第42卷 第4期
2010年4月
哈尔滨工业大学学报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 42 No. 4
Apr. 2010

SH 波入射时非等腰三角形结构与基础相互作用

邱发强[1,2],王慧文[3],王 雪[4]

(1. 中南大学 土木建筑学院,长沙 410075,rainy95@ sina. com;2. 厦门市建筑科学研究院集团股份有限公司,福建 厦门 361004;3. 黑龙江工程学院, 哈尔滨 150050;4. 东北林业大学,哈尔滨 150040)

摘 要: 利用复变函数和坐标移动方法研究了SH 波入射时非等腰三角形结构与基础的相互作用. 建立数学模型,并将模型分割为两部分,其一为非等腰三角形和半圆形组成的区域Ⅰ,其余为区域Ⅱ;在区域Ⅰ内构造一个满足非等腰三角形两边应力自由的驻波解,在区域Ⅱ内构造满足水平边界应力自由的散射波;利用"契合"思想,通过移动坐标在区域Ⅰ、Ⅱ的公共边界实现位移和应力的连续,建立求解该问题的无穷代数方程组;数值分析结果表明:入射波的物理参数对非等腰三角形结构表面位移的影响显著. 结构对SH 波在弹性空间传播的影响突出. 较"软"的结构相对较"硬"的结构吸收"能量"较多,反射"能量"水平差,使表面位移大小及出现地点不同.

关键词: SH 波散射;非等腰三角形结构;移动坐标;复变函数

中图分类号: O343. 1;P313. 5 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367 - 6234(2010)04 - 0634 - 05

Interaction of scalene triangular structure to soil with incident SH Waves

QIU Fa-qiang[1,2], WANG Hui-wen[3], WANG Xue[4]

(1. School of Civil Engineering & Architecture, Central South University, Changsha 410075, China, rainy95@ sina. com; 2. Xiamen Academy of Building Research, Xiamen 361004, China; 3. Heilongjiang Institute of Technology, Harbin 150050, China; 4. Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract: The ground motion of an scalene triangular dike impacted by SH waves is discussed. The methods of complex function and moving coordinate system as well as a simple mathematic model are used here. The model is divided into two parts, a wave function which satisfies the condition of stress free at the triangular wedges is constructed in one part, and a scattered wave function which satisfies the condition of stress free at the horizontal surface is constructed in the other part. Then the moving coordinate system is used to transform the solution of this problem into a "conjunction" problem. Finally, the solution of the problem is reduced to a series of algebraic equations and can be solved numerically. Numerical examples show that the influence of incident SH wave characters on the ground motion is great, and the influence of structure on incident SH wave is significant. Compared with stiff structures, the values of ground motion and the points where they happen for soft structures are different greatly because of their good capability of energy absorption.

Key words: scattering of SH-waves; scalene triangular structure; moving coordinate system; complex function

近年来,与基础和结构相互作用相关的分析方法有了很大的发展[1]. 研究范围也从高层建筑逐步扩展到核电站的反应堆建筑、水坝、海洋平台、桥梁等一系列建筑物[2]. 建立二维反平面模型的波动方程,解决建筑物与基础的相互作用问题已经取得了不少成果[3-8].

本文利用波动方程的复变函数理论[9],采用移动坐标的方法求解了非等腰三角形坝体结构与基础相互作用的问题,给出了分析例题和数值结果.

1 问题的表述

非等腰三角形结构如图1 所示,图中三角形凸起

收稿日期: 2009 - 08 - 12.
基金项目: 中南大学博士后科研基金资助项目.
作者简介: 邱发强(1977—),男,博士后.

顶点记为 O_1,两边边界分别记为 D_A,D_B,坡度分别为 $1:n_1$,$1:n_2$($n_1<n_2$),底边中点记为 O,O 点距 O_1 在三角形底边上的投影距离为 $\Delta=(n_2-n_1)a/(n_2+n_1)$. 采用“分区”思想将整个求解区域分割成两部分,如图2所示,区域I为“三角形+半圆形”区域,余下部分为区域II. D 为两个区域的“公共边界”,应满足应力、位移连续的“契合”条件.

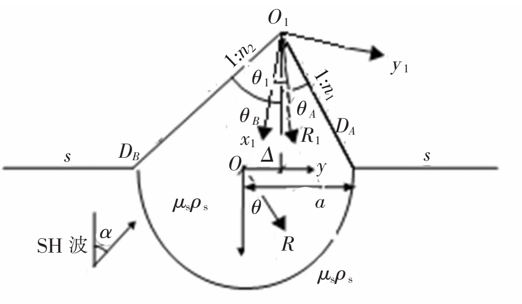


图 1　非等腰三角凸起结构示意图

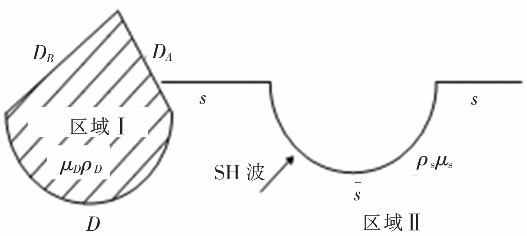


图 2　模型分区示意图

2　非等腰三角形区域内的驻波

在 I 区内,以三角形顶点 O_1 和底边中点 O 为原点分别建立 Cartesian 坐标系,记为 $X-O-Y$,$X_1-O_1-Y_1$,分别对应复平面$(Z,\bar{Z})$和$(Z_1,\overline{Z_1})$,其中 O_1x_1 轴为顶角平分线,如图 1 所示. 在区域 I 内构造的满足三角形斜边应力自由的驻波函数 W^D 可表示为

$$W^D(Z_1,\overline{Z_1})=W_0\sum_{m=0}^{\infty}\{D_m^{(1)}J_{2mp}(k_D|Z_1|)[(Z_1/|Z_1|)^{2mp}+(Z_1/|Z_1|)^{-2mp}]+D_m^{(2)}J_{(2m+1)p}(k_D|Z_1|)\cdot[(Z_1/|Z_1|)^{(2m+1)p}-(Z_1/|Z_1|)^{-(2m+1)p}]\}.\tag{1}$$

利用移动坐标法,在复平面$(Z,\bar{Z})$上,式(1)可写成

$$W^D(Z,\bar{Z})=W_0\sum_{m=0}^{\infty}\left\{D_m^{(1)}J_{2mp}(k_D|(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}|)\cdot\left[\left(\frac{(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{|(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}|}\right)^{2mp}+\left(\frac{(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{|(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}|}\right)^{-2mp}\right]+D_m^{(2)}J_{(2m+1)p}(k_D|(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}|)\cdot\left\{\left[\left(\frac{(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{|(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}|}\right)^{(2m+1)p}-\left(\frac{(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{|(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}|}\right)^{-(2m+1)p}\right]\right\}\right.\tag{2}$$

式(1),(2)中,

$$p=\frac{\pi}{\theta_A+\theta_B},\ q=\frac{\arctan n_2-\arctan n_1}{2},$$

$$d_1=\frac{2}{n_1+n_2}-\frac{n_2-n_1}{n_1+n_2}\mathrm{i}.$$

式(2)即为在区域 I 中,满足斜边应力自由的驻波函数,其相应的应力表达式为

$$\tau_{rz}^D=\frac{\mu_Dk_DW_0}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\{D_m^{(1)}P_{2mp}[(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}]+D_m^{(2)}U_{(2m+1)p}[(Z+d_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}]\}.$$

其中:

$$\begin{aligned}P_t(s)=&J_{t-1}(k_D|s|)[s/|s|]^{t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+q)}-J_{t+1}(k_D|s|)[s/|s|]^{-t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+q)}+\\&J_{t-1}(k_D|s|)[s/|s|]^{1-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+q)}-J_{t+1}(k_D|s|)[s/|s|]^{t+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+q)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_t(s)=&J_{t-1}(k_D|s|)[s/|s|]^{t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+q)}+J_{t+1}(k_D|s|)[s/|s|]^{-t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+q)}-\\&J_{t-1}(k_D|s|)[s/|s|]^{1-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+q)}-J_{t+1}(k_D|s|)[s/|s|]^{t+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+q)}.\end{aligned}$$

3　区域 II 内的波函数

在区域 II 内,满足半空间表面应力的自由散射波 $W^{(S)}$ 及相应的应力为

$$\begin{aligned}W^{(S)}(Z,\bar{Z})=&W_0\sum_{m=0}^{\infty}\{B_m^{(1)}H_{2m}(k_S|Z|)\cdot[(Z/|Z|)^{2m}+(Z/|Z|)^{-2m}]+\\&B_m^{(2)}H_{2m+1}(k_S|Z|)[(Z/|Z|)^{(2m+1)}-(Z/|Z|)^{-(2m+1)}]\},\end{aligned}$$

$$\tau_{rz}^{(S)}=\frac{\mu_Sk_SW_0}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\{B_m^{(1)}Q_{2m}^{(S)}(Z)+B_m^{(2)}V_{2m+1}^{(S)}(Z)\}.$$

其中:

$$\begin{aligned}Q_t(s)=&H_{t-1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-H_{t+1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{-t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\\&H_{t-1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{1-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-H_{t+1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{t+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_t(s)=&H_{t-1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+H_{t+1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{-t-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\\&H_{t-1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{1-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-H_{t+1}^{(1)}(k_S|s|)[s/|s|]^{t+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.\end{aligned}$$

而入射波和反射波及相应的应力可写为

$$\begin{aligned}W^{i+r}=&2J_0(k_S|Z|)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\cdot J_{2m}(k_S|Z|)\cos2m\alpha\{(Z/|Z|)^{2m}+\\&(Z/|Z|)^{-2m}\}+2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot\end{aligned}$$

$$J_{2m+1}(k_S|Z|)\sin(2m+1)\alpha\{(Z/|Z|)^{2m+1}-(Z/|Z|)^{-(2m+1)}\},$$

$$\tau_{rz}^{i+r}=\mu_S k_S W_0\times(J_{-1}(k_S|Z|)-J_1(k_S|Z|))/2\cdot\{[Z/|Z|]^{-1}e^{i\theta}+[Z/|Z|]^{1}e^{-i\theta}\}+\frac{\mu_S k_S W_0}{2}\sum_{m=1}^{\infty}2(-1)^m\cos2m\alpha P_{2m}^{(S)}(Z)+\frac{\mu_S k_S W_0}{2}\sum_{m=0}^{\infty}2(-1)^m\sin(2m+1)\alpha U_{2m+1}^{(S)}(Z).$$

4 问题求解及定解方程组

根据“契合”思想，在公共边界 D 上应该满足位移和应力连续条件. 即

$$\begin{cases}W^D(Z,\bar{Z})=W^{i+r}+W^S,\\ \tau_{rz}^D=\tau_{rz}^{i+r}+\tau_{rz}^S.\end{cases}$$

利用位移和应力的正弦、余弦部分一一对应关系进行傅里叶展开，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{mn}^{(1)}D_m^{(1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\eta_{mn}^{(1)}B_m^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{mn}^{(1)},$$

$$\frac{\mu_D k_D}{\mu_S k_S}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{mn}^{(11)}D_m^{(1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\eta_{mn}^{(11)}B_m^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{mn}^{(11)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{mn}^{(2)}D_m^{(2)}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\eta_{mn}^{(2)}B_m^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{mn}^{(2)},$$

$$\frac{\mu_D k_D}{\mu_S k_S}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{mn}^{(21)}D_m^{(2)}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\eta_{mn}^{(21)}B_m^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{mn}^{(21)},$$

其中：

$$\psi_{mn}^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}J_{2mp}(k|(Z+d_1)e^{iq}|)\cdot\left\{\left[\frac{(Z+d_1)e^{iq}}{|(Z+d_1)e^{iq}|}\right]^{2mp}+\left[\frac{(Z+d_1)e^{iq}}{|(Z+d_1)e^{iq}|}\right]^{-2mp}\right\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\eta_{mn}^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}H_{2m}^{(1)}(k|Z|)\cdot\left\{\left[\frac{Z}{|Z|}\right]^{2m}+\left[\frac{Z}{Z}\right]^{-2m}\right\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\varphi_{mn}^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2J_0(k|Z|)e^{-in\theta}d\theta, & m=0;\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2(-1)^m J_{2m}(k|Z|)\cdot\cos2m\alpha\{[Z/|Z|]^{2m}+[Z/|Z|]^{-2m}\}e^{-in\theta}d\theta, & m>0;\end{cases}$$

$$\psi_{mn}^{(11)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{P_{2mp}((Z+d_1)e^{iq})\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\eta_{mn}^{(11)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{Q_{2m}(Z)\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\varphi_{mn}^{(11)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\times\frac{J_{-1}(k|Z|)-J_1(k|Z|)}{2}\cdot\{[Z/|Z|]^{-1}e^{i\theta}+[Z/|Z|]^{1}e^{-i\theta}\}e^{-in\theta}d\theta, & m=0;\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2(-1)^m\cos2m\alpha P_{2m}^{*}(Z)e^{-in\theta}d\theta, & m>0;\end{cases}$$

$$\psi_{mn}^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}J_{(2m+1)p}(k|(Z+d_1)e^{iq}|)\cdot\left\{\left[\frac{(Z+d_1)e^{iq}}{|(Z+d_1)e^{iq}|}\right]^{(2m+1)p}-\left[\frac{(Z+d_1)e^{iq}}{|(Z+d_1)e^{iq}|}\right]^{-(2m+1)p}\right\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\eta_{mn}^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}H_{2m+1}^{(1)}(k|Z|)\{[Z/|Z|]^{2m+1}-[Z/Z]^{-(2m+1)}\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\varphi_{mn}^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2(-1)^m J_{2m+1}(k|Z|)\sin(2m+1)\alpha\left\{\left[\frac{Z}{|Z|}\right]^{2m+1}-\left[\frac{Z}{|Z|}\right]^{-2m-1}\right\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\psi_{mn}^{(21)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{U_{(2m+1)p}((Z+d_1)e^{iq})\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\eta_{mn}^{(21)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{V_{2m+1}(Z)\}e^{-in\theta}d\theta;$$

$$\varphi_{mn}^{(21)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2(-1)^m\sin(2m+1)\alpha\{U_{2m+1}^{*}(Z)\}e^{-in\theta}d\theta.$$

5 地面位移幅值

由于入射 SH 波的作用，区域 I 内的驻波为 W^D，而弹性半空间区域 II 中的总波场则可以写成

$$W=W^{(i)}+W^{(r)}+W^{(S)}.$$

而入射波的频率 ω 可与区域 I 中半圆的半径 a 组合成为入射波波数，即入射波波数为

$$ka=\omega a/c_S=2\pi a/\lambda \text{ 或 } \eta=2a/\lambda.$$

6 算例及结果分析

作为算例，假设三角形底边的一半 $a=1.0$，$y/a=\pm1$ 表示凸起地形与水平面的相交位置，$y/a=\Delta$ 对应着凸起地形的顶点，而 $|y/a|<1.0$ 和 $|y/a|>1.0$ 则分别代表凸起地形和水平面上各点的位移幅值.

图 3 和图 4 分别给出了结构相对基础较“软”($\rho_D/\rho_S=2/3,\mu_D/\mu_S=1/6$) 和较“硬”($\rho_D/\rho_S=3/2,\mu_D/\mu_S=6$) 情况下，$\eta=0.5$ 的入射波以 $\alpha=0°,45°,90°$ 入射，顶角 138.2°，$\Delta\theta=\theta_B-\theta_A=10°$ 或 20°的结构内各特征点的位

移幅值;图 5 和图 6 则分别给出了结构相对基础较"软"和较"硬"情况下,入射波以 $\alpha = 0°$ 入射,顶角 138.2°,$\Delta\theta = 10°$ 或 20° 的坝体结构表面位移幅值变化三维图.

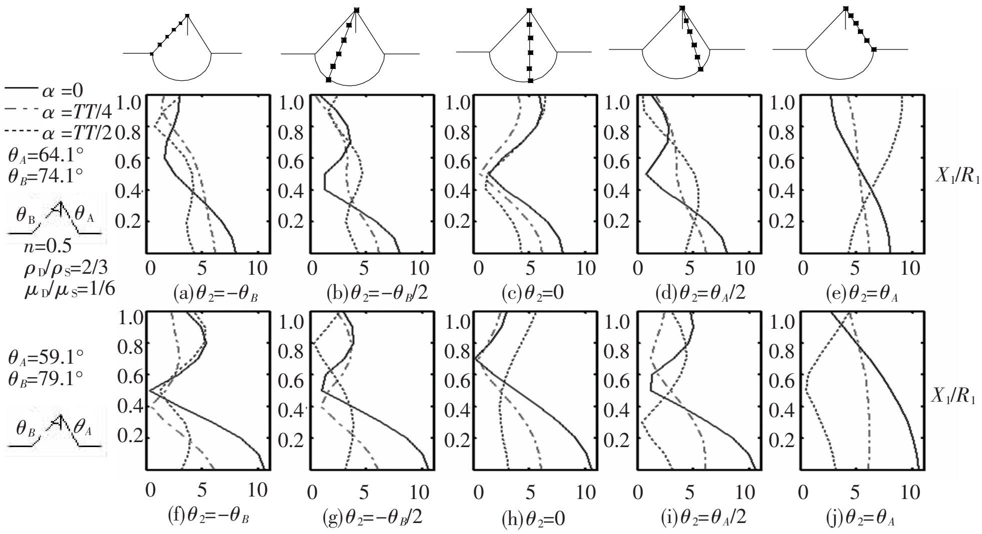


图 3　相对基础较"软"的结构位移幅值

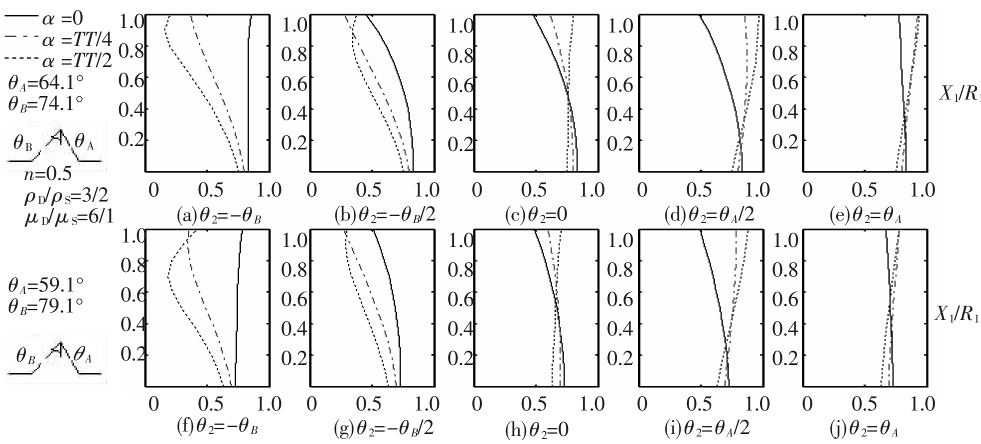


图 4　相对基础较"硬"的结构位移幅值

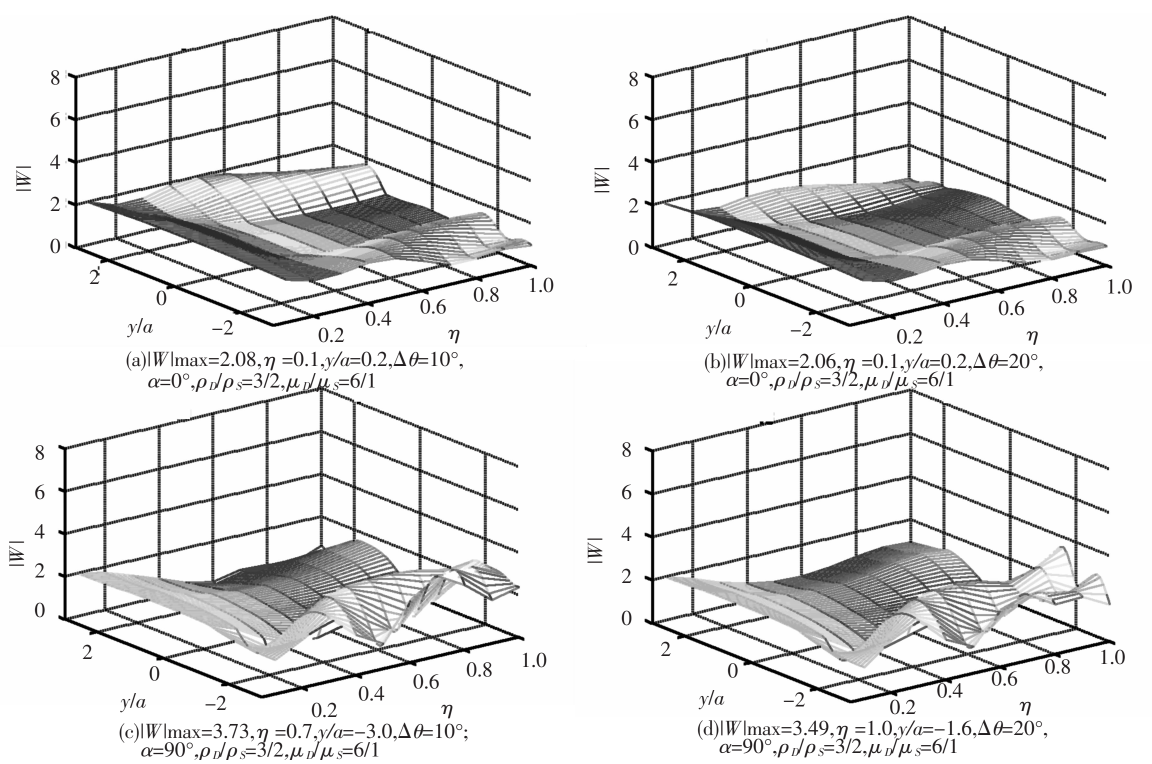
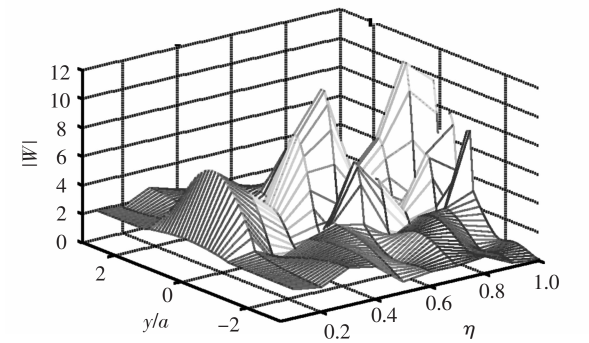
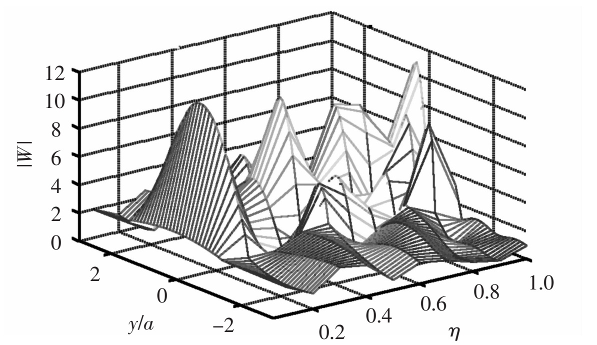


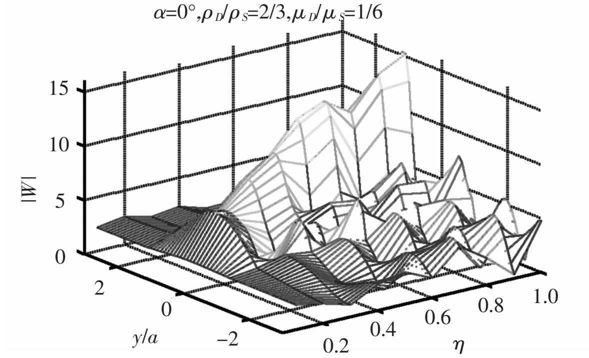
图 5　垂直和水平入射时相对基础较"硬"的结构表面位移幅值三维图



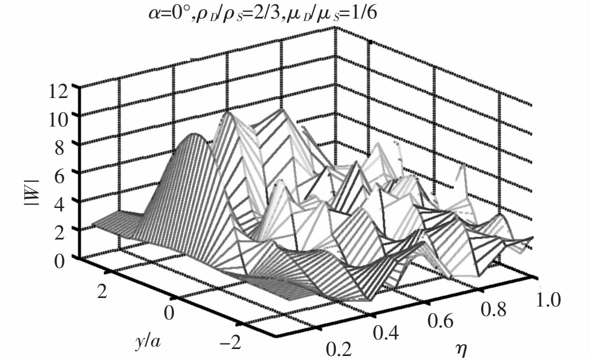
(a)$|W|$max=11.22, η =0.9, y/a=0.3, $\Delta\theta$=10°, α=0°, ρ_D/ρ_S=2/3, μ_D/μ_S=1/6



(b)$|W|$max=11.35, η =0.2, y/a=0.5, $\Delta\theta$=20°, α=0°, ρ_D/ρ_S=2/3, μ_D/μ_S=1/6



(c)$|W|$max=15.2, η =1.0, y/a=1.2, $\Delta\theta$=10°, α=90°, ρ_D/ρ_S=2/3, μ_D/μ_S=1/6



(d)$|W|$max=10.2, η =0.4, y/a=1.3, $\Delta\theta$=20°, α=90°, ρ_D/ρ_S=2/3, μ_D/μ_S=1/6

图6　垂直和水平入射时相对基础较"软"的结构表面位移幅值三维图

1)当SH波垂直入射时,图3和5表明“软”结构的地表最大位移幅值总是出现在顶点附近($\Delta\theta$ = 10°, y/a = 0.3; $\Delta\theta$ = 20°, y/a = 0.5);图4和6表明“硬”结构的地表最大位移幅值则总是出现在顶点的左侧结构表面(对于 $\Delta\theta$ = 10°, $-1.0 \leqslant y/a \leqslant 0.3$;对于 $\Delta\theta$ = 20°, $-1.0 \leqslant y/a \leqslant 0.5$).

2)由图5到图6可知,“软”坝结构的表面位移幅值远远大于“硬”坝. 当 $\Delta\theta$ = 10°时,“软”、“硬”坝结构的 $|W|_{max}$ 分别为15.2和3.73且都出现在 α = 90°,相差4.075倍;当 $\Delta\theta$ = 20°时,“软”坝结构的 $|W|_{max}$ 为11.35(α = 0°)和“硬”坝为3.49(α =90°)相差3.25倍.

7　结　论

1)对于非等腰三角形结构,波数、入射角等入射波的物理参数对结构表面位移的影响非常显著. 结构对SH波在弹性空间传播的影响突出,较“软”的结构相对较“硬”的结构吸收“能量”较多,反射“能量”水平差,从而影响结构表面位移幅值大小差异及出现地点的不同.

2)本文提供的方法理论上没有问题,但采用的计算方法适用于三角形顶角 >60°的情况,顶角越大精度越高. 顶角 <60°的情况需要另外研究其计算方法.

参考文献:

[1]　胡聿贤. 地震工程学[M]. 北京:地震出版社,2006.

[2]　申爱国. 土 - 结构动力相互作用研究及其应用[D]. 大连:大连理工大学,1996.

[3]　林皋,关飞. 结构 - 地基相互作用对重力坝地震反应的影响[J]. 地震工程与工程振动,1991,11(4):65 - 76.

[4] KOJIC S, TRIFUNAC M D. Earthquake stresses in arch dams:I - theory and antiplane excitation[J]. J Eng Mech, ASCE, 1991,117(3):553 - 574.

[5] LUCO I E. Dynamic interaction of a shear wall with the soil[J]. J Eng Mech, ASCE,1969,95:333 - 346.

[6] TRIFUNAC M D. Interaction of a shear wall with the soil for incident plane SH waves[J]. Bull Seism Soe Am,1972,62:63 - 83.

[7] TOTOROVSKA M I, TRIFUNAC M D. Analytical model for in - plane building - foundation - soil interaction: Incident P - SV - and Rayleigh Waves[R]. los angeles,California: Dept of Civil Engrg, University of Southern California, 1990: No. CE 90 - 01.

[8] TOTOROVSKA M I, TRIFUNAC M D. The system damping, the system frequency and the system response peak amplitudes during in - plane building - soil interaction[J]. Earthquake Engrg Struct Dynam, 1992,21(2):127 - 144.

[9] 邱发强,刘殿魁. SH波入射时柔性基础上等腰三角形坝体结构的出平面反应[J]. 地震工程与工程振动,2006,26(4):9 - 17.

(编辑　刘　彤)