利用三角剖分算法进行小天体物理属性计算

邵 巍[1,2]，崔平远[3]，崔祜涛[1]

(1.哈尔滨工业大学 深空探测基础研究中心,哈尔滨 150080, greatshao@126.com;2. 青岛科技大学自动化学院,青岛 266042; 3.北京理工大学 深空探测技术研究所, 北京 100081)

摘　要: 提出了一种利用三维散乱点对小天体表面进行三角剖分,并对小天体的多个物理属性进行估计的简单快速算法.先将小天体表面的散乱点映射到单位球面上,再进一步映射到平面上进行三角网格剖分,避免了非凸边界对原有拓扑结构的破坏.在形成三角网格的基础上,将对体积的积分转化为对多面体顶点坐标的计算,并采用分割小四面体的算法简化了利用格林公式进行多次积分转化的计算过程,从而求出小天体的体积、表面积、质心、转动惯量、惯量主轴及其引力势、引力场分布等多个重要的物理量.通过仿真分析了散乱点数目对计算精度的影响,验证了该算法的正确性.

关键词: 小天体;三维散乱点;三角剖分;体积积分;物理参数估计;格林公式

中图分类号: O313　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 0367－6234(2010)05－0687－05

Physical properties calculation of small body using points triangulations

SHAO Wei[1,2], CUI Ping-yuan[3], CUI Hu-tao[1]

(1. Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China, greatshao@126.com;
2. College of Automation and Electronic Engineering, Qingdao University of Science & Technology, Qingdao 266042, China;
3. Deep Space Exploration Technology Institute, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: This paper presents a simple and rapid algorithm for small body surface triangulations and physical properities calculation based on 3-D arbitrary points. In order to avoid destroying the original topology due to the non-convex boundary, the arbitrary points are first mapped on the unit sphere and then mapped on a 2-D plane to complete the triangular mesh generation. Based on this, the volume integral can be transformed into polyhedron vertex computation, and the processes of integral reduction using Green formula can be simplified by decomposing the polyhedron into a series of tetrahedrons. Thus the physical properties such as volume, surface aera, center of mass, moment of inertia, principal axis of intertia, gravitational potential, gravitational field intensity of the small body can be computed. Simulation shows the relationship between points number and the calculation accuracy as well as the correctness of the algorithm.

Key words: small body; 3-D arbitrary points; triangulations; volume integral; physical parameter estimation; Green formula

对小天体形状、质量、密度、引力场、自旋轴等基本物理性质的确定是探测任务的重点,不但能够建立较为精确的动力学模型,为探测器的轨道设计、自主导航提供参考[1],也能够对小天体,乃至整个太阳系的起源进行推断[2-3].

如今有超过33 000颗小行星的数据资料存储在地面站数据库中,但仅通过地面观测确定的小天体质量、体积等物理参数的精度是有限的.星际探测任务的进行为精确估计小天体的物理参数提供了基础[4].在飞越、绕飞小天体的过程中可

收稿日期: 2009－01－24.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874094);
青岛科技大学博士启动基金项目(4000022408).
作者简介: 邵 巍(1980—),男,博士研究生;
崔平远(1961—),男,教授,博士生导师;
崔祜涛(1970—),男,教授,博士生导师.

以得到大量小天体的图像,从图像中提取的地表特征点不但可以作为导航路标,同时可以利用这些特征点在小天体固连坐标系中的位置对小天体进行模型近似,估算出小天体的基本物理性质. 本文在假设小天体表面散乱特征点三维坐标已知的情况下,研究了三维散乱点三维剖分的快速算法,并进一步利用划分小四面体的方法估算出小天体的多个基本的物理性质.

1 三维散乱点三角剖分的快速算法

对于表面经纬度间隔固定的特征点来说,可以根据文献[5]的算法进行三角剖分. 这种算法简单有效,但特征点在单位面积上分布不均匀,±90°纬度附近的特征点要比0°纬度附近的特征点分布更为集中,而且直接测量得到的表面特征点一般不能满足这样的分布. Jalobeanu[6]提出利用小波变换的方法对小天体模型进行网格剖分,但计算复杂,计算量较大.

二维散乱点的三角剖分技术已经十分成熟,而对于三维散乱点的剖分方法主要有局部投影法[7],Choi 算法[8]以及 α 形法[9]等. 但局部投影法需要对局部三角网格进行合并,分块工作也难以自动完成;Choi 算法中需要确定对所有点都可视的一点 C,但很多情况下并不存在这样的点,而且 C 点的位置难以确定;α 形法中对于参数 α 的选择也较为复杂,不同密集程度的散乱点对应的 α 值也不相同. 本文提出了一种基于投影变换的三角网格剖分方法,简单有效,适用于对小天体等不规则的闭合曲面进行三角剖分.

1.1 三维散乱点的球面投影

由于小天体形状不规则、具有非凸边界,直接对其表面的散乱点进行三角剖分会产生超出轮廓范围的三角网格. 这里采用球面投影将小天体的三维坐标投影到一个单位球面上,即只用经纬度表示三维散乱点的坐标,投影过程如图1所示. 对于经纬度相同,但半径不同的极为特殊的表面点,可作为奇异点剔除,或重新改变投影球面经纬度的定义方式. 这样得到投影点都是三维凸包的顶点,避免了非凸边界对特征点拓扑结构的破坏.

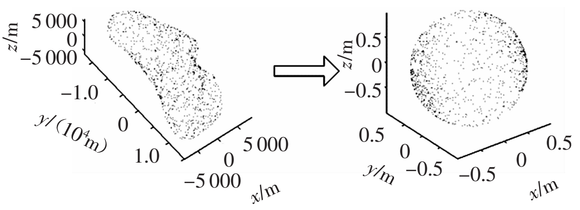
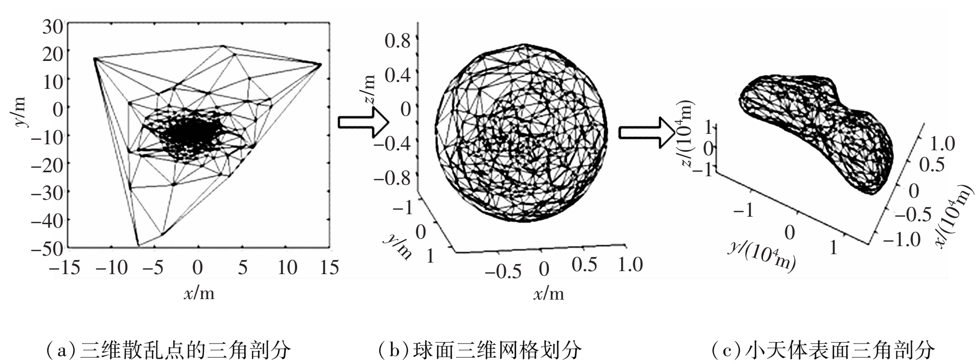


图1 球面投影示意图

1.2 三维散乱点的网格化

选取球面上的任意一点(不妨设纬度最低的球面投影点)为基准点,并将其旋转到(0,0,−1)处. 将 $z=0$ 的平面为参考平面,则单位球体上的点 $(\cos\phi\sin\theta,\cos\phi\cos\theta,\sin\phi)$ 和基准点的连线与参考平面交点的坐标为 $(\cos\phi\sin\theta/(\sin\phi+1),\cos\phi\cos\theta/(\sin\phi+1))$. 这样,三维点的坐标就与平面投影点建立起了一一映射的关系,投影点随纬度的增大而逐渐趋向于原点. 利用球面坐标的过渡,避免了局部投影法网格合并的过程,将三维散乱点转化为二维散乱点的三角剖分问题,如图2(a)所示. 这样形成的三角网格并不包含有基准点,考虑到形成的平面凸多边形的边界只对应于一个三角面(其他三角网格的边是相邻两个三角面的公共边),这些边界对应的顶点即为与基准点的相邻特征点. 将基准点与凸多边形的 n 个边界相连,形成多个三角网格,完成了对所有顶点剖分过程. 再将形成三角网格的顶点对应投影到三维球面相应顶点,得到球面三维网格剖分的结果如图2(b)所示. 将球面顶点的拓扑关系根据对应的经纬度以及半径关系映射到小天体表面,就形成了对小天体表面三角剖分模型,如图2(c)所示.



(a)三维散乱点的三角剖分 (b)球面三维网格划分 (c)小天体表面三角剖分

图2 三角剖分过程

2　基于三角剖分的小天体物理参数确定

小天体的质量可以通过小天体对其他天体或者探测器的轨道得到[10]．假设小天体密度均匀，利用形成的三角网格可以对小天体的多个物理参数进行确定，包括小天体的体积、质心坐标、惯性张量、惯性主轴等质量参数以及引力势及引力场分布等.

2.1　小天体质量参数计算

Brian Mirtich 利用格林公式，将对体积的积分计算先转化为对面的积分，然后转化为对边的积分，最后转化为对各个顶点的计算[11]．该算法通用性强，但需要经过多次积分转化，要求各个面的顶点要按逆时针排列，保证各个面的外法线方向的一致性，计算过程比较复杂. 由于已经进行了三角剖分，可以采用分割多个小四面体的算法，通过求和得出总体积以及惯性张量等物理参数.

选取小天体模型内部一点 $\boldsymbol{a}$ 与各个三角面的顶点相连，将小天体模型划分为 N 个小四面体，N 为三角网格的个数. 假设 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{c}_i,\boldsymbol{d}_i$ 分别为小四面体的顶点的坐标，则第 i 个四面体的体积为

$$V_i = (\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{a}_i)\cdot(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{a}_i)\times(\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{a}_i)/6.$$

质心为

$$\boldsymbol{k}_i = (\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{d}_i)/4.$$

这里选取 $\boldsymbol{a} = (0,0,0)$，由于小天体的形状近似椭球体，因此 $\boldsymbol{a}$ 与某个三角形的连线一般不会与其他三角形面相交，整个小天体的体积可以表示为

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{6}(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{c}_i\times\boldsymbol{d}_i).$$

表面积表示为

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} |(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{b}_i)\times(\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{b}_i)|.$$

假设密度均匀，质心位置可表示为

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{V}\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\boldsymbol{k}_i\right) = \frac{1}{6V}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{c}_i\times\boldsymbol{d}_i)(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{d}_i). \tag{1}$$

小天体对于坐标原点的惯性张量为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} I'_{xx} & -I'_{xy} & -I'_{xz} \\ -I'_{yx} & I'_{yy} & -I'_{yz} \\ -I'_{zx} & -I'_{zy} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \frac{M}{\sum_{i=1}^{N} V_i}\times \sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{2}$$

其中 M 代表小天体的总质量，若认为小天体密度均匀，则有 $M = \rho\sum_{i=1}^{N} V_i$. 为简化计算，将对 xyz 轴上的积分转化为对轴 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$，$(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})$ 上的积分. 考虑第 i 个四面体内的点 $p\boldsymbol{b} + q\boldsymbol{c} + r\boldsymbol{d}$，其中 $0 \leqslant p,q,r$ 并且 $p+q+r \leqslant 1$. 通过积分变换，惯性张量矩阵的各个子元素可以表示为

$$\int_{V_i}\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}\int_0^{1-p-q}\int_0^{1-p}\int_0^{1}(p\boldsymbol{b} + q\boldsymbol{c} + r\boldsymbol{d})(p\boldsymbol{b} + q\boldsymbol{c} + r\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}r = \frac{1}{120}[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}][(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}]. \tag{3}$$

将式(3)的各个元素代入式(4)可得 $\boldsymbol{J}_o$.

根据平行轴定理，小天体对于质心的惯性张量为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{o}} + M\begin{bmatrix} k_y^2+k_z^2 & -k_xk_y & -k_xk_z \\ -k_xk_y & k_x^2+k_z^2 & -k_yk_z \\ -k_xk_z & -k_yk_z & k_x^2+k_y^2 \end{bmatrix}.$$

其中 k_x,k_y,k_z 是利用式(1)求得的小天体质心的坐标.

通过求 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}$ 特征值的方法可以求得小天体的质心惯量主轴，由于小天体一般绕最大惯量主轴自旋（少数小天体绕最小惯量主轴自旋），可将此作为对小天体自旋轴方向的参考.

若 $\boldsymbol{a}$ 与某个三角形的连线与其他三角形面相交，则会产生重复计算的过程. 为提高计算精度，则可采用下面两种方式进行处理：1）利用平面将小天体重新分割成多个部分，分别计算各个部分的物理参数，然后进行合并计算. 2）根据相交顶点求解出重复计算的多面体，并在计算结果中减去这些多面体带来的各个物理参数的重复计算.

2.2　小天体引力势以及引力场分布

根据参考文献[12]的算法可以将小天体的引力势 U 以及引力场 ∇U 用多面体的边和面的各个变量和的形式表示如下：

$$U = \frac{1}{2}G\sigma\sum_{e\in A_{\mathrm{edges}}}\boldsymbol{r}_e\cdot\boldsymbol{E}_e\cdot\boldsymbol{r}_e\cdot L_e - \frac{1}{2}G\sigma\sum_{f\in A_{\mathrm{faces}}}\boldsymbol{r}_f\cdot\boldsymbol{F}_f\cdot\boldsymbol{r}_e\cdot\omega_f,$$

$$\nabla U = -G\sigma\sum_{e\in \mathrm{Aedges}}\boldsymbol{E}_e\cdot\boldsymbol{r}_e\cdot L_e + G\sigma\sum_{f\in A_{\mathrm{faces}}}\boldsymbol{F}_f\cdot\boldsymbol{r}_f\cdot\omega_f.$$

其中，G 为万有引力常数；σ 为小天体的密度；$\boldsymbol{r}_e$，$\boldsymbol{r}_f$ 分别是从场点到多面体边、面上某一点的矢量；$\boldsymbol{F}_f = \hat{\boldsymbol{n}}_f\hat{\boldsymbol{n}}_f^{\mathrm{T}}$ 是面的单位法向量自身相乘得到的对

称矩阵；$\boldsymbol{E}_e$ 是由边的两个面的法向量以及与边的两个法向量计算得到的对称矩阵；L_e 是边上势能的对数表示，ω_f 是场点对某个三角面的立体角，三者表达式如下：

$$\boldsymbol{E}_e \equiv \hat{\boldsymbol{n}}_A(\hat{n}_e^A)^{\mathrm{T}} + \hat{\boldsymbol{n}}_B(\hat{\boldsymbol{n}}_e^B)^{\mathrm{T}},$$

$$L_e = \int_e \frac{1}{r}\mathrm{d}s = \ln\frac{r_i + r_j + e_{ij}}{r_i + r_j - e_{ij}},$$

$$\omega_f = 2\arctan\frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3}{r_1r_2r_3 + r_1(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3) + r_2(\boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_1) + r_3(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)}.$$

这样，仅利用小天体表面散乱特征点的分布，就可以估计小天体的多个物理性质.

3　仿真结果及分析

利用本文提出的算法分别对 Eros 、Ida、Itokawa 三颗小天体的 1 000 个表面散乱点进行三角剖分，所得的模型如图 3 所示. 从图中可以看出，三角剖分效果良好，能够反映出小天体的三维模型.

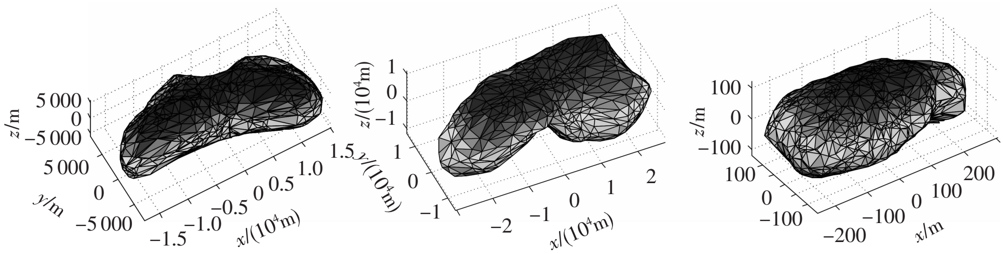
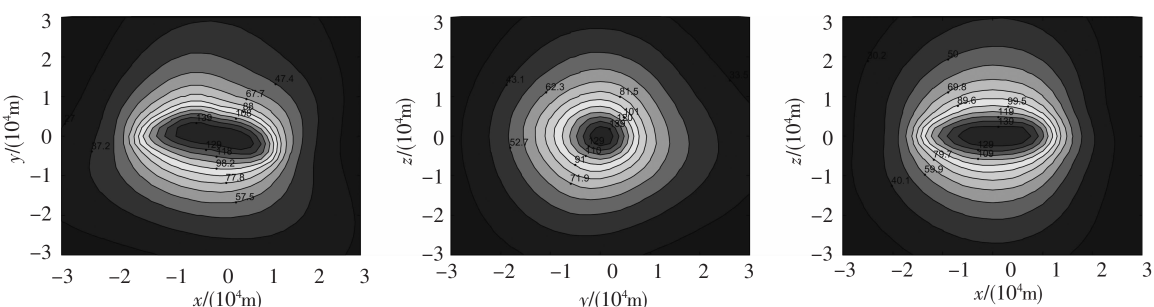


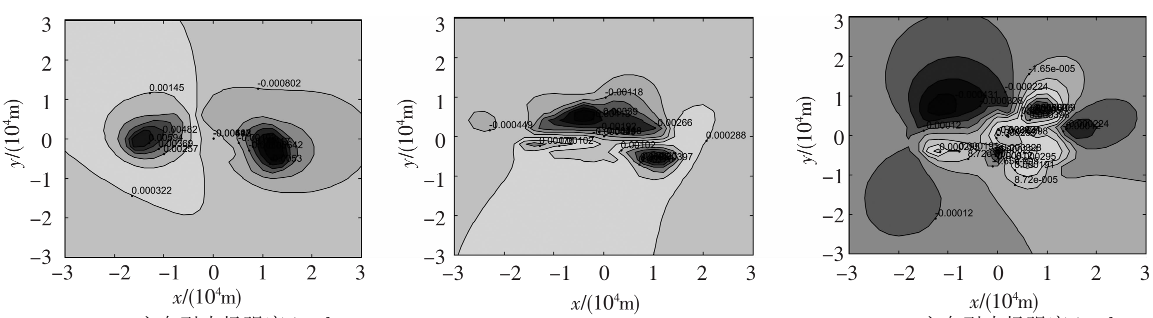
图 3　Eros，Ida，Itokawa 小天体三角剖分结果

图 4，图 5 分别是利用形成的三维网格模型对 Eros 小天体 $z = 0$，$x = 0$，$y = 0$ 各个平面上的引力势的等势线以及 $z = 0$ 平面上各个方向上引力场强度分布示意图. 利用小天体表面点得到引力势以及引力场强度的分布，即可建立起比球谐项展开具有更高精度的动力学模型[9]，为小天体绕飞及着陆段的轨道设计以及导航、制导等工作提供基础.



(a) z=0 平面引力势 (m²/s²)　(b) x=0 平面引力势 (m²/s²)　(c) y=0 平面引力势 (m²/s²)

图 4　Eros 小天体等势线图



(a) x 方向引力场强度 (m/s²)　(b) y 方向引力场强度 (m/s²)　(c) z 方向引力场强度 (m/s²)

图 5　Eros 小天体引力场强度分布图

图 6 是采用 Eros 小天体模型，其表面点数目与利用本文算法计算的体积、表面积、质心位置以及引力势的关系曲线. 图 6 的左起第 1 幅图中虚线之间部分是文献[2]中对体积的估计范围，与利用三角剖分得到的结果基本一致. 从图中看出表面点数目大于 10 000 时，即表面点的平均相邻距离小于 350 m 时，对这些物理性质的数值估计基本上能够达到稳定. 这为小天体观测过程中表面点数目的选取提供了一定的依据.

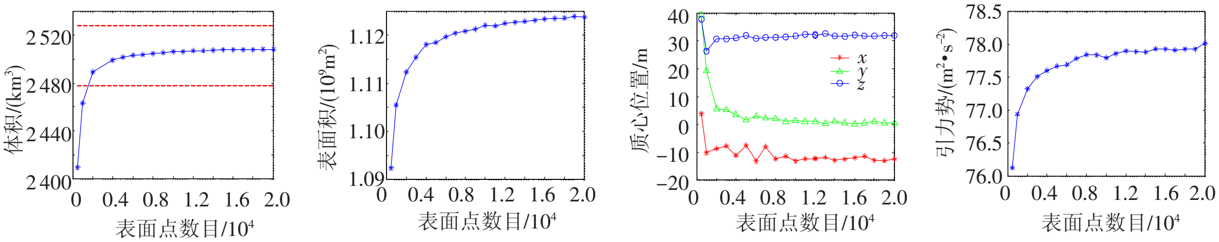


图 6　表面点个数对体积、表面积、质心位置及引力势的影响

4　结　论

1）将小天体的基本物理参数用三角剖分后的多面体的顶点坐标表示，将小天体多个物理参数的估计问题转化为测量表面特征点的位置坐标. 但仿真过程中假设对表面点的位置坐标的测量是精确的，应更为全面地考虑表面点位置的测量误差，分析其对小天体物理参数估计的影响.

2）利用球面投影将非凸边界的三维网格剖分转化为二维三角剖分问题，适合对小天体表面散乱点的三角剖分. 该算法没有考虑到投影变换引起特征点之间的距离变化，所形成的三角网格不一定是最优剖分，需要继续优化剖分结果.

3）利用分割小四面体的算法简化了利用积分变换的计算过程，用表面点坐标描述了小天体的多个物理参数. 但引力势、引力场的求解过程中需要用到三角函数计算，求解较慢. 如何简化计算过程，减少计算时间也是今后研究的重点.

参考文献：

[1] SCHEERES D J. Close Proximity operations for implementing mitigation strategies [C]//2004 Planetary Defense Conference: Protecting Earth from Asteroids. Orange County: [s. n.], 2004.

[2] BRITT D T, YEOMANS D, HOUSEN K, *et al.* Asteroid density, porosity, and structure [M]//BOTTKE W F, CELLINO A, PAOLICCHI P, *et al.* Asteroids III. Tucson: Unversity of Arizona Press, 2002: 485 – 500.

[3] BINZEL R P, HEARN M, ASPHAUG E, *et al.* Interiors of small bodies: foundations and perspectives [J]. Planetary and Space Science, 2003, 51(5): 433 – 454.

[4] MILLER J K, KONOPLIV A S, ANTREASIAN P G. Determination of shape, gravity, and rotational state of asteroid 433 Eros [J]. Icarus, 2002, 155: 3 – 17.

[5] KHUSHALANI B. Asteroid tetrahedron shape models from spud data [J]. Current Issue, 2000, 79(11): 1578 – 1580.

[6] JALOBEANU A. Fractal 3D modeling of asteroids using wavelets on arbitrary meshes [C]//Proc. of IAFA'03. Bucharest: [s. n.], 2003.

[7] 王青，王融清，鲍虎军，等. 散乱数据点的增量快速曲面重建算法[J]. 软件学报，2000，11(9): 1221 – 1227.

[8] PIPER B R. Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches [M]//FRAIN G. Geometric Modeling: Algorithms and Trends. Philadelphia: SIAM, 1987: 221 – 233.

[9] EDELSBRUNNER H, MUCKE E P. Three-dimensional alpha shapes [J]. ACM Transaction on Graphics, 1994, 13(1): 43 – 72.

[10] HILTON J. Asteroid masses and densities [M]//BOTTKE W F, CELLINO A, PAOLICCHI P, *et al.* Asteroids III. Tucson: University of Arizona Press, 2002: 103 – 112.

[11] BRIAN M. Fast and accurate computation of polyhedral mass properties [J]. Journal of Graphics Tools, 1996, 1(2): 31 – 50.

[12] ROBERT A W, DANIEL J S. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1997, 65(3): 313 – 344.

（编辑　张　宏）