

# 二次 B-Spline 时域基函数的 TDFEM 的应用

吴霞<sup>1,2</sup>, 周乐柱<sup>1</sup>

(1. 北京大学 信息科学技术学院, 北京 100871, wuxiaeeecs00@gmail.com; 2. 复旦大学 信息科学与工程学院, 上海 200433)

**摘要:** 提出了时域有限元法(TDFEM)的一种新的基函数—二次 B-spline 时域基函数. 首先简述了时域有限元法的原理和基本公式; 然后提出了新型的基于 B-spline 函数的条件稳定和无条件稳定的时域有限元法方案, 并应用于三维电磁辐射问题. 通过典型的算例对这两种方案的精度、运算时间进行了比较, 证实了基于二次 B-spline 函数的时域有限元法的有效性. 通过稳定性理论分析得出该算法的精确稳定性, 并且通过数值计算的结果得到验证.

**关键词:** 时域有限元法; 二次 B-spline 时域基函数; 电磁辐射; 无条件稳定; 超宽带

中图分类号: O441

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)05-0836-05

## Application of quadratic B-spline temporal basis function in time-domain finite element method

WU Xia<sup>1,2</sup>, ZHOU Le-zhu<sup>1</sup>

(1. School of Electronic Engineering & Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China, wuxiaeeecs00@gmail.com;

2. School of Information Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** In order to be applied to electromagnetic (EM) radiation problems, a novel time-domain finite element method (TDFEM) on the basis of quadratic B-spline temporal basis functions is proposed. The formulation time-domain finite element methods is reviewed first. Then two TDFEM schemes based on quadratic B-spline temporal basis functions are presented: conditional stability and unconditional stability. They are validated via canonical cases. The efficiencies of the two schemes in precision level and run time are compared. The stability analysis of the proposed formulations is summarized and then verified through numerical results.

**Key words:** time-domain finite element method; quadratic B-spline temporal basis functions; electromagnetic radiation problems; unconditional stable; Ultra-wideband

在计算电磁领域, 有不同的时域分析计算方法, 例如时域有限差分法(FDTD)、时域积分法(TDIE)和时域有限元法(TDFEM)等, 致力于对各种不同的结构进行建模与仿真分析. 在众多的方法中, TDFEM 因其继承了 FEM 特别适用于复杂的几何结构和介电特性分布的优点, 及在非均匀介质体内产生的也是稀疏矩阵的长处, 因而在解决宽带特性的电磁场问题上弥补了 FDTD 和 TDIE 法的某些不足而被人们渐渐关注. TDFEM 起源于上世纪 80 年代, 分为两大类, 一类是最初

由 A. C. Cangellaris 等<sup>[1-3]</sup>提出的微分形式的点匹配时域有限元法. 该方法结合了 FDTD 显式积分法的简明性和传统有限元的灵活性, 但是会出现源于电场和磁场点在网格上的交替出现而产生的类似 FDTD 法的越级(leap-frog)问题. 为了避免或解决这些问题, 第 2 类隐式时域有限元法在 1995 年提出<sup>[4]</sup>. 该方法是基于电场(或磁场)的矢量有限元空间基函数和时间基函数展开的二阶矢量波方程, 其优点是简单而稳定, 缺点是每个时间步必须求解一个矩阵方程; 对于开域空间问题, 采用传统的吸收边界条件, 有限元计算空间十分庞大, 这个问题更加严重, 以致无法进行. 由于这些原因, 这类时域有限元法发展缓慢. 直到 2000 年

收稿日期: 2008-12-22.

作者简介: 吴霞(1982—), 女, 博士研究生;  
周乐柱(1944—), 男, 教授, 博士生导师.

初,由于完全匹配层(PML)<sup>[5]</sup>等概念的提出和应用,时域有限元法才得到较大的发展。

本文研究上述第2类的时域有限元法,与已报道的 TDFEM 方法不同的是,本文首次引入了 B-spline 函数作为时间基函数。另外,利用 Newmark- $\beta$  方法验证了相应的检测函数。B-spline 函数早在 1946 年被 I. J. Schenberg 提出<sup>[6]</sup>,因其插值特性和计算简单的优点近期才在计算电磁算法中被重视。B-spline 时域基函数已经在 FDTD 和 TDIE 算法中被采用并取得了不错的效果<sup>[7-8]</sup>。然而,目前在时域有限元法的研究中还没有具体应用 B-spline 时域基函数的报道。本文算法的另外两个特点是:1)采用 Sacks PML 做截断边界条件;2)采用高阶矢量有限元作为空间基函数。

# 1 TDFEM 基本公式

为了推导出电场的时域有限元方法,从一个时域电磁场的初值问题开始<sup>[3]</sup>,方程式如下:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_r}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_0}{\partial t}.$$

其中  $\mathbf{J}_0$  代表外加电流源,  $\varepsilon_r$  和  $\mu_r$  分别是相对介电常数和相对磁导率,  $c_0$  代表自由空间光速。用 Sacks PML 来截断有限区域,在 PML 区域,电场满足下式:

$$\nabla \times (\vec{\mathbf{A}}_M^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2 \vec{\mathbf{A}}_E}{c_0^2} \cdot \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{J}_0. \quad (1)$$

其中,  $\vec{\mathbf{A}}_M = \mu_r + \sigma_M/j\omega\mu_0$ ,  $\vec{\mathbf{A}}_E = \varepsilon_r + \sigma/j\omega\varepsilon_0$  为张量。为保证 PML 层对于不同频率具有同等的衰减能力,  $\vec{\mathbf{A}}_E = \vec{\mathbf{A}}_M = \text{diag}(\gamma_x\gamma_z/\gamma_x, \gamma_z\gamma_x/\gamma_y, \gamma_x\gamma_y/\gamma_z)$  应取  $\gamma_\xi = 1 + \beta_\xi/j\omega$ ,  $\xi = x, y, z$ <sup>[9]</sup>。

现将空间分割为一系列四面体,记  $N_i$  为相应的空域 Whitney 基函数<sup>[10]</sup>,并设  $\mathbf{E}$  可表示为它们的线性组合

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j e_j(t) \mathbf{N}_j(\mathbf{r}). \quad (2)$$

将(1)式点乘  $\vec{\mathbf{N}}_i$ , 进行全域积分,并利用  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  和 Green 公式,进行拉氏变换,记  $s = j\omega$ , 可得弱形式下的方程<sup>[4]</sup> 为

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left( (\nabla \times \vec{\mathbf{N}}_i) \cdot \vec{\mathbf{A}}_M^{-1} (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) + \vec{\mathbf{N}}_i \cdot \frac{s^2 \vec{\mathbf{A}}_E}{c_0^2} \vec{\mathbf{E}} \right) dV = \\ \iiint_{\Omega} (-s\mu_0 \vec{\mathbf{N}}_i \cdot \vec{\mathbf{J}}_0) dV. \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)代入式(3)得半离散化的时域方程为

$$[L] \frac{d^2}{dt^2} \{e\} + [M] \frac{d}{dt} \{e\} + [S] \{e\} - \{p\} + \{q\} = 0. \quad (4)$$

这里

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \iiint_V \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dV, \\ M_{ij} &= \iiint_V \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \mathbf{N}_i \cdot \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{N}_j dV, \\ S_{ij} &= \iiint_V \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j) dV + \\ &\quad \iiint_V \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0^2} \mathbf{N}_i \cdot \vec{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{N}_j dV, \\ p_i &= \iiint_V \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \mathbf{N}_i \cdot \sum_j (\vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_j) dV, \\ q_i &= \iiint_V \frac{1}{\mu \varepsilon_0} (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot \sum_j [(\vec{\mathbf{F}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j)] dV, \\ \vec{\mathbf{J}} &= \text{diag}\{\sigma_y + \sigma_z - \sigma_x, \sigma_z + \sigma_x - \sigma_y, \sigma_x + \sigma_y - \sigma_z\}. \end{aligned}$$

其中  $\vec{\mathbf{C}}$  是对角矩阵, 对角元为

$$\begin{aligned} \bar{C}_{xx} &= (\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - \sigma_z), \\ \bar{C}_{yy}, \bar{C}_{zz} &\text{可以根据}(x, y, z) \text{的轮换对称得到; 同理} \\ \vec{\mathbf{D}}, \vec{\mathbf{F}} &\text{也是对角矩阵, 对角元含时间卷积, 即} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{xx} &= \sigma_x(\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - \sigma_z) \cdot e^{-\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} t} * e_j(t), \\ \bar{F}_{xx} &= \left( \frac{\sigma_y(\sigma_x - \sigma_y)}{(\sigma_y - \sigma_z)} \cdot e^{-\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} t} + \frac{\sigma_z(\sigma_x - \sigma_z)}{(\sigma_z - \sigma_y)} \cdot e^{-\frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} t} \right) * e_j(t). \end{aligned}$$

为了把式(4)的半离散化的时域方程转变成完全离散化的时域方程,  $e_j(t)$  应当由某种时间基函数  $T^m(t)$  展开, 即

$$e_j(t) = \sum_m e_j^m T^m(t). \quad (5)$$

其中  $e_j^m$  是  $e_j(t)$  在  $t = t^m$  ( $m$  为整数) 时相对应的值。在以往报道的时域有限元法文献中,  $T^m(t)$  都采用如下的线性时域基函数:

$$T^m(t) = 1 - \left| \frac{t - m\Delta t}{\Delta t} \right|, \quad |t - m\Delta t| \leq \Delta t.$$

本文采用二次 B-spline 函数作为时域基函数。

# 2 B-spline 时域基函数

构造 B 样条函数时, 给定阶数  $n$ , B 样条函数  $\phi^n(x)$  的表达式为<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} \phi^n(x) &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i (x - i + 1)^n \cdot \\ &\quad H(x - i + 1). \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $H(x)$  是阶跃函数。B 样条函数虽然是分段函数, 但  $(n-2)$  次导数连续, 因此用在 TDFEM 中可以更精确地进行时域离散。

在式(6)中取  $n = 3$  得到本文所用的二阶 B-spline 时域基函数的表达式由下式给出。

$$T(t) = \begin{cases} 0.5(t/\Delta t + 1)^2, & -\Delta t \leq t \leq 0; \\ -(t/\Delta t)^2 + t/\Delta t + 0.5, & 0 \leq t \leq \Delta t; \\ 0.5(t/\Delta t)^2 - 2(t/\Delta t) + 2, & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t. \end{cases} \quad (7)$$

### 3 两种基于 B-spline 的 TDFEM

该新算法的稳定性是至关重要的. 鉴于稳定性依赖于时域的离散化, 而且有多种方法把式(4)变成一个完全离散的矩阵方程, 如中心差分、前向差分、后向差分或 Newmark-β 法<sup>[12]</sup>. 本文采取和空间离散同样的方法, 即用 时域基函数来获得完全离散化的方程. 时域离散展开系数的值取决于离散化时域基函数和测试函数的具体形式.

#### 3.1 条件稳定 (CS) B-spline 函数 TDFEM 方案

第一种选择是采用如下的 B-spline 函数和测试函数:

$$W_{n1}(t) = 9 |t/\Delta t|^2 - 9 |t/\Delta t| + 2. \quad (8)$$

将时域基函数(7)代入(5), 再代回到(4)式, 利用式(8)做测试函数, 最终的完全离散化时域方程为

$$\begin{aligned} \frac{[L]}{2(\Delta t)^2}(e^{n+2} - e^{n+1} - e^n + e^{n-1}) - \frac{[M]}{4\Delta t}(e^{n+2} + e^{n+1} - e^n - e^{n-1}) + [S](\beta_2 e^{n+2} + \beta_1 e^{n+1} + \beta_0 e^n + \beta_{-1} e^{n-1}) = - \sum_{i=n-1}^{n+2} \beta_{i-n}(p^i + q^i). \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $\beta_{-1} = \beta_2 = 13/120, \beta_0 = \beta_1 = 47/120$ .

#### 3.2 无条件稳定 (UCS) B-spline 函数 TDFEM

另一种选择是采用的 B-spline 函数和测试函数为

$$W_{n2}(t) = 60 |t/\Delta t|^3 - 75 |t/\Delta t|^2 + 21 |t/\Delta t|.$$

最终的完全离散化时域方程形如式(9), 参数  $\beta_i$  不同:  $\beta_{-1} = \beta_2 = 1/8, \beta_0 = \beta_1 = 3/8$ .

#### 3.3 稳定性分析

包含 PML 部分的 TDFEM 完全离散方程的稳定性分析很复杂, 文献[13]中证明了式(4)中的  $[M]$ ,  $\{p\}$  和  $\{q\}$  这几项, 对整个方程的稳定性影响很微小, 故而为了简便起见可以忽略不计. 对化简了的式(4), 用 Newmark-β 法来离散化, 再进行  $z$  变换, 得到

$$- [L] \frac{(z-1)^2}{(\Delta t)^2} \tilde{e}(z) = [S] \left[ \frac{z-1}{z - e^{-\sigma \Delta t/\varepsilon}} \right] (\beta z^2 + (1 - 2\beta)z + \beta) \tilde{e}(z). \quad (10)$$

定义  $\sigma = \max\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ , 式(10)可转化成特征值问题. 假定矩阵  $[L]^{-1}[S]\Delta t^2$  的特征值为  $\lambda$ , 式(10)可写成

$$(z-1)^2 + \lambda \left[ \frac{z-1}{z - e^{-\sigma \Delta t/\varepsilon}} \right] (\beta z^2 + (1 - 2\beta)z + \beta) = 0. \quad (11)$$

稳定条件是式(11)中的根  $z$  落在单位圆内, 相应的  $\lambda$  的取值范围在  $0 \sim \lambda_{\max}$ , 即

$$0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = [-(1 - 12\beta - e^{-\sigma \Delta t/\varepsilon} -$$

$$4\beta e^{-\sigma \Delta t/\varepsilon})]/(1 - 16\beta^2) + [((1 - 12\beta - e^{-\sigma \Delta t/\varepsilon} - 4\beta e^{-\sigma \Delta t/\varepsilon})^2 - 8(1 + e^{-\sigma \Delta t/\varepsilon})(16\beta^2 - 1))^{1/2}]/(1 - 16\beta^2).$$

当  $\beta \geq 1/4$  时, 不论  $\Delta t$  取多大都可以满足  $z$  的值在单位圆内, 即该格式是无条件稳定的.

对式(9)引入  $\beta = 2\beta_2$ , 用上面同样的方法对其进行  $z$  变换, 得到的特征值方程与式(11)一样. 所以, 当在半离散方程(4)中采用  $W_{n1}(t)$ , 时域离散方程(9)的参数  $\beta = 13/60 < 1/4$ , 是条件稳定的; 而在半离散方程(4)中采用  $W_{n2}(t)$ , 时域离散方程(9)的参数  $\beta = 1/4$ , 则是无条件稳定的. 条件稳定方案的稳定条件是选取满足下式的  $\Delta t$ ,  $\rho(\cdot)$  代表谱半径.

$$\Delta t \leq \sqrt{\lambda_{\max}} / \sqrt{\rho([L]^{-1}[S])}.$$

### 4 算例分析

基于上述 TDFEM 编制 FORTRAN 程序并在 P4 计算机上实现, 用此程序计算了一些算例来验证算法的精确性和有效性. 脉冲函数采用高斯脉冲, 由下式给出:

$$V = (1 - (t - t_0)^2/T^2) \exp[-0.5 \times (t - t_0)^2/T^2].$$

其中  $t_0 = 6T, f_0 = 1/T = 2\,946\text{ MHz}$ . 图 1 是高斯脉冲的波形和波谱图.

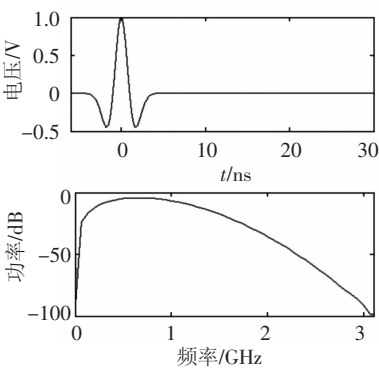


图 1 高斯脉冲的波形和波谱图

#### 4.1 谐振腔

为了证实新算法的精确性和有效性, 第一个算例是尺寸为  $0.072\text{ m} \times 0.050\text{ m} \times 0.072\text{ m}$  的无损谐振腔. 采用高斯脉冲源, 先计算了电场的时域响应, 然后通过时间响应的快速傅立叶变换得到谐振腔的谐振频率. 表 1 列出了各种时域基函数的 TDFEM 谐振腔的 TE 模谐振频率和对应的解析解.

从该表中可以看出, 条件稳定和无条件稳定的 B-spline 函数 TDFEM 都和解析解吻合得很好, 从而证明了前面提出的方法的精确性和有效性. 在精度上, 条件稳定二次 B-spline 算法显示出更小的相对误差.

表 1 谐振腔的 TE 模谐振频率

| 采用的方法                         | TE <sub>101</sub> |        | TE <sub>111</sub> |        | TE <sub>301</sub> |        |
|-------------------------------|-------------------|--------|-------------------|--------|-------------------|--------|
|                               | 谐振频率/MHz          | 相对误差/% | 谐振频率/MHz          | 相对误差/% | 谐振频率/MHz          | 相对误差/% |
| 解析解                           | 2 946             |        | 4 205             |        | 6 588             |        |
| 线性基函数                         | 2 951             | 1.70   | 4 177             | 6.70   | 6 484             | 1.60   |
| 条件稳定二阶 B 样条算法 <sup>[14]</sup> | 2 947             | 0.34   | 4 193             | 2.90   | 6 496             | 1.40   |
| 无条件稳定二阶 B 样条算法                | 2 949             | 1.00   | 4 187             | 4.30   | 6 488             | 1.50   |

4.2 偶极子天线

第二个算例是偶极子天线,由图 2 所示.天线的两极长度  $L$  皆为 25 mm,馈源沿  $y$  轴.采用均匀剖分,未知量总数为 10 560.图 2 给出了偶极子天线的瞬态响应,观察点在  $r = (-0.036x, 0.036y, 0.018z)$  m 处.

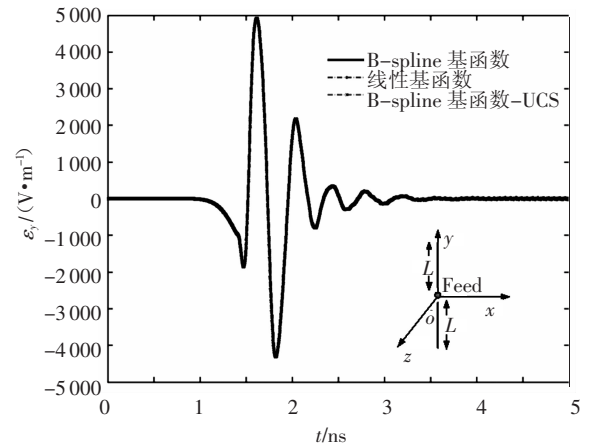


图 2 电场值的  $y$  方向分量

为了进一步证实远场结果的正确性,通过傅立叶变换获得了 2.9 GHz 下的  $E$ -面方向图,见图 3,并与文献[15]和传统的频域有限元算法的结果进行比较.其中,实线代表采用条件稳定 B-spline 时域基函数的 TDFEM,圆圈代表采用传统 TDFEM 的结果,星星代表采用无条件稳定 B-spline 时域基函数,由此可以看出新时域有限元算法的数值结果与之很好地吻合.

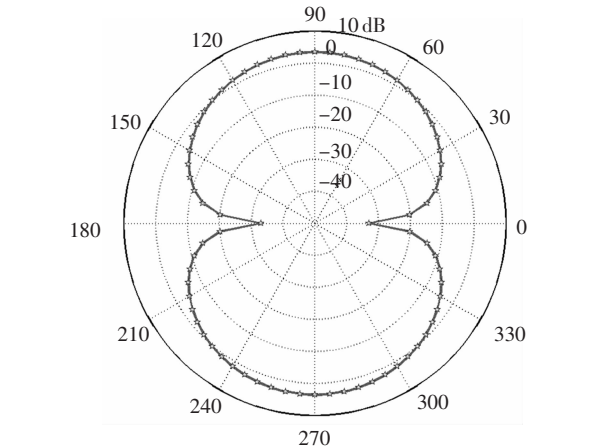


图 3  $E$ -面方向图

在运算效率方面,传统的 TDFEM,时间步长取  $dt = 5$  ps,运算时间为 649.6 s;若取  $dt = 10$  ps,在 420 步发散;B-spline 函数条件稳定方案,时间步长取  $dt = 5$  ps,运算时间为 605.969 s;若取  $dt = 10$  ps,在 400 步发散;而无条件稳定的方案,时间步长取  $dt = 10$  ps,运算时间为 455.437 s.从而证实了无条件稳定算法可以取较大的时间步长,节约了运算时间.

4.3 超宽带分形蝴蝶天线

第 3 个算例是超宽带分形蝴蝶天线,其结构如图 4 所示(左图是传统的蝴蝶天线,中间是  $S = 1$  情况下的分形蝴蝶天线,右图是  $S = 2$  情况下的分形蝴蝶天线). $L = h = 0.032$  m,馈源在天线中心处,沿  $y$  轴方向.3 种天线未知量总数分别为 10 458,36 211 和 20 992.采用条件稳定 B-spline 函数,时间步长取  $dt = 5$  ps.



图 4 分形蝴蝶天线的结构图

在图 5 中给出了这 3 种天线在频率增长情况下的  $E$ -面方向图,很容易发现在 1.2 GHz 时,3 种天线的差别不大;而在 3 GHz 或是更高的 6 GHz 或 8 GHz,传统的蝴蝶天线衰减更多.

通过以上算例,表明 TDFEM 可以直接在时域模拟超宽带天线的特性,而避免了传统频域方法在扫频上所消耗的计算时间.在超宽带天线和雷达设计方面可得到广泛的应用.

5 结 论

文中推导了 2 种基于二次 B-spline 函数的时域有限元法计算格式,一种是条件稳定的方案,另一种是无条件稳定的方案.对这两种计算格式进行稳定性理论分析,得出该算法的稳定性条件.通过算例分析,得出条件稳定的方案在时间步长取值较大时会发散;而无条件稳定的方案在时间步

长选取上有更大的范围,所以运算时间少于前者. 数值结果证实了基于二次 B-spline 函数的时域有限元法的有效性.

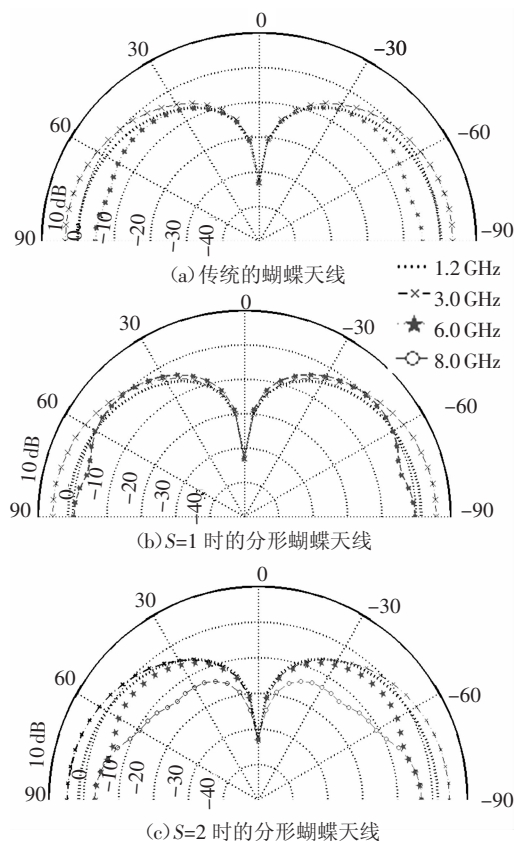


图 5 传统和分形蝴蝶天线在不同频率下的 E-面方向图

参考文献:

- [1] CANGELLARIS A C, LIN C C, MEI K. Point-matched time domain finite element methods for electromagnetic radiation and scattering[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1987, 35(10): 1160-1173.
- [2] CANGELLARIS A C. Time-domain finite methods for e-lelectromagnetic wave propagation and scattering[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1991, 27(5): 3780-3785.
- [3] LEE J F, LEE R, CANGELLARIS A C. Time-domain finite-element methods[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997, 45(3): 430-442.
- [4] GEDNEY S D, NAVSARIWALA U. An unconditionally stable finite element time-domain solution of the vector wave equation[J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1995, 5(10): 332-334.
- [5] BERENGER J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114: 185-200.
- [6] SCHOENBERG I J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic function[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1946, 4(1): 45-99, 4(2): 112-141.
- [7] WANG P, XIA M Y, JIN J M, et al. Time domain integral equation solvers using quadratic B-spline temporal basis functions[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2007, 49(5): 1154-1159.
- [8] HOMSUP N. An B-spline based high-order finite difference timedomain schemes for the Maxwell equations [C]//Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference. Sydney: [s. n.], 2000: 962-965.
- [9] SACKS Z S, KINGSLAND D M, LEE R, et al. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1995, 43(12): 1460-1463.
- [10] LEE J F, SACKS Z. Whitney elements time domain (WETD) methods[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1995, 31(3): 1325-1329.
- [11] GREVILLE T N E. Theory and Application of Spline Functions[M]. New York: Academic, 1969.
- [12] NEWMARK N. A method of computation for structural dynamics[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1959, 85: 67-94.
- [13] JIAO D, JIN J M, MICHELSEN E, RILEY D. Time-domain finite-element simulation of three-dimensional scattering and radiation problems using perfectly matched layers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(2): 296-305.
- [14] WU X, ZHOU L Z. Application of B-spline temporal basis function in time-domain finite element method for three-dimensional EM radiation problem [C]//Proceedings of 2008 Asia-Pacific Symposium on EMC & 19th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility. Singapore: [s. n.], 2008: 774-777.
- [15] LOU Z, JIN J M. Modeling and simulation of broadband antennas using the time-domain finite element method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2005, 53(12): 4099-4110.

(编辑 张 宏)