第42卷 第5期
2010年5月
哈尔滨工业大学学报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 42 No. 5
May 2010

寻找动力学系统主分岔参数的一种方法

秦朝红，陈予恕

（哈尔滨工业大学 航天学院，哈尔滨 150001，zhh-qin@163.com）

摘　要：对于多参数系统，为了能很好的研究系统动力学特性随参数的变化，给出了一种寻找动力学系统主分岔参数的方法. 通过对特征根进行扰动，来判断对系统动力学特性影响最主要的参数. 针对不同的特征根类型给出了不同的算法，并举例进行了验证. 该方法能有效地从诸多的系统参数中识别出对系统动力学特性影响比较大的参数. 而且按照参数对系统动力特性影响的大小进行排序，同样可识别出主要的开折参数. 该方法不仅适用于自治系统，同样适用于非自治系统.

关键词：动力系统；特征根；分岔参数

中图分类号：O322　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0367－6234(2010)05－0716－05

A method to find the main bifurcation parameter of dynamic system

QIN Zhao-hong, CHEN Yu-shu

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China, zhh-qin@163.com)

Abstract: To study the change of bifurcation properties of the system with structural parameters, a method to find the main bifurcation parameter of the dynamic system is presented in this paper. After disturbing the eigenvalue of Frechet matrix, the main bifurcation parameter is found. Different algorithms are given for different eigenvalue forms. The bifurcation parameter which has appreciable effect on dynamic characteristics of the system can be effectively identified from multiple parameters. And the unfolding parameters can be identified as well according to the effects of parameters on the system. This method can not only be used in autonomous systems, but also in nonautonomous systems.

Key words: dynamic system; eigenvalue; bifurcation parameter

奇异性理论是研究约化方程分岔特性的一种有效的方法. 利用奇异性理论[1-5]可分析各个开折参数区域内状态变量随分岔参数的分岔情况. 但对于实际的动力学系统，往往有很多的参数. 通常人们是根据经验选取某一参数作为一个分岔参数. 胡海昌[6]利用模态展开法和近似法研究了动力学系统参数摄动引起结构固有振动特性（固有频率和振动模态）变化的问题. William[7]对标准的一阶摄动法进行了改进，用结构修改前的特征向量关于修改后的质量矩阵的内积来代替关于修改前的质量矩阵的内积，从而提高了一阶摄动的精度. 陈塑寰等[8-12]对小参数法做了一些补充，并提出了改进方法，如振型一阶导数的高精度截尾模态展开法、混合基展开法等. Seyranian, Mailybaev[13]给出了多参数稳定性理论，详细讨论了参数变化时，系统参数对稳定性的影响. 本文将利用该思想给出一种寻找主分岔参数的方法. 对于特征根为单根和半简的情况，该方法尤为简单. 对于特征根为亏损的情况同样适用. 该方法不仅可以识别出主分岔参数，而且按照参数对系统动力特性影响的大小进行排序，同样可识别出主要的开折参数. 该方法还可推广到具有周期系数的动力系统中.

1　特征根分析

考虑特征根问题：

$$\boldsymbol{A}u = \lambda u. \tag{1}$$

收稿日期：2009－04－01.
基金项目：国家自然科学基金重点资助项目(10632040).
作者简介：秦朝红(1979—)，女，博士研究生；
陈予恕(1931—)，男，教授，博士生导师.

式中：$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times m$ 阶实数矩阵，u 是右特征向量. 则特征根 λ 为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0. \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{I}$ 为单位阵.

特征根的重数称为代数重数 k. 对应特征根的线性无关的特征向量的最大个数称为几何重数 k_g. 通常 $k_g\leqslant k$. 如果代数重数为 k，但几何重数为 1，那么称特征根为亏损的. 如果代数重数为 1，则称特征根为单根；如果代数重数为 k，几何重数也为 k，那么称特征根为半简的. 单根和半简根称为非亏损特征根.

1.1　亏损特征根情况

首先考虑亏损特征根 λ，其存在 k 个线性无关的特征向量满足方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_0&=\lambda\boldsymbol{u}_0,\\&\vdots\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1}&=\lambda\boldsymbol{u}_{k-1}+\boldsymbol{u}_{k-2}.\end{aligned} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{k-1}$ 为长度为 k 的约当链，其中，$\boldsymbol{u}_0$ 称为特征矢量，$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{k-1}$ 为相关矢量. 式(3)可写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_\lambda=\boldsymbol{U}_\lambda J_\lambda(k). \tag{4}$$

其中：

$$\boldsymbol{U}_\lambda=[u_0,\cdots,u_{k-1}], \tag{5}$$

$$J_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}. \tag{6}$$

同样可以考虑左特征向量及约当链问题.

$$v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda v^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

式中：v 为特征根 λ 的左特征向量，v^{T} 为 v 的转置.

对于非亏损特征根，其左、右特征向量之间满足正交关系：

$$\begin{gathered}v_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0=0,\\v_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0=v_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1=0,\\\vdots\\v_{k-2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0=v_{k-3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1=\cdots=v_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{k-2}=0,\\v_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0=v_{k-2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1=\cdots=v_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{k-1}\neq0,\\v_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1=v_{k-2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2=\cdots=v_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{k-1},\\\vdots\\v_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{k-2}=v_{k-2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{k-1}\end{gathered} \tag{8}$$

1.2　单根情况

如果特征根 λ 为单根，则存在特征向量 u 使得

$$\boldsymbol{A}u=\lambda u. \tag{9}$$

同样，其左、右特征向量之间满足正交关系为

$$v^{\mathrm{T}}u=1. \tag{10}$$

1.3　半简特征根情况

如果特征根为 k 重半简特征根，则存在 k 个线性无关的特征向量满足方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1&=\lambda\boldsymbol{u}_1,\\\vdots\quad&\quad\vdots\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_k&=\lambda\boldsymbol{u}_k.\end{aligned} \tag{11}$$

式(11)可写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_\lambda=\boldsymbol{U}_\lambda J_\lambda(k). \tag{12}$$

其中，

$$\boldsymbol{U}_\lambda=[u_1,\cdots u_k], \tag{13}$$

$$J_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda\end{pmatrix}. \tag{14}$$

其左、右特征向量之间满足正交关系为

$$v_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij},\ i,j=1,\cdots,k. \tag{15}$$

式中：δ_{ij} 为 Kronecker Delta 符号.

对于所有特征根，可计算其约当标准型为

$$\boldsymbol{A}U=UJ, \tag{16}$$

$$J=U^{-1}\boldsymbol{A}U. \tag{17}$$

2　动力系统参数变化对特征根的影响

对于一般的自治动力系统，都可将其写为一阶状态方程的形式：

$$\dot{\boldsymbol{X}}=A\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}). \tag{18}$$

式中：$\boldsymbol{X}$ 为状态向量，A 为 Frechet 导数，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ 为状态向量 $\boldsymbol{X}$ 的非线性向量函数.

在实际问题中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通常都是参数的函数. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 光滑依赖于参数矢量 $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$.

2.1　单根情况

设 $\lambda(p_0)$ 是 $A(p_0)$ 的单根时，计算 p_0 处 λ 和 u 对参数 p 的导数. 将式(9) 两边对参数求导得

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial p_i}u_0+A_0\frac{\partial u}{\partial p_i}=\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}u_0+\lambda_0\frac{\partial u}{\partial p_i}. \tag{19}$$

式中：u_0 为 p_0 处特征根 $\lambda_0=\lambda(p_0)$ 的右特征向量. 式(19) 可变形为

$$(\boldsymbol{A}_0-\lambda_0\boldsymbol{I})\frac{\partial u}{\partial p_i}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\boldsymbol{I}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial p_i}\right)\boldsymbol{u}_0. \tag{20}$$

将式(20) 两边左乘 v_0^{T} 得

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}=\frac{v_0^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial p_i}\boldsymbol{u}_0}{(v_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0)}. \tag{21}$$

由此可判断出特征根 λ 随系统参数的变化情况. 另外根据式(20) 可求得 $\dfrac{\partial u}{\partial p_i}$，但由于 $\boldsymbol{A}_0-\lambda_0\boldsymbol{I}$ 是奇异矩阵不能直接求逆，因此引入一个附加项 cu_0.

其正交条件为

$$v_0^{\mathrm{T}} u(p) = \text{const}. \tag{22}$$

将式(22)两边对系统参数求导得

$$v_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial u}{\partial p_i} = 0. \tag{23}$$

将式(23)两端左乘 v_0 的共轭矢量 $\boldsymbol{v}_0$ 并与式(20)相加得

$$G_0 \frac{\partial u}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}\boldsymbol{I} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial p_i}\right)\boldsymbol{u}_0. \tag{24}$$

其中,

$$G_0 = A_0 - \lambda_0 \boldsymbol{I} + \boldsymbol{v}_0 v_0^{\mathrm{T}}. \tag{25}$$

G_0 是非奇异的,于是得

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = G_0^{-1}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}\boldsymbol{I} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial p_i}\right)\boldsymbol{u}_0. \tag{26}$$

对于单根,通常比较关心的是特征根为 0 或 $\pm \mathrm{i}\omega$ 附近特征根随系统参数变化的情况.

例 1 对于 Lorenz 方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x + x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases}$$

显然 $(x,y,z) = (0,0,0)$ 是平衡点,其线性化的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho + 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}. \tag{27}$$

当 $(\sigma,\rho,\beta) = (2,0,1)$ 时,$\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值 0, −3, −1. 根据式(21)可以求得在 $(\sigma,\rho,\beta) = (2,0,1)$ 附近,特征根 $\lambda = 0$ 随参数的变化关系为

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} = 0, \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \frac{2}{3}, \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0. \tag{28}$$

从式(28)可以看出,在 $(\sigma,\rho,\beta) = (2,0,1)$ 附近参数 ρ 对特征根 $\lambda = 0$ 的影响最大.

当 $(\sigma,\rho,\beta) = (-1,1,1)$ 时,$\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值 $\pm \mathrm{i}\omega$, −1. 根据式(21)可求得 $(\sigma,\rho,\beta) = (-1,1,1)$ 附近,特征根 $\lambda = \mathrm{i}\omega$ 随参数的变化关系为

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} = \frac{-1 - i}{2}, \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \frac{i}{2}, \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0. \tag{29}$$

当参数变化时,特征根实部影响的是动力系统振动的稳定性及解的拓扑性质,而虚部影响的是振动的频率,由式(29)得:

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda}{\partial \sigma} = \frac{-1}{2}, \quad \frac{\partial \mathrm{Re}\lambda}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{Re}\lambda}{\partial \beta} = 0. \tag{30}$$

从式(30)可以看出,在 $(\sigma,\rho,\beta) = (-1,1,1)$ 附近,参数 σ 对特征根 $\lambda = \mathrm{i}\omega$ 的实部影响最大.

2.2 亏损特征根的情况

因为实际工程中经常遇到的是二重零根或二重纯虚根的情况,下面只讨论二重亏损特征根.

设矩阵 $\boldsymbol{A}(p)$,当 $p = p_0$ 时 $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}(p_0)$ 有一个亏损的二重根 λ_0,其左、右特征向量分别为 v_0, v_1 和 u_0, u_1,它们之间满足

$$\begin{cases} A_0 u_0 = \lambda_0 u_0,\ v_0^{\mathrm{T}} A_0 = \lambda_0 v_0^{\mathrm{T}}, \\ A_0 u_1 = \lambda_0 u_1 + u_0, v_1^{\mathrm{T}} A_0 = \lambda_0 v_1^{\mathrm{T}} + v_0^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{31}$$

且左、右约当链满足:

$$v_0^{\mathrm{T}} u_1 = v_1^{\mathrm{T}} u_0 = 1, \quad v_0^{\mathrm{T}} u_0 = v_1^{\mathrm{T}} u_1 = 0. \tag{32}$$

假设参数是沿着光滑曲线变化的,且

$$p = p(\varepsilon), \quad \varepsilon \geqslant 0. \tag{33}$$

$$p(0) = p_0. \tag{34}$$

在起始点处曲线的方向为 $e = (e_1, \cdots, e_n)$,即

$$e = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon}. \tag{35}$$

有

$$p = p_0 + \varepsilon e. \tag{36}$$

$p(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 处对 ε 的二阶导数为

$$d = (d_1, \cdots, d_n) = \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\varepsilon^2}. \tag{37}$$

沿着曲线 $p(\varepsilon)$,可将矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(p(\varepsilon))$ 展成泰勒级数形式:

$$A(p(\varepsilon)) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots. \tag{38}$$

其中,

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial p_i} e_i, A_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial p_i} d_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial p_j} e_i e_j. \tag{39}$$

由特征根理论知,当参数变化时二重非亏损特征根 λ_0 分裂为两个单根 λ. λ 和其对应的特征向量的 u 的 Newton-Puiseux 级数形式为

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3 + \cdots, \\ u &= u_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} w_1 + \varepsilon w_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} w_3 + \cdots. \end{aligned} \tag{40}$$

将式(38)和式(39)代入到式(1)得

$$\begin{gathered} A_0 u_0 = \lambda_0 u_0, \\ A_0 w_1 = \lambda_0 w_1 + \lambda_1 u_0, \\ A_0 w_2 + A_1 u_0 = \lambda_0 w_2 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 u_0, \\ A_0 w_3 + A_1 w_1 = \lambda_0 w_3 + \lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_1 + \lambda_3 u_0, \\ A_0 w_4 + A_1 w_2 + A_2 u_0 = \lambda_0 w_4 + \lambda_1 w_3 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 u_0, \\ \vdots \end{gathered} \tag{41}$$

为了唯一的确定特征向量 u,选择正交条件为

$$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} u = 1. \tag{42}$$

式中:$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}$ 为左特征矢量,且有 $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} u_0 = 1$. 将式(40)的第 2 式代入到式(42)可得:

$$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} w_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots. \tag{43}$$

将式(41)的第 2 式与式(31)相比较得

$$w_1 = \lambda_1 u_1. \tag{44}$$

根据式(44)，可将式(41)的第 3 式写为

$$(A_0 - \lambda_0 \boldsymbol{I}) w_2 = \lambda_1^2 u_1 + \lambda_2 u_0 - A_1 u_0. \tag{45}$$

因为 $A_0 - \lambda_0 \boldsymbol{I}$ 是奇异的，所以 w_2 要有解，只有式(45) 右端满足正交条件为

$$v_0^{\mathrm{T}}(\lambda_1^2 u_1 + \lambda_2 u_0 - A_1 u_0) = 0. \tag{46}$$

根据正交条件式(32)可得

$$\lambda_1^2 = v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_0. \tag{47}$$

当 $v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_0 \neq 0$，即非衰退的情况，$\lambda_1 \neq 0$. 将式(45) 两端左乘 v_1^{T}，并利用式(32) 得

$$v_0^{\mathrm{T}} w_2 = \lambda_2 - v_1^{\mathrm{T}} A_1 u_0. \tag{48}$$

将式(43) 的第4 式左乘 v_0^{T} 并利用式(31)、式(32)、式(44) 和式(48) 得

$$2\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_1 + \lambda_1 v_1^{\mathrm{T}} A_1 u_0. \tag{49}$$

因为 $\lambda_1 \neq 0$，所以有

$$\lambda_2 = \frac{v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_1 + v_1^{\mathrm{T}} A_1 u_0}{2}. \tag{50}$$

由正交条件式(43)得：

$$v_1^{\mathrm{T}} w_2 = 0. \tag{51}$$

将式(51) 左乘 $\bar{v}_0$ 并与式(45) 相加得

$$w_2 = G_1^{-1}(\lambda_1^2 u_1 + \lambda_2 u_0 - A_1 u_0). \tag{52}$$

其中，

$$G_1 = \bar{v}_0 v_1^{\mathrm{T}} + A_0 - \lambda_0 \boldsymbol{I}. \tag{53}$$

可以看出，当 $v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_0 \neq 0$ 时，λ_0 分岔出两个单根

$$\begin{gathered}\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 + o(\varepsilon), \\ \lambda_1 = \pm \sqrt{v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_0}, \quad \lambda_2 = \frac{v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_1 + v_1^{\mathrm{T}} A_1 u_0}{2}, \\ u = u_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \lambda_1 u_1 + \varepsilon(G_1^{-1}(\lambda_1^2 u_1 + \lambda_2 u_0 - A_1 u_0)) + o(\varepsilon).\end{gathered} \tag{54}$$

当 $v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_0 = 0$，即衰退的情况，$\lambda_1 = 0, w_1 = 0$. 此时式(41) 的第 5 式变为

$$(A_0 - \lambda_0 \boldsymbol{I}) w_4 = \lambda_2 w_2 + \lambda_4 u_0 - A_1 w_2 - A_2 u_0. \tag{55}$$

将式(49) 两端左乘 v_0^{T} 得

$$v_0^{\mathrm{T}}(\lambda_2 w_2 + \lambda_4 u_0 - A_1 w_2 - A_2 u_0) = 0. \tag{56}$$

根据正交条件式(32)得

$$\lambda_2 v_0^{\mathrm{T}} w_2 - v_0^{\mathrm{T}} A_1 w_2 - v_0^{\mathrm{T}} A_2 u_0 = 0. \tag{57}$$

根据式(48)、式(52)和式(53)得

$$\begin{gathered}\lambda_2^2 - (v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_1 + v_1^{\mathrm{T}} A_1 u_0)\lambda_2 + \\ v_0^{\mathrm{T}}(A_1 G_1^{-1} A_1 - A_2) u_0 = 0 .\end{gathered} \tag{58}$$

可以看出，当 $v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_0 = 0$ 时，λ_0 分岔出两个根

$$\begin{gathered}\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_2 + o(\varepsilon), \\ \lambda_2^2 - (v_0^{\mathrm{T}} A_1 u_1 + v_1^{\mathrm{T}} A_1 u_0)\lambda_2 + \\ v_0^{\mathrm{T}}(A_1 G_1^{-1} A_1 - A_2) u_0 = 0, \\ u = u_0 + \varepsilon(G_1^{-1}(\lambda_2 u_0 - A_1 u_0)) + o(\varepsilon).\end{gathered} \tag{59}$$

例 2　以 Lorenz 系统为例. 其线性化的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho + 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}. \tag{60}$$

当 $(\sigma, \rho, \beta) = (-1, 0, 1)$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有3 个特征值 0^2，-1. 根据式(54) 可得特征根 $\lambda = 0^2$ 随参数的变化关系为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \pm \sqrt{\varepsilon e_2} = \pm \sqrt{\Delta\rho}. \tag{61}$$

所以在 $(\sigma, \rho, \beta) = (-1, 0, 1)$ 附近，参数 ρ 对特征根 $\lambda = 0^2$ 的影响比较大.

2.3　半简特征根的情况

这里只考虑双半简的情况. 其满足特征方程：

$$\boldsymbol{A} u = \lambda u. \tag{62}$$

假设在 $p = p_0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}(p_0)$ 有两个特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$，其左、右特征向量分别为 v_1, v_2, u_1, u_2，它们满足正交关系式(15). 可计算式(62) 在 $p = p_0$ 处的导数为

$$\begin{gathered}\frac{\partial A}{\partial P_i}(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2) + A_0 \frac{\partial u}{\partial p_i} = \\ \frac{\partial \lambda}{\partial P_i}(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2) + \lambda \frac{\partial u}{\partial p_i}.\end{gathered} \tag{63}$$

根据正交关系式(15) 得

$$\begin{gathered}\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}\gamma_1 = v_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial A}{\partial p_i}(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p_i}\gamma_2 = v_2^{\mathrm{T}} \frac{\partial A}{\partial p_i}(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2).\end{gathered} \tag{64}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} v_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial A}{\partial p_i} u_1 & v_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial A}{\partial p_i} u_2 \\ v_2^{\mathrm{T}} \frac{\partial A}{\partial p_i} u_1 & v_2^{\mathrm{T}} \frac{\partial A}{\partial p_i} u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

所以 $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}$ 为式(65) 左边矩阵的特征根.

例 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 + 2p_1 & 3 + p_2 & 0 & 0 \\ 3 & p_1 + p_2 - 3 & 0 & 0 \\ 2p_2 - p_1 & 0 & -p_1 - 2 & 2 \\ 0 & 3p_1 & 2 + p_2 & -2 - p_1 \end{pmatrix}.$$

当 $(p_1, p) = (0,0)$ 时，$\boldsymbol{A}$ 矩阵的 4 个特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0, \lambda_3 = -4, \lambda_4 = -6. \tag{66}$$

根据式(65)可求得

$$\begin{gathered}\frac{\partial \lambda_1}{\partial p_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_1} = -1, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_2} = 1, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_2} = \frac{1}{2}.\end{gathered} \tag{67}$$

从式(67) 可以看出，参数 p_1 对特征根变化

的影响更大.

3 非自治系统参数变化对特征根的影响

对于非自治系统,通常可以利用平均法或者多尺度法等将其化为自治系统. 将系统化为自治系统后,仍可用上述方法来寻找分岔参数. 以非线性 Mathieu 方程来进行说明. 方程形式为

$$\ddot{x}+2\varepsilon\delta\dot{x}+(\mu+\varepsilon\cos t)x=\varepsilon(Ax^3+Bx^2\dot{x}+Cx\dot{x}^2+D\dot{x}^3). \tag{68}$$

采用多尺度法可求得其一阶近似的平均方程为

$$\begin{aligned}\dot{p}&=-\delta p+\left(\frac{1}{2}-\mu_1\right)q+(p^2+q^2)\left[\left(\frac{1}{2}B+\frac{3}{8}D\right)p+\left(3A+\frac{1}{4}C\right)q\right],\\ \dot{q}&=\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)p-\delta q-(p^2+q^2)\left[\left(3A+\frac{1}{4}C\right)p-\left(\frac{1}{2}B+\frac{3}{8}D\right)q\right].\end{aligned} \tag{69}$$

(0,0)是式(69)的平衡点,且在(0,0)处的 Frechet 导数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\delta & \dfrac{1}{2-\mu_1}\\ \dfrac{1}{2+\mu_1} & -\delta\end{pmatrix}. \tag{70}$$

式(70)的临界特征可能有 4 种情况:0, $\pm\mathrm{i}\omega$, 0^2, (0,0).

3.1 有一个 0 特征根的情况

当 $\delta=\frac{1}{4}$, $\mu_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 时,式(70)变为

$$A_0=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4} & -\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}. \tag{71}$$

此时式(71)的特征根为:$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$,根据式(21)可求得:

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\delta}=-1,\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial\mu_1}=-\sqrt{3}. \tag{72}$$

从式(72)可以看出,参数 μ_1 对特征根 $\lambda=0$ 的影响更大.

3.2 有一对纯虚特征根的情况

当 $\delta=0$, $\mu_1=\frac{\sqrt{5}}{4}$ 时,式(70)变为

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{4}\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{4} & 0\end{pmatrix}. \tag{73}$$

此时式(73)的特征根为 $\lambda_1=\frac{i}{4}$, $\lambda_2=-\frac{i}{4}$,根据式(21)可求得

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\delta}=-1,\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\delta}=-1,\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial\mu_1}=\sqrt{5}i,\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\mu_1}=-\sqrt{5}i. \tag{74}$$

从式(74)可以看出,参数 δ 对特征根 $\lambda=\pm\frac{1}{4}\mathrm{i}$ 的实部影响更大.

3.3 有一对亏损 0 特征根的情况

当 $\delta=0$, $\mu_1=\frac{1}{2}$ 时,式(70)变为

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{75}$$

此时式(75)有一对亏损特征根为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$,根据式(54)可求得:

$$\Delta\lambda=\lambda_1=\pm\sqrt{-\Delta\mu_1}. \tag{76}$$

从式(76)可以看出,参数 μ_1 对特征根 $\lambda=0^2$ 的影响更大.

3.4 有两个半简 0 特征根的情况

这种情况不存在.

从上述分析可以看出,当系统有一个 0 特征根和一对亏损 0 特征根时,参数 μ_1 对动力学系统的影响更大;当系统有一对纯虚根时,参数 δ 对动力学系统的影响更大.

4 结 论

1)该方法可以有效地识别出对系统动力特性影响比较大的参数. 对于特征根为单根和半简的情况,该方法尤为简单. 对于特征根为亏损的情况,该方法虽略复杂,但同样适用.

2)该方法不仅可以识别出主分岔参数,而且按照参数对系统动力特性影响的大小进行排序,同样可识别出主要的开折参数.

3)该方法还可推广到具有周期系数的动力系统中. 对于有外激励的非自治系统,可以用平均法、多尺度法将其化为自治系统,同样可用该方法识别出对系统动力学行为影响比较大的主参数.

参考文献:

[1] CHEN Y S, ANDREW Y T L. Bifurcation and Chaos in Engineering [M]. London: Springer-Verlag, 1998.

[2] GOLUBITSKY M, LANGFORD W F. Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations [J]. Journal of Differential Equations, 1981, 41(3):375 – 415.

(下转第726页)