士生导师.

时,求逆的工作量极大;且该方法应用于动力学分析时精度极低。

对于链式结构,可以使用传递矩阵法来联系两端的载荷和位移,Dokainish<sup>[8]</sup>首先提出了使用传递矩阵和有限元混合法,即用传递矩阵法来联系子结构的边界自由度,并用该方法分析了板的振动问题.Geradin和Chen<sup>[9-10]</sup>使用该方法并结合动态刚度阵分析了阶梯梁的振动,但是文献[9-10]仅讨论了阶梯梁(轴线共线)结构,未涉及更具一般性的具有弹性支撑的非共线结构问题。

本文结合精确单元刚度阵<sup>[4]</sup>,将非共线链式分支子结构当作一个超单元,并考虑了弹性支撑的影响.使用传递矩阵法联系边界载荷和位移,再得到该超单元的刚度阵.由于传递矩阵法采用矩阵连乘,避免了高阶求逆运算,在保证精度的同时缩减了模型的计算规模,本文应用该方法对梁杆结构进行了稳定性分析。

### 1 传递矩阵模型缩减法

由  $n$  个单元组成具有弹性支撑的非共线链式分支子结构平面模型如图1所示,其中第  $i$  个单元与整体坐标系  $x$  轴夹角为  $\theta_i$ ,且在第  $i$  个单元的右端作用有两个刚度分别为  $k_i^x$  和  $k_i^y$  的位移弹簧和一个刚度为  $k_i^m$  的扭转弹簧。

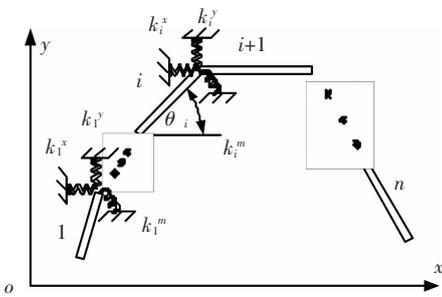


图1 链式分支子结构力学模型

第  $i$  个单元在单元局部坐标系下的单元平衡方程以分块矩阵表示为

$$\bar{\mathbf{K}}_i \bar{\mathbf{U}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{i,11}^e & \bar{\mathbf{K}}_{i,12}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{i,21}^e & \bar{\mathbf{K}}_{i,22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_i^L \\ \bar{\mathbf{U}}_i^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i^L \\ \bar{\mathbf{F}}_i^R \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{F}}_i. \quad (1)$$

单元载荷和位移在单元局部坐标系和整体坐标系的转换关系为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_i = \lambda_i \mathbf{U}_i, \\ \mathbf{F}_i = \lambda_i^T \bar{\mathbf{F}}_i, \\ \mathbf{K}_i = \lambda_i^T \bar{\mathbf{K}}_i \lambda_i. \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\lambda_i$  为第  $i$  个单元的方向转换阵。

将式(2)代入式(1),得整体坐标系下单元平

衡方程,并以分块矩阵表示为

$$\mathbf{K}_i \mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{i,11}^e & \mathbf{K}_{i,12}^e \\ \mathbf{K}_{i,21}^e & \mathbf{K}_{i,22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^L \\ \mathbf{U}_i^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i^L \\ \mathbf{F}_i^R \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_i. \quad (3)$$

将式(3)写成传递矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^R \\ \mathbf{F}_i^R \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^L \\ \mathbf{F}_i^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i,11} & \mathbf{R}_{i,12} \\ \mathbf{R}_{i,21} & \mathbf{R}_{i,22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^L \\ \mathbf{F}_i^L \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中:

$$\mathbf{R}_{i,11} = -(\mathbf{K}_{i,12}^e)^{-1} \mathbf{K}_{i,11}^e,$$

$$\mathbf{R}_{i,22} = \mathbf{K}_{i,22}^e (\mathbf{K}_{i,12}^e)^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{i,12} = (\mathbf{K}_{i,12}^e)^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{i,21} = \mathbf{K}_{i,21}^e - \mathbf{K}_{i,22}^e (\mathbf{K}_{i,12}^e)^{-1} \mathbf{K}_{i,11}^e.$$

注意到第  $i$  个单元右端和第  $i+1$  个单元左端载荷和位移关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{i+1}^L \\ \mathbf{F}_{i+1}^L \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^R \\ \mathbf{F}_i^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ -\mathbf{K}_{s,i} & -\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^R \\ \mathbf{F}_i^R \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{I}_3$  和  $\mathbf{0}_3$  分别为3阶单位阵和零阵,  $\mathbf{K}_{s,i}$  为由3个弹性支撑刚度组成的3阶对角阵,

$$\mathbf{K}_{s,i} = \text{diag}(k_i^x, k_i^y, k_i^m).$$

综合式(4)和(5),得到相邻单元间载荷和位移传递关系为

$$\begin{cases} \mathbf{T}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{R}_i, \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{i+1}^L \\ \mathbf{F}_{i+1}^L \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^L \\ \mathbf{F}_i^L \end{Bmatrix}. \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)传递关系连乘,可以得出具有弹性支撑的非共线链式分支子结构模型始末节点间载荷和位移传递关系为

$$\begin{cases} \mathbf{T}^S = \mathbf{R}_n \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{T}_i, \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n^R \\ \mathbf{F}_n^R \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^S \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^L \\ \mathbf{F}_1^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^S & \mathbf{T}_{12}^S \\ \mathbf{T}_{21}^S & \mathbf{T}_{22}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^L \\ \mathbf{F}_1^L \end{Bmatrix}. \end{cases} \quad (7)$$

从式(7)中解出该链式子结构的刚度阵为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^L \\ \mathbf{F}_n^R \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^L \\ \mathbf{U}_n^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^L \\ \mathbf{U}_n^R \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中:

$$\mathbf{D}_{11} = -(\mathbf{T}_{12}^S)^{-1} \mathbf{T}_{11}^S,$$

$$\mathbf{D}_{22} = \mathbf{T}_{22}^S (\mathbf{T}_{12}^S)^{-1},$$

$$\mathbf{D}_{12} = (\mathbf{T}_{12}^S)^{-1},$$

$$\mathbf{D}_{21} = \mathbf{T}_{21}^S - \mathbf{T}_{22}^S (\mathbf{T}_{12}^S)^{-1} \mathbf{T}_{11}^S.$$

由于本文式(2)的步骤,即将单元局部坐标系下的载荷和位移转到整体坐标系下,可以方便地处理非共线链式分支子结构的载荷和位移传递问题.不难证明,式(8)表示的超单元刚度阵仍然

是对称方阵,可以利用其对称性加速求解.并且式(8)的刚度阵为总体坐标下刚度阵,可以按照“对号入座”原则直接组装到系统刚度阵中;由于该刚度阵为 $6 \times 6$ 阶对称方阵,当该子结构节点很多时,本文方法将极大地缩减系统刚度阵的阶数.当超单元边界上载荷和位移已经求出时,可以利用式(7)依次求出每个内部单元的载荷和位移.

## 2 算例

使用本文方法,对3个典型算例进行稳定性分析,为了便于比较,引入无量纲稳定系数  $m = P_{cr}L^2/EI$ ,其中  $P_{cr}$  为欧拉临界力.

**例1** 计算两端铰支梁在弹性基础上的欧拉临界力.应用5个均匀分布的位移弹簧模拟弹性基础,如图2所示.  $EI$  和  $K_y$  分别表示梁的弯曲刚度和弹簧常数,梁的总长为  $L$ .  $K_y$  由基础模量  $\beta$  决定,  $K_y = L\beta/6$ . 对于基础模量  $\beta = 80E_1/L^4$ , Timoshenko<sup>[11]</sup>使用能量法给出  $m = 17.9748$ ; Li<sup>[12]</sup>使用传递矩阵法得出  $m = 17.8666$ . 使用 ANSYS 的 Beam3 单元模拟杆并用 Link1 单元模拟弹簧,为达到满意的计算精度,需要将每根杆离散为3个梁单元.应用精确有限元法<sup>[4]</sup>,每根杆只需要划分为1个单元,系统共有6个单元,若忽略轴向刚度,考虑边界条件后将组成  $12 \times 12$  的系统刚度阵.而应用本文传递矩阵模型缩减法,并使用文献[4]的 Bernoulli-Euler 梁精确刚度阵,将6根杆和5个弹簧形成一个超单元,若忽略轴向刚度,考虑边界条件后由该超单元组成的系统刚度阵为  $2 \times 2$ .各种计算方法及其结果比较如表1所示.

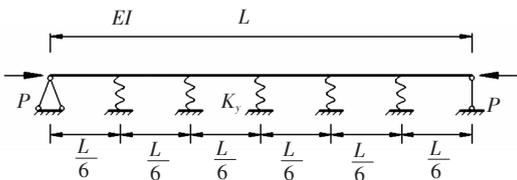


图2 5个弹簧支撑的两端铰支梁

表1 五弹簧支撑的两端铰支梁计算结果比较

计算方法	系统刚度阵规模	$m$
Timoshenko	-	17.9748
Li	-	17.8666
ANSYS	$36 \times 36$	17.9746
精确有限元	$12 \times 12$	17.9746
本文	$2 \times 2$	17.9746

**例2** 如图3所示,由3根参数相同的杆件呈一定夹角组成3段折臂压杆结构,在顶端作用垂直向下的载荷  $P$ ,各杆长度均为  $L$ ,梁的弯曲刚度

为  $EI$ , 求取该结构的欧拉临界力.使用 ANSYS 的 Beam3 单元模拟杆并将每根杆离散为3个单元,整个系统共有9个单元.应用精确有限元法<sup>[4]</sup>,每根杆只需要划分为1个单元,系统共有3个单元,考虑边界条件后将组成  $9 \times 9$  的系统刚度阵.而应用本文传递矩阵模型缩减法,并使用文献[4]的 Bernoulli-Euler 梁精确刚度阵,将3根呈一定夹角的杆形成1个超单元,考虑边界条件后由该超单元组成的系统刚度阵为  $3 \times 3$ .各种计算方法及其结果比较如表2所示.

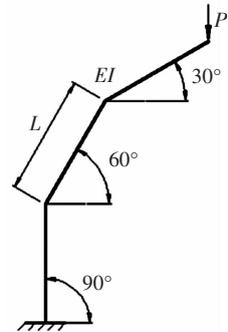
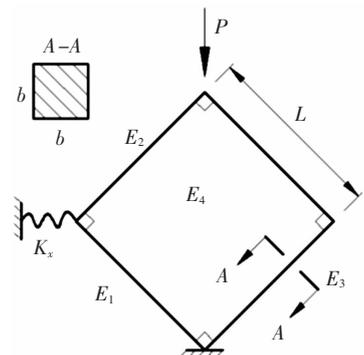


图3 三段折臂压杆结构

表2 三段折臂压杆结构计算结果比较

计算方法	系统刚度阵规模	$m$
ANSYS	$27 \times 27$	0.41754
精确有限元	$9 \times 9$	0.41754
本文	$3 \times 3$	0.41754

**例3** 如图4所示的菱形框架,左端作用1个弹簧常数为  $K_x$  的位移弹簧,底端固定,顶端作用垂直向下的载荷  $P$ ,求取该结构的欧拉临界力.使用 ANSYS 的 Beam3 单元模拟杆并将每根杆离散为1个单元,整个系统共有12个梁单元.应用精确有限元法<sup>[4]</sup>,每根杆只需要划分为1个单元,系统共有4个单元,考虑边界条件后将组成  $9 \times 9$  的系统刚度阵.而应用本文传递矩阵模型缩减法,并使用文献[4]的 Bernoulli-Euler 梁精确刚度阵,将单元  $E_1$ 、 $E_2$  和弹簧形成一个超单元,并将  $E_3$  和



$E = 200 \text{ GPa}$   $L = 1 \text{ m}$   $b = 0.05 \text{ m}$   $K_x = 5E7 \text{ N/m}$

图4 菱形框架

$E_4$  形成另 1 个超单元,整个系统由 2 个超单元组成,考虑边界条件后由 2 个超单元组成的系统刚度阵为  $3 \times 3$ . 各种计算方法及其结果比较如表 3 所示.

表 3 菱形框架计算结果比较

计算方法	系统刚度阵规模	$m$
ANSYS	$33 \times 33$	15.921 97
精确有限元	$9 \times 9$	15.917 26
本文	$3 \times 3$	15.9172 6

由表 1~3 可以看出,精确有限元法因为能够将每根杆只用一个单元模拟即可得到满意精度,所以较三次 Hermite 插值<sup>[1]</sup>的梁单元计算精度高,同时减少了系统刚度阵的规模.应用本文传递矩阵模型缩减法并结合梁单元精确刚度阵,在保证精度的基础上极大地缩减了系统刚度阵的阶数.算例 1~3 成功地解决了弹性支撑阶梯柱、开环和闭环结构的稳定性分析问题.

### 3 结 论

1) 本文应用传递矩阵模型缩减法将具有弹性支撑的非共线链式分支子结构当作一个超单元,将单元局部坐标系下的载荷和位移转到整体坐标系下,并结合精确单元刚度阵,使用传递矩阵法联系边界节点上的载荷和位移,得到超单元对称的刚度阵.

2) 该超单元刚度阵和普通梁杆单元刚度阵同阶,且位于总体坐标系下,可以直接组装系统刚度阵.

3) 对弹性支撑阶梯柱、开环和闭环结构 3 个稳定性算例分析表明,本文方法在保证精度的基础上,使系统刚度阵的规模得到有效缩减,适用于梁杆结构的稳定性分析.

### 参考文献:

[1] BATHE K J. Finite element procedures [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996:397-419.

[2] 夏拥军, 陆念力. 梁杆结构二阶效应分析的一种新型梁单元[J]. 工程力学, 2007, 24(7):39-43.

[3] BANERJEE J R, WILLIAMS F W. Exact Bernoulli-Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(9):1615-1628.

[4] 陆念力, 兰朋, 李良. 二阶理论条件下的梁杆系统精确有限元方程及应用[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 1998, 31(4):67-74.

[5] CHAN Siu Lai, ZHOU Zhi Hua. Pointwise equilibrating polynomial element for nonlinear analysis of frames[J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(6):1703-1717.

[6] 许红胜, 周绪红, 舒兴平. 空间钢框架几何非线性分析的一种新单元[J]. 工程力学, 2003, 20(4):39-44.

[7] SO A K W, CHAN Siu Lai. Buckling and geometrically nonlinear analysis of frames using one element/member [J]. Journal of Constructional Steel Research, 1991, 20(4):271-289.

[8] DOKAINISH M A. New approach for plate vibrations: combination of transfer matrix and finite-element technique[J]. Journal of Engineering for Industry, Transaction of the ASME, 1972, 94(2):526-530.

[9] GERADIN M, CHEN S L. An exact model reduction technique for beam structures: combination of transfer and dynamic stiffness matrices [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 185(3):431-440.

[10] CHEN S L, GERADIN M, LAMINE E. An improved dynamic stiffness method and modal analysis for beam-like structures [J]. Computers & Structures, 1996, 60(5):725-731.

[11] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability [M]. New York: McGraw-Hill, 1961:100-104.

[12] Li Q S. Buckling of multi-step non-uniform beams with elastically restrained boundary conditions [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2001, 57(7):753-777.

(编辑 杨波)