第42卷 第7期 2010年7月
哈 尔 滨 工 业 大 学 学 报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 42 No. 7 July 2010

基于粒子的非牛顿流体模拟统一模型

孙洪全，韩纪庆

（哈尔滨工业大学 计算机科学与技术学院，哈尔滨 150001，hqsun@126.com）

摘　要：为模拟非牛顿流体的运动现象，提出了一种基于粒子的模拟方法. 通过对 Navier-Stokes 方程组添加应力张量项，并利用光滑粒子流体动力学的基本方法进行求解，建立了非牛顿流体模拟的统一模型. 实验结果表明，通过调节模型参数 k 和 μ，流体可表现出不同的弹性和塑性. 增大 k 而减小 μ，流体会表现出较强的塑性和较弱的弹性，反之，增大 μ 而减小 k，流体会表现出较强的弹性和较弱的塑性. 通过扩展 Navier-Stokes 方程组，模型能够真实的模拟具有不同弹性和塑性性质的非牛顿流体.

关键词：光滑粒子流体动力学；非牛顿流体；流体模拟

中图分类号：TP391　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0367-6234(2010)07-1104-04

A unified particle model for non-Newtonian fluid simulation

SUN Hong-quan，HAN Ji-qing

（School of Computer Science and Technology，Harbin Institute of Technology，Harbin 150001，China，hqsun@126.com）

Abstract：For simulating non-Newtonian fluid motion，in this paper a particle-based method is proposed in this paper. Through adding the stress tensor terms into the Navier-Stokes equations and using the essential method of smoothed particle hydrodynamics，a unified model for simulating non-Newtonian fluid is established. The experimental results show that the elasticity and plasticity of the fluid will change with the values of model parameters k and μ. The fluid exhibits more obvious plastic flow and weaker elasticity when k is increased and μ is decreased，conversely，the fluid exhibits stronger elasticity and weaker plasticity when μ is increased and k is decreased. By extending the Navier-Stokes equations，non-Newtonian fluid with various elastic and plastic characteristics can be simulated realistically by using this model.

Key words：smoothed particle hydrodynamics；non-Newtonian fluid；fluid simulation

非牛顿流体兼具固体和流体两方面特性，其受到外力作用时能够产生弹性形变（类似于固体），而当形变导致的应力足够大时会产生流动（类似于流体），如粘土、蛋清、牙膏、明胶等. 与只具有粘性的牛顿流体相比，非牛顿流体还具有弹性和塑性，其运动行为更加复杂，对其运动现象的模拟更加困难.

在计算机动画领域，近年来光滑粒子流体动力学[1-2]（Smoothed Particle Hydrodynamics，SPH）理论已成为一类重要的粒子方法. Carlson 等[3]模拟了高粘性物质，其忽视了粘弹性物质的弹性性质. Goktekin 等[4]利用线性 Maxwell 模型计算流体的应变张量，模拟了粘弹性流体运动，但没有模拟流体的塑性. 与文献[4]类似，Hai Mao 等[5]基于 SPH 方法并利用共旋 Maxwell 模型导出应变张量，可以模拟流体的旋转运动. Müller 等[6]构建了一种基于点的流体模拟方法，将连续介质力学和 von Misses 塑性屈服条件相结合，并利用移动最小二乘方法（Moving Least Squares，MLS）计算速度张量场. Paiva 等[7]基于 SPH 方法模拟粘塑性流体，能够利用单个参数调节流体运动效果.

目前已提出的模拟非牛顿流体的各种方法都具有一定的局限性，其中，一些方法适用于粘弹性流体，另一些适用于粘塑性流体. 本文通过扩展纳维-斯托克斯方程组（Navier-Stokes Equations，

收稿日期：2009-08-30.
作者简介：孙洪全（1979—），男，博士研究生；
韩纪庆（1964—），男，教授，博士生导师.

NSE)[8]，使其包含弹性应变和塑性应变，构建了一种模拟非牛顿流体的统一模型，能够同时刻画流体的粘性、弹性和塑性.

1　光滑粒子流体动力学

在 SPH 理论中，整个流体通过离散的粒子来表示，每个粒子上都承载了如质量，密度，速度和压强等物理量. 空间任意位置 x 处的性质可通过对 x 附近的粒子加权平均计算得到，所涉及的粒子数目由一个具有有限支集的核函数 W 决定为

$$A(x) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(x - x_j, h), \tag{1}$$

$$\nabla A(x) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(x - x_j, h). \tag{2}$$

式中：m_j，ρ_j，A_j 分别为粒子 j 的质量，密度和场值，h 为核函数 W 的支集半径.

本文使用 3 次样条函数作为核函数[9].

2　非牛顿流体模型

与牛顿流体相比，非牛顿流体还具有弹性和塑性，本文通过在 NSE 中添加应变张量项，使其可以刻画非牛顿流体的运动，具体形式为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\nabla \cdot u, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\nu}{\rho}\nabla^2 u + \frac{\mu}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^E + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^P + g. \tag{4}$$

式(3) 为连续性方程，式(4) 为动量守恒方程. 其中，u 为速度，ρ 为密度，p 为压强，ν 为粘性系数，μ 为弹性系数，g 为重力加速度，$\boldsymbol{\varepsilon}^E$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ 分别为弹性和粘塑性应变张量.

求解式(3) 的 SPH 计算公式[10] 为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j m_j u_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}.$$

式中：$u_{ij} = u_i - u_j$，$W_{ij} = W(x_i - x_j, h)$. 每个粒子的密度被初始化为基准密度 ρ_0，其变化由粒子之间的相对运动决定.

求解式(4) 时，需要对其右侧的各项分别建立 SPH 计算公式，在计算 $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ 时采用的计算格式为

$$-\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i = -\sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}\right)\nabla W_{ij}. \tag{5}$$

式(5) 中的压强根据状态方程[11] 计算为

$$p = c^2(\rho - \rho_0).$$

式中：c 为声速，ρ 为粒子的密度，ρ_0 为流体的静止密度.

利用对称化方法，粘性项的计算公式为

$$\frac{\nu}{\rho_i}\nabla^2 u = \nu \sum_j m_j \frac{u_j - u_i}{\rho_i \rho_j}\nabla^2 W_{ij}. \tag{6}$$

式(4) 右侧的 $\frac{\mu}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^E + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^P$ 反映了流体弹性和塑性应变产生的加速度，需要先计算其中的 $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^P$. 应变张量很难通过简单函数刻画，通过应变率间接计算流体应变. 由于非牛顿流体兼具弹性和塑性，故可将总应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ 分为弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ 和塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ 两个部分，其相应的 3 种应变率分别记作 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^E$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$，且有 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^E + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$.

在 $t + \Delta t$ 时刻的流体弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^E(t + \Delta t) = \boldsymbol{\varepsilon}^E(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^E \mathrm{d}t. \tag{7}$$

为刻画流体的局部总形变，总应变率张量被定义为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T). \tag{8}$$

其中，∇u 所对应的 SPH 计算公式为

$$\nabla u = \sum_j \frac{m_j}{\rho_i}(u_j - u_i)\nabla_i W_{ij}. \tag{9}$$

根据式(7) 计算弹性应变 ε^E，必须先计算出弹性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^E$. 弹粘塑性流体受到外力作用后，会产生弹性应变，当其累计达到一定程度时，才会出现塑性流动现象. 本文利用 von Mises 准则判定是否产生塑性流动，为此需要先计算无迹应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}'$，并根据 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 的 Frobenius 范数 $\|\boldsymbol{\varepsilon}'\|$ 度量弹性应变的大小，当 $\|\boldsymbol{\varepsilon}'\|$ 大于某个阈值 D 时，判定流体出现塑性流动，否则塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P$ 为 0. 无迹应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}^T - \frac{\mathrm{Trace}(\boldsymbol{\varepsilon}^T)}{d}\boldsymbol{I}. \tag{10}$$

式中：d 为维数，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ 为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = k\frac{\boldsymbol{\varepsilon}'}{\|\boldsymbol{\varepsilon}'\|}\max(\|\boldsymbol{\varepsilon}'\| - D, 0). \tag{11}$$

式中：k 为调整塑性效应的比率，D 为塑性屈服阈值. 由 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^E + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$，可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^E = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}) - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'}{\|\boldsymbol{\varepsilon}'\|}\max(\|\boldsymbol{\varepsilon}'\| - D, 0). \tag{12}$$

将式(12) 代入式(7) 可计算出弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^E$，塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^P$[12] 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^P = \eta(T)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P. \tag{13}$$

式中：$T = \sqrt{2 \cdot \mathrm{Trace}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P)^2}$，$\eta(T) = (1 - \mathrm{e}^{-(J+1)T})(T^{n-1} + T^{-1})$，$J$，$n$ 分别为调节流体的塑

性形变特性,文中取 $J = 10$, $n = 0.5$.

综上所述,式(4)最终的 SPH 计算公式为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_j m_j\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}\right)\nabla_i W_{ij} + \nu\sum_j m_j \frac{u_j - u_i}{\rho_i\rho_j}\nabla^2 W_{ij} + \mu\sum_j m_j\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i^E}{\rho_i^2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_j^E}{\rho_j^2}\right)\cdot\nabla_i W_{ij} + \sum_j m_j\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i^P}{\rho_i^2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_j^P}{\rho_j^2}\right)\cdot\nabla_i W_{ij} + g. \tag{14}$$

注意到式(14)右侧的 4 个和式形式类似,实际计算时可以合并,故只需一次求和迭代即可.

流体粒子的位移由方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u$ 控制,本文采用二阶精度的 Leap Frog 格式[13]对其求解.

3 算法实现

整个模拟算法的每个迭代步骤都要利用式(14)计算各个流体粒子新的速度. 由于核函数具有有限的支集半径 h,在计算时只涉及以当前粒子为中心,以 h 为半径的空间内的其它粒子,称这些粒子是相邻的. 显然,模拟算法需要频繁的确定每个粒子的所有相邻粒子,该过程被称为最近邻粒子搜索(Nearest Neighboring Particle Searching, NNPS),假设粒子总数为 N. 本文算法中使用固定的核函数支集半径 h,可以将整个模拟区域均匀划分成边长为 $2h$ 的小立方体,简称单元,在搜索特定粒子 p 的邻居时,只需在粒子 p 所在单元及其相邻单元进行搜索即可. 如果每个单元的粒子平均数足够小,则搜索算法的计算复杂度为 $O(N)$.

4 实验结果

通过两组实验来验证算法的有效性,实验中使用的硬件环境为:CPU:AMD ATHLON XP 2.0 GHz, RAM:DDR400 1 GB.

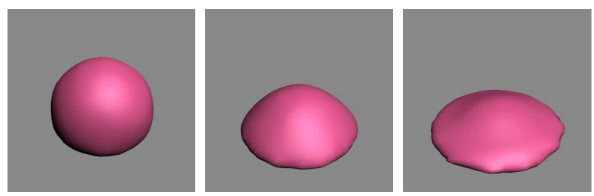
为可视化计算结果,利用 Marching Cubes 算法[14]导出粒子颜色场[15]的等势面,并利用 POV-Ray 3.6 进行渲染. 实验中选取固定的粘性系数,即 $\nu = 1$. 表 1 中列举了两组实验的粒子数和帧速.

表 1 两组实验的粒子数和帧速

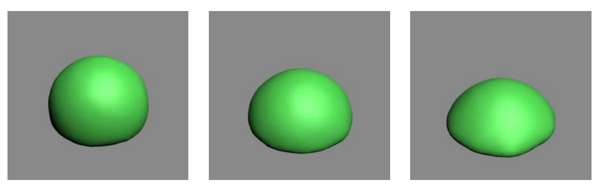
实验方案	粒子数/个	帧速/(帧 · s^{-1})
实验 1	2 588	8.6
实验 2	2 514	9.1

实验 1 中模拟了球状流体从空中落到地面后的形变过程,模拟结果如图 1 所示. 通过选取不同的弹性和塑性系数并对比模拟结果,可以观察到本文模型能够有效的表现出流体的弹性和塑性性质.

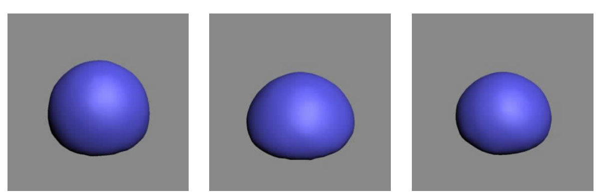
图 1 中包含 3 组动画序列,其分别对应于不同的 μ 和 k 取值,各组动画序列从左到右依次对应流体的初始形态、中间形态和最终形态. 通过观察图 1(a)和图 1(b)可以发现,当塑性效应比率系数 k 取相同值时,若弹性系数 μ 取值较小,则流体表现的弹性较小,而 μ 取值较大时,流体具有较大的弹性. 图 1(b)和图 1(c)分别对应 $\mu = 100$, $k = 1$ 和 $\mu = 100$, $k = 0.2$ 两组参数的模拟结果. 可以看到,当弹性系数 μ 取值相同时,塑性效应比率系数 k 取值越小,流体的塑性流动越不显著,即其恢复到原始形态的能力越强.



(a) $\mu = 10$, $k = 1$



(b) $\mu = 100$, $k = 1$

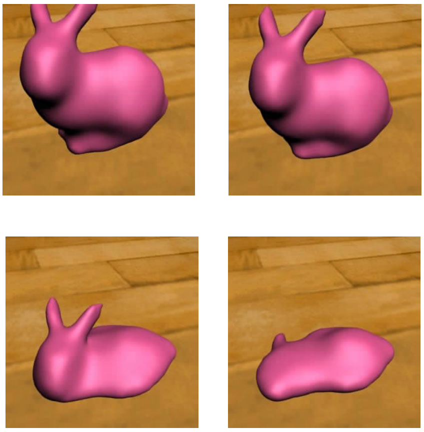


(c) $\mu = 100$, $k = 0.2$

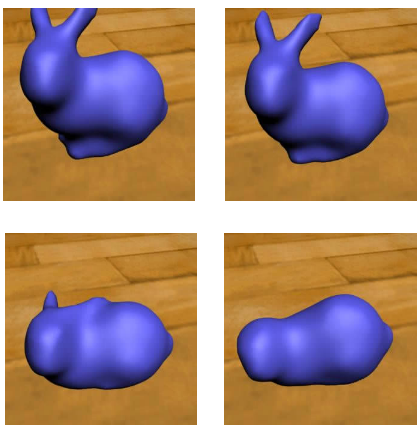
图 1 不同参数取值时流体模拟动画序列

实验 2 模拟了初始形态为 Bunny 模型的流体形变过程,模拟结果如图 2 所示. 在初始时刻 Bunny 模型被放置于地板上,由于受到重力的作用随即发生形变和流动. 图 2 中包含两组动画序列,分别对应不同参数的模拟结果. 通过观察图 2(a)和图 2(b)可以发现,增大系数 k 而减小系数 μ,流体会表现出较强的塑性和较弱的弹性,反之,增大系数 μ 而减小系数 k,流体会表现出较

强的弹性和较弱的塑性. 因此,通过适当选取弹性系数μ和塑性效应比率k,本文模型能够模拟具有不同弹性和塑性性质的非牛顿流体.



(a) $\mu = 10$, $k = 1$



(b) $\mu = 100$, $k = 0.2$

图 2　Bunny 模型的模拟动画序列

5　结　论

1)通过扩展 Navier-Stokes 方程组使其包含应力张量项,建立了能够同时表现非牛顿流体的粘性、弹性和塑性的统一模型. 通过调节弹性系数μ和塑性效应比率k,能够模拟具有不同弹性和塑性性质的非牛顿流体,具有较强的通用性.

2)本文方法是对现有牛顿流体模拟方法的扩展,可以较容易地集成到现有的流体动画制作系统中,具有较好的应用前景.

参考文献:

[1] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. The Astronomical Journal, 1977, 82(12):1013 – 1024.

[2] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to nonspherical stars[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181(2): 375 – 389.

[3] CARLSON M, MUCHA P J, Van H III R B, *et al.* Melting and flowing[C]//Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM, 2002: 167 – 174.

[4] GOKTEKIN T G, BARGTEIL A W, O'BRIEN J F. A method for animating viscoelastic fluids [C]//ACM Transactions on Graphics. New York: ACM, 2004: 463 – 468.

[5] MAO H, YANG Y H. A Particle-based Model for Non-Newtonian Fluid[R]. University of Alberta: Department of Computing Science, 2005.

[6] MÜLLER M, KEISER R, NEALEN A, *et al.* Point based animation of elastic, plastic and melting objects [C]//Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville. Switzerland: Eurographics Association, 2004: 141 – 151.

[7] PAIVA A, PETRONETTO F, LEWINER T, *et al.* Particle-based non-Newtonian fuid animation for melting objects [C]//XIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing. [s. l.]: [s. n.], 2006: 78 – 85.

[8] CHORIN A, MARSDEN J E. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics[M]. Berlin Heideberg: Springer-Verlag Publishing Company, 2000.

[9] WENDLAND H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree [J]. Advances in Computational Mathematics, 1995, 4(1): 389 – 396.

[10] MONAGHAN J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 110(2): 399 – 406.

[11] MORRIS J P, FOX P J, ZHU Y. Modeling low reynolds number incompressible flows using SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 136(1): 214 – 226.

[12] De Souza MENDES P R, DUTRA E S S, SIFFERT J R R, *et al.* Gas displacement of viscoplastic liquids in capillary tubes[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2007, 145(1): 30 – 40.

[13] LI S, LIU W K. Meshfree Particle Methods[M]. Berlin Heideberg: Springer, 2004.

[14] LORENSEN W E, CLINE H E. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm[J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 163 – 169.

[15] MÜLLER M, CHARYPAR D, GROSS M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C]//Symposium on Computer Animation San Diego. California: Eurographics Association, 2003: 154 – 159.

(编辑　张　红)