

一种基于非光滑切换曲面的控制设计

霍鑫, 姚郁

(哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 哈尔滨 150080, huoxin. ieee@ gmail. com)

摘要: 为了提高控制设计的灵活性, 针对一类二阶不确定系统提出一种基于非光滑切换曲面的控制设计方法. 该方法基于控制系统自稳定域的概念, 首先构造以线性 Lipschitz 曲面作为边界的自稳定域, 然后设计反馈控制律, 利用微分方程解与空间非光滑曲面的关系判据, 证明在该控制律的作用下系统轨迹将在有限时间内到达所设计的自稳定域边界并进入其内部. 结果表明: 该方法放宽了对自稳定域边界光滑性的要求, 提高了设计的灵活性. 数值算例验证了设计的正确性和有效性.

关键词: 非光滑曲面; 自稳定域; 非光滑分析; Filippov 解

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)05-0692-04

Control design method based on nonsmooth switching surfaces

HUO Xin, YAO Yu

(Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China, huoxin. ieee@ gmail. com)

Abstract: A control design method based on nonsmooth switching surfaces is proposed for a class of second-order systems in order to enhance the flexibility of system design. Firstly, the self-stable region (SSR) with linear Lipschitz boundary surfaces is constructed by utilizing the notion of SSR. Then, the control law is derived and the convergence of the closed-loop system is proved by the contingent cone criteria, which is used to determine the relation between the solution of a differential equation and a nonsmooth surface. The results show that the control design method developed in this paper allows us to construct the SSR in a more general sense, and the flexibility of system design can be improved. Finally, the correctness and effectiveness of the control design method presented are illustrated by a numerical example.

Key words: nonsmooth surface; SSR; nonsmooth analysis; filippov solution

削弱或消除抖振是变结构控制在实际应用中要着重解决的问题. 关于抖振抑制方面的研究可以参考文献[1-3]. 文献[4-5]进行的研究是基于扩展滑模面的, 即将原来的单一滑模面扩展为扇形区域. 然而, 这些方法没有摆脱滑模控制的框架, 所设计的扇形区域形式单一, 灵活性不足, 没有通用性. Han 等^[6]从二阶系统的特点出发提出自稳定域(SSR, Self-Stable Region)的概念, 在自稳定域中的系统轨迹将收敛至系统的平衡点. Huang 等^[7-8]又在此基础上给出了二阶和高阶系统的自稳定域的构造, 并证明了其收敛性. 借

助自稳定域的概念, 控制设计的收敛域已经不同于以往的选择为平衡点或超平面, 而是扩展为一个包含平衡点的区域, 这将为控制设计带来方便. 但是 Huang 所构造的自稳定域边界是光滑的, 在一定程度上限制了设计的灵活性. 非光滑分析的发展为研究微分方程解与状态空间中非光滑曲面的关系提供了可能. Zheng^[9]基于 Filippov^[10]和 Clarke 等^[11]的研究成果, 利用非光滑分析中关于 Lipschitz 曲面几何性质的切锥描述, 将原有的 Filippov 解关于状态空间中光滑曲面的梯度判据扩展为新的相依锥判据.

本文针对一类二阶不确定系统, 基于 SSR 的定义构造具有线性 Lipschitz 边界的自稳定域, 放宽了对自稳定域边界光滑性的限制. 在此基础上,

收稿日期: 2009-04-01.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674043).

作者简介: 霍鑫(1981—), 男, 博士研究生;

姚郁(1963—), 男, 教授, 博士生导师.

依据系统轨迹与自稳定域边界曲面的关系,使设计控制律满足相依锥判据中的穿越条件,从而保证 SSR 外的系统轨迹在有限时间内到达 SSR 的边界并进入其内部. 在该控制律的作用下,闭环系统轨迹将最终收敛到平衡点.

1 数学基础

1.1 自稳定域(SSR)

众所周知,对于二阶系统的滑模控制,所有稳定的滑模面都在相平面的第 2 和第 4 象限,Han 等学者从二阶系统的固有特性出发,给出了 n 阶系统自稳定域的概念.

定义 1^[6] 设 $G_n \subset \mathbb{R}^n$ 是状态空间中包含原点的区域,即 $0 \in G_n$. 对于 $\mathbf{x}(0) \in G_n$,若存在 $T > 0$,使得 $\mathbf{x}(t) \in G_n$ 对于 $\forall t > T$ 成立,且 $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$,则称 G_n 为该系统的自稳定域.

1.2 Filippov 解

考虑如下微分方程:

$$\Sigma_n: \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{1}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 表示状态向量,可测实函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 有界且几乎处处有定义.

定义 2^[10] 向量函数 $\mathbf{x}(t)$ 在时间区间 $[t_0, t_1]$ 上是式(1)的 Filippov 解,若 $\mathbf{x}(t)$ 绝对连续且对于几乎所有的 $t \in [t_0, t_1]$ 满足

$$\dot{\mathbf{x}} \overset{\text{a. e.}}{\in} K[f](\mathbf{x}).$$

其中:

$$K[f](\mathbf{x}) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} f(B_\delta(\mathbf{x})/N).$$

$\mu N = 0$ 表示集合 N 的 Lebesgue 测度为零, $\overline{\text{co}}$ 表示凸的闭包, $B_\delta(\mathbf{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n: \|y - \mathbf{x}\| < \delta\}$ 表示以 $\mathbf{x}$ 为中心 δ 为半径的开球.

1.3 相依锥判据穿越条件

在给出相依锥判据穿越条件之前,首先给出 n 维空间线性 Lipschitz 曲面的描述.

定义 3 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个给定函数. 称 f 在 $\mathbf{x}$ 附近是 Lipschitz 的,当存在正数 K 和 δ ,使 $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')\| \leq K \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$, 对于所有 $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in B_\delta(\mathbf{x})$ 成立.

定义 4 设 $D_i \subseteq \mathbb{R}^n, i = 1, \cdots, r$, 满足 $\bigcup_{i=1}^r D_i = \mathbb{R}^n$, 且 $D_i \cap D_j = \emptyset$, 其中 $i \neq j$, 且 $i, j \leq r$, 称 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的线性 Lipschitz 连续曲面,若 S 构成一个单连通集, $0 \in S$, 且满足

$$S = \{\mathbf{x} \mid S_i(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_i \mathbf{x} + d_i = 0, \mathbf{C}_i^\top \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in D_i, i = 1, \cdots, r\}. \tag{2}$$

$\mathbb{R}^n$ 空间被 S 分成两个单连通域:

$$\begin{cases} S^+ = \bigcup_{i=1}^r \{\mathbf{x} \mid S_i(\mathbf{x}) > 0\}, \\ S^- = \bigcup_{i=1}^r \{\mathbf{x} \mid S_i(\mathbf{x}) < 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $S^+ \cap S^- = \emptyset$.

为了叙述方便,将 S 记作

$$S = \{\mathbf{x} \mid f_x(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

其中: $f_x(\mathbf{x})$ 是线性 Lipschitz 连续函数.

定义 5^[12] 紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 则在 $\mathbf{x}$ 处 Ω 的相依锥定义为

$$T_\Omega^B(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: \liminf_{h \downarrow 0} \frac{d_\Omega(\mathbf{x} + h\mathbf{y})}{h} = 0 \right\}.$$

其中, $d_\Omega(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|: \mathbf{y} \in \Omega\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $\mathbf{x}$ 与子集 Ω 的距离. 相依锥仅对紧集 Ω 边界上的点有意义,可以认为 $T_\Omega^B(\mathbf{x})$ 是集合 Ω 边界曲面的相依锥,即从 Ω 边界点 $\mathbf{x}$ 指向 Ω 内部所有方向矢量的集合.

定理 1(穿越条件^[9]) 空间 Lipschitz 曲面 S 及区域 S^+, S^- 分别由式(2)和式(3)给出,若微分方程(1)的 Filippov 解存在,且

$$\bigcup_{\mathbf{x} \in S^+ + S} K[f](\mathbf{x}) \subseteq \bigcap_{\mathbf{x} \in S} \text{Int}\{T_{S+S^+}^B(\mathbf{x})\}.$$

则当初始条件满足 $\mathbf{x}(t_0) \in S^-$, 微分方程(1)的所有 Filippov 解将在有限时间内由 S^- 穿越 S 到 S^+ .

同理可得所有 Filippov 解在有限时间内由 S^+ 穿越 S 到 S^- 的相依锥判据穿越条件.

2 主要结果

考虑二阶系统

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \Delta(x_1, x_2) + u. \end{cases}$$

其中: $\Delta(x_1, x_2)$ 为不确定项,可以是状态的非连续函数,假设其满足

$$|\Delta(x_1, x_2)| \leq \sigma \text{ 且 } \Delta(0, 0) = 0.$$

定理 2 对于系统 Σ_2 , 设 $g(x_1)$ 为线性 Lipschitz 连续正定函数,且满足 $g(0) = 0$, 则 $S_u(\mathbf{x}) = \{(x_1, x_2): x_2 + g(x_1)(\text{sgn}(x_1) - k) = 0\}$, $S_d(\mathbf{x}) = \{(x_1, x_2): x_2 + g(x_1)(\text{sgn}(x_1) + k) = 0\}$ 分别为 $\mathbb{R}^2$ 中的两个线性 Lipschitz 曲面,其中 $0 \leq k < 1$, 且

$$G_2 = \{(x_1, x_2): (x_1, x_2) \in \overline{S_u^+} \cap \overline{S_d^-}\}$$

是系统 Σ_2 的一个自稳定域,其中 $\bar{S}$ 表示集合 S 在 $\mathbb{R}^2$ 中的补集.

证明 首先,证明 $S_u(\mathbf{x})$ 是线性 Lipschitz 曲面,即证明当 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ 时, $f_x = x_2 + g(x_1)(\text{sgn}(x_1) - k)$ 是线性 Lipschitz 函数.

当 $x_1 > 0$ 时, $f_x = x_2 + (1 - k)g(x_1)$, 命题成立;

当 $x_1 < 0$ 时, $f_x = x_2 - (1 + k)g(x_1)$, 命题成立;

当 $x_1 = 0$ 时, 因为 $g(0) = 0$, 则 $f_x = x_2$, 命题成立.

同理, $S_d(\mathbf{x})$ 也是线性 Lipschitz 曲面. 因此, 根据定义4关于线性 Lipschitz 曲面的定义, $S_u(\mathbf{x})$ 和 $S_d(\mathbf{x})$ 可分别记为

$$S_u(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \mid S_{ui}(\mathbf{x}) = c_{ui}x_1 + x_2 + d_{ui} = 0, \\ c_{ui}, d_{ui} \in \mathbb{R}\},$$

$$S_d(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \mid S_{di}(\mathbf{x}) = c_{di}x_1 + x_2 + d_{di} = 0, \\ c_{di}, d_{di} \in \mathbb{R}\}.$$

下面证明 G_2 是系统 Σ_2 的一个自稳定域. 根据 $S_u(\mathbf{x})$ 和 $S_d(\mathbf{x})$ 的定义, 有

$$S_u^+ = \{(x_1, x_2) : x_2 + g(x_1)(\operatorname{sgn}(x_1) - k) > 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\},$$

则

$$\overline{S_u^+} = \{(x_1, x_2) : x_2 + g(x_1)\operatorname{sgn}(x_1) \leq kg(x_1), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

同理

$$\overline{S_d^-} = \{(x_1, x_2) : x_2 + g(x_1)\operatorname{sgn}(x_1) \geq -kg(x_1), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\},$$

于是

$$\overline{S_u^+} \cap \overline{S_d^-} = \{(x_1, x_2) : |x_2 + g(x_1)\operatorname{sgn}(x_1)| \leq kg(x_1)\},$$

显然 $0 \in G_2$.

取 $V(\mathbf{x}) = 0.5x_1^2$, 若存在 $T > 0$, 使得 $\mathbf{x}(t) \in G_2$ 对于 $\forall t > T$ 成立, 则当 $x_1 \neq 0$ 时, 有

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 = x_1 x_2 \leq x_1(-g(x_1)(\operatorname{sgn}(x_1) - k)) < 0.$$

则 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_1(t) \rightarrow 0$; 又因为 $(x_1(t), x_2(t)) \in G_2$, 所以 $x_2(t) \rightarrow 0$. 根据自稳定域的定义, 定理2成立.

定理3 令 $M = \max_{i \leq r}(|c_{ui}|, |c_{di}|)$. 那么系统 Σ_2 的轨迹在有限时间到达 G_2 的边界并进入其内部, 如果满足

$$u = -(M|x_2| + \sigma + \varepsilon) \operatorname{sat}\left(\frac{x_2 + g(x_1)\operatorname{sgn}(x_1)}{kg(x_1)}\right). \quad (4)$$

其中: $0 < k < 1$. 当 $k = 0$ 时,

$$u = -(M|x_2| + \sigma + \varepsilon) \operatorname{sgn}(x_2 + g(x_1)\operatorname{sgn}(x_1)).$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是一个任意小的正数.

证明 首先证明 $k \neq 0$ 的情形. 为叙述方便, 记

$$\Gamma = \frac{x_2 + g(x_1)\operatorname{sgn}(x_1)}{kg(x_1)}.$$

由于 $\Delta(x_1, x_2)$ 可能是状态的非连续函数, 且 $\Delta(x_1, x_2)$ 有界, 满足 $|\Delta(x_1, x_2)| \leq \sigma$, 根据 Filippov 关于右端非连续微分方程的相关理论, 闭环

系统写成微分包含形式为

$$\dot{\mathbf{x}} \in K[f](\mathbf{x}).$$

其中:

$$K[f](\mathbf{x}) = \left(K[\Delta](\mathbf{x}) - (M|x_2| + \sigma + \varepsilon) \operatorname{sat}(\Gamma) \right),$$

若 $\mathbf{x} \in S_u^+ \cup S_u$ 或 $\mathbf{x} \in S_d^- \cup S_d$ 有

$$\operatorname{sat}(\Gamma) = \operatorname{sgn}(\Gamma).$$

则若 $\mathbf{x} \in S_u^+ \cup S_u$,

$$K[f]^+(\mathbf{x}) = \left(K[\Delta]^+(\mathbf{x}) - M|x_2| - \sigma - \varepsilon \right).$$

由 $S_u(\mathbf{x})$ 的定义可知 $S_u^- + S_u$ 的相依锥为

$$\bigcap_{\mathbf{x} \in S_u} T_{S_u^- + S_u}^B(\mathbf{x}) = \{\mathbf{v} : [c_{ui} \ 1] \mathbf{v} \leq 0, \forall i \leq r\}.$$

令 $\Delta^+(\mathbf{x})$ 为 $K[\Delta]^+(\mathbf{x})$ 中的元素, 则

$$f^+(\mathbf{x}) = \left(\Delta^+(\mathbf{x}) - M|x_2| - \sigma - \varepsilon \right)$$

为 $K[f]^+(\mathbf{x})$ 中的元素. 则有

$$[c_{ui} \ 1] f^+(\mathbf{x}) = c_{ui}x_2 + \Delta^+(\mathbf{x}) - M|x_2| - \sigma - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0.$$

故

$$\bigcup_{\mathbf{x} \in S_u^+ + S_u} K[f](\mathbf{x}) \subseteq \bigcap_{\mathbf{x} \in S_u} \operatorname{Int}\{T_{S_u^- + S_u}^B(\mathbf{x})\}.$$

同理, 若 $\mathbf{x} \in S_d^- \cup S_d$, 则有

$$\bigcup_{\mathbf{x} \in S_d^- + S_d} K[f](\mathbf{x}) \subseteq \bigcap_{\mathbf{x} \in S_d} \operatorname{Int}\{T_{S_d^+ + S_d}^B(\mathbf{x})\}.$$

根据定理1, 所有从 S_u^+ 出发的点将在有限时间穿越 S_u 进入 G_2 , 所有从 S_d^- 出发的点将在有限时间穿越 S_d 进入 G_2 , 而根据定理2, 区域 G_2 为系统 Σ_2 的一个自稳定域, 所以在控制律式(4)的作用下系统轨迹将收敛于平衡点.

类似地可以证明当 $k = 0$ 时, 定理3同样成立.

3 数值算例

在本节中, 通过一个数值算例验证定理3的结论. 设不确定项 $\Delta(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_2) \operatorname{sgn}(x_1)$.

定义线性 Lipschitz 连续正定函数 $g(x_1)$ 为

$$g(x_1) = \begin{cases} -x_1, & x_1 \leq 0; \\ 2x_1, & x_1 \geq 0. \end{cases}$$

显然, $g(0) = 0$. 根据定理2, 于是有

$$S_u(\mathbf{x}) = \begin{cases} -(1+k)x_1 + x_2 = 0, & x_1 \leq 0; \\ 2(1-k)x_1 + x_2 = 0, & x_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$S_d(\mathbf{x}) = \begin{cases} -(1-k)x_1 + x_2 = 0, & x_1 \leq 0, \\ 2(1+k)x_1 + x_2 = 0, & x_1 \geq 0. \end{cases}$$

根据定理2, $S_u(\mathbf{x})$ 和 $S_d(\mathbf{x})$ 分别为 $\mathbb{R}^2$ 中的线性 Lipschitz 曲面, 则系统 Σ_2 的自稳定域为

$$G_2 = \{(x_1, x_2) : |x_2 + g(x_1)\operatorname{sgn}(x_1)| \leq$$

$kg(x_1)\}$.

取 $\sigma = |x_1|, \varepsilon = 1$. 根据定理3, 当 $k = 0.5$ 时,

$$u = -(3|x_2| + |x_1| + 1)\text{sat}\left(\frac{x_2 + g(x_1)\text{sgn}(x_1)}{kg(x_1)}\right).$$

当 $k = 0$ 时, 有

$$u = -(2|x_2| + |x_1| + 1)\text{sgn}(x_2 + g(x_1)\text{sgn}(x_1)).$$

$k = 0.5$ 和 $k = 0$ 情况下的仿真结果分别如图1和图2所示. 从图1可以看出, 在不同初值情况下, 系统轨迹在有限时间进入自稳定域, 并且最终收敛于原点. 从图2可以看出, 当 $k = 0$ 时, 自稳定域退化成为一个线性 Lipschitz 曲面, 文中给出的控制器实际上是滑模控制器.

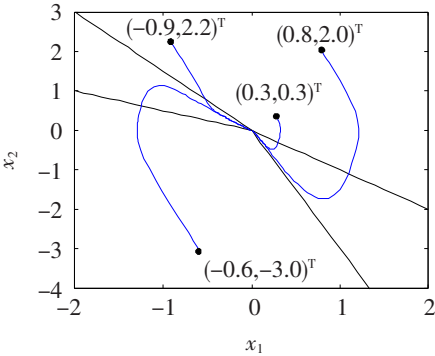


图1 $k = 0.5$ 时的系统相轨迹

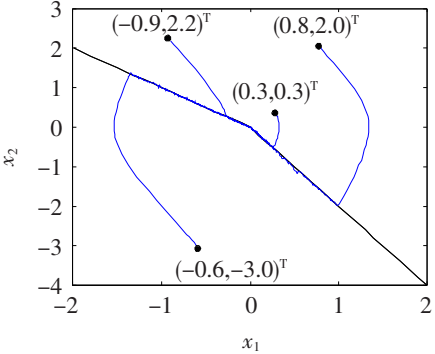


图2 $k = 0$ 时的系统相轨迹

4 结 语

- 1) 针对一类二阶不确定系统, 提出一种基于非光滑切换曲面的控制设计方法. 基于自稳定域的概念构造具有线性 Lipschitz 边界的自稳定域.
- 2) 利用 Filippov 解与空间非光滑曲面的关系判据, 设计控制律, 并证明在给定控制律作用下, SSR 外的系统轨迹将在有限时间内到达 SSR 的边界并进入其内部.
- 3) 本文提出方法可以看作是对滑模控制的

扩展. SSR 的边界设计为非光滑曲面, 放宽了对 SSR 边界光滑性的限制, 提高了设计的灵活性和自由度.

参考文献:

[1] HUNG J, GAO W, HUNG J. Variable structure control: a survey [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1993, 40(1): 2-22.

[2] YOUNG K D, UTKIN V I, OZGUNER U. A control engineer's guide to sliding mode control [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1999, 7(3): 328-342.

[3] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407-418.

[4] XU J X, LEE T H, WANG M, et al. Design of variable structure controllers with continuous switching control [J]. Int J Control, 1996, 65(3): 409-431.

[5] YANG D Y, YAMANE Y, ZHANG X J, et al. A new method for suppressing high-frequency chattering in sliding mode control system [C]//Proc of the 36th SICE Annual Conf. Tokyo, Japan; IEEE Press, 1997: 1285-1288.

[6] HAN J Q, WANG W, HUANG Y. A synthesis method for two order uncertain systems: auto-stable region approach [J]. Systems Science and Mathematical Science, 1997, 10(2): 152-159.

[7] HUANG Y, HAN J Q. A new synthesis method for uncertain systems: the self-stable region approach [J]. Int J Systems Sci, 1999, 30(1): 33-38.

[8] HUANG Y, HAN J Q. The self-stable region approach for second order nonlinear uncertain systems [C]//Proc 1999 IFAC World Congress. Beijing: [s. n.], 1999: 135-140.

[9] ZHENG Kai, SHEN Tielong, YAO Yu. Filippov solutions on a Lipschitz continuous surface [C]//Proc of the 27th Chinese Control Conference. Kunming: [s. n.], 2008: 577-581.

[10] FILIPPOV A. Differential equations with discontinuous right-hand sides [M]. [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 1988.

[11] CLARKE F H. Optimization and nonsmooth analysis [M]. New York: Wiley-Interscience, 1983.

[12] AUBIN J P, CELLINA A. Differential inclusions: set-valued maps and viability theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1984.