

光滑粒子流体动力学法拉伸不稳定性改进研究

贾 斌¹, 马志涛², 张 伟¹, 庞宝君¹

(1. 哈尔滨工业大学 航天工程系, 哈尔滨 150080, jiabin@hit.edu.cn; 2. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

摘 要: 针对光滑粒子流体动力学(SPH)法在涉及材料强度的问题中存在着拉伸不稳定性,提出了一种改进拉伸不稳定性的连续型人工力,给出了其应用条件,并建立了该人工力的张量形式. 通过在消除压缩不稳定性的人工粘性力的基础上叠加抗拉伸不稳定的人工力,建立了统一形式的人工力. 通过两个算例的计算及比较,表明该人工力的计算结果振荡小并且接近有限元法的计算结果,优于其它形式的人工力. 该人工力使SPH法的拉伸不稳定性得到了更好的改善.

关键词: SPH; 拉伸不稳定; 人工力; 张量

中图分类号: O347

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)09-1369-05

Improvement of tensile instability in smoothed particle hydrodynamics

JIA Bin¹, MA Zhi-tao², ZHANG Wei¹, PANG Bao-jun¹

(1. Department of Astronautics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China, jiabin@hit.edu.cn;
2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: To solve the problem that tensile instability may occur in adopting Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) in the cases involved in material strength, an artificial stress of continuum type was presented to improve the tensile instability. The condition of application of the artificial stress was given and the tensor form of the stress was set up. The unification form of artificial stress was established through combining the artificial viscosity stress that eliminates compressive instability and the artificial stress that resists tensile instability. Two examples were calculated and the results were compared. It is indicated that better results can be obtained by using the artificial stress presented than those of other forms. The results have less vibration and approach those of Finite Element Method, which proves that the artificial stress presented can improve the tensile instability in SPH.

Key words: SPH; tensile instability; artificial stress; tensor

光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics,简称SPH)法最初是由 Lucy L B^[1]于1977年提出的一种纯 Lagrange 无网格方法,并在天体物理领域里得到了广泛应用,成功地模拟了超新星爆发、银河系的形成和演化、云团的碰撞等超大尺度的复杂问题. 该方法的基本思想是将整个流场的物质离散为一系列具有质量、速度和能量的“粒子”,然后通过一个称为“核函数”的积分

进行“核函数估值”,从而求得流场中不同位置在不同时刻的各种动力学量. 1993年 Libersky L D 等^[2]首先将材料强度效应引入 SPH 方法,成功进行了高速碰撞数值模拟.

但 SPH 方法中存在着一些内在的缺点,其中一个主要问题便是 1995年 Sweigle J W 等人^[3]指出的在具有材料强度的问题中存在着拉伸不稳定性. 为改进这一问题, Morris J P^[4]提出了应用特殊核函数,因为拉伸不稳定与核函数的二阶导数紧密相关,尽管此方法在一些情况中非常成功,但对于一般情况却不能总得到令人满意的结果. Wen Y 等^[5]及 Balsara D S^[6]提出了守恒光滑的方法来消除拉伸不稳定,但该方法并不能解决所有

收稿日期: 2009-07-20.

基金项目: 中国空间技术研究院创新基金资助项目(CAST200723).

作者简介: 贾 斌(1975—),男,副教授;

张 伟(1964—),男,教授,博士生导师;

庞宝君(1963—),男,教授,博士生导师.

的情况,而且还增加了计算时间. Dyka C T 等^[7-8]首次在一维算法中引入了应力点法,随后 Randles P W 等^[9]将该方法扩展到了多维空间,其中 SPH 粒子与应力粒子交错排列,该方法虽然能够解决拉伸不稳定,但增加了大量的计算时间和内存. Monaghan J J 等^[10-11]提出了用于稳定计算的人工力,该力与具体的核函数有关,虽然在一定程度上解决了拉伸不稳定的问题,但依然存在一定的震荡. 本文提出了一种改进形式的人工力,并在人工粘性力的基础上叠加抗拉伸不稳定的人工力,建立了统一的张量形式的人工力.

1 SPH 基本方程

考虑材料的弹塑性效应,全应力张量空间中的 SPH 插值公式的质量守恒方程、动量守恒方程、能量守恒方程分别表示为^[12-13]

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j (v_i - v_j) \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (1)$$

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = - \left[\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta} \right], \quad (2)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) (v_i^\alpha - v_j^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta}. \quad (3)$$

其中: ρ 为密度; m 为粒子质量; v 为粒子速度; $\sigma^{\alpha\beta}$ 为应力张量(上角标 α 和 β 表示张量坐标); e 为比内能; x 为位置矢量; W 为核函数;下标 i 为粒子编号,下标 j 为 i 粒子的近邻粒子编号. 核函数取最常用的三次 B-Spline 函数

$$W(s, h) = \alpha_d \begin{cases} 2/3 - s^2 + 0.5s^3, & 0 \leq s < 1; \\ (2 - s)^3/6, & 1 \leq s < 2; \\ 0, & s \geq 2. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $s = |x - x'|/h$, h 是光滑长度;在一维、二维、三维中, α_d 分别为 $1/h, 15/(7\pi h^2), 3/(2\pi h^3)$;函数的影响域 $|x| = 2h$.

2 拉伸不稳定性

2.1 压缩失稳与拉伸失稳

所谓拉伸不稳定性,是指当粒子处于拉伸应力状态时,粒子的运动变得不稳定,从而出现粒子凝集和较大的空洞. Swegle J W 等^[3]曾对其进行了比较细致的研究,指出这种不稳定性是由核函数的二阶导数和应力状态的乘积决定的,并提出了拉伸失稳产生的充分条件,如下式所示:

$$W''\sigma > 0. \quad (5)$$

式中: W'' 是核函数的二阶导数.

式(4)的三次 B-Spline 函数曲线和一阶导数曲线如图 1 所示,图中 $s = r/h$ (r 为粒子 i 和粒子

j 的间距),核函数一阶导数的绝对值在 $s = 2/3$ 处有极大值. 根据式(5),如果核函数的二阶导数为正,则 SPH 方法在拉伸应力状态下是不稳定的,会出现拉伸失稳现象;反之,则是稳定的. 因此,在 B-Spline 函数中,可以将极值点右侧的区域称为拉伸失稳区. 当 $s > 2/3$ 时,核函数一阶导数的绝对值随着两点距离的增大而减小,即邻近点 j 对计算点 i 的贡献随着距离的增大而减小. 当 $s < 2/3$ 时,核函数一阶导数的绝对值随着两点距离的减小而减小,即 j 对 i 的贡献随着距离的减小反而减小,说明 j 对 i 的贡献要小于离 i 更远的粒子对 i 的贡献,并且这种趋势随两点距离的减小而加剧,这便是压缩失稳产生的根本原因. 因此,可将极值点左侧的区域称为压缩失稳区.

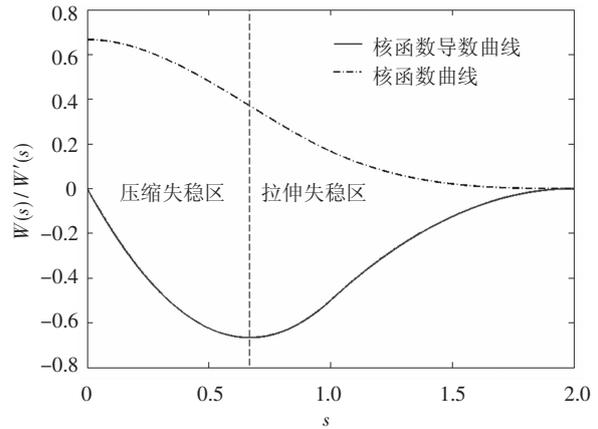


图 1 三次 B-Spline 函数及其一阶导数曲线

2.2 消除压缩失稳的人工粘性

压缩失稳可通过引入人工粘性来解决. 人工粘性的形式很多,但通常采用的形式包含两种不同类型的粘性,即适用于消除波后振荡的线性粘性 $\Pi = -\alpha plc \nabla \cdot v$ 和抑制冲击波强间断面数值振荡的二次粘性 $\Pi = \beta \rho l^2 (\nabla \cdot v)^2$. 其中: α 和 β 是无量纲系数; l 是激波长度传播尺度; c 是声速.

将上述两种粘性考虑在一起, Monaghan J J 等^[14]给出了适合于 SPH 法的混合型人工粘性

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \bar{\rho}_{ij}, & v_{ij} \cdot x_{ij} < 0; \\ 0, & v_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mu_{ij} = (h_{ij} v_{ij} \cdot x_{ij}) / (|x_{ij}|^2 + \eta h_{ij}^2)$, $\bar{c}_{ij} = 0.5(c_i + c_j)$, $\bar{\rho}_{ij} = 0.5(\rho_i + \rho_j)$, $v_{ij} = v_i - v_j$, $h_{ij} = 0.5(h_i + h_j)$;通常取 $\alpha = 1, \beta = 10, \eta = 0.1$.

引入人工粘性后,式(2)和式(3)分别变为

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = - \left[\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta} \right],$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \Pi_{ij} \right) v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta}.$$

2.3 改进拉伸失稳的人工力

Swegle J W 等^[3]指出拉伸不稳定既不依赖于人工粘性,也不依赖于时间积分项,它是典型的与状态方程无关的问题,因为在状态方程中不产生拉伸应力. Monaghan J J 等^[10-11]提出了用于稳定计算的人工力,该力与具体的核函数有关,对于三阶 B-Spline 函数,当 $h < r_{ij} \leq 2h$ 时,

$$T_{ij} = \varepsilon \left(2 - \frac{r_{ij}}{h} \right)^{3n} \left(\frac{|\sigma_i|}{\rho_i^2} + \frac{|\sigma_j|}{\rho_j^2} \right). \quad (7)$$

式中: r_{ij} 为粒子 i 和粒子 j 的间距, h 为两粒子平均光滑长度, σ 和 ρ 分别为应力和密度; ε 和 n 无量纲,通常为 0.2 和 4. 式(2) 和式(3) 分别变为

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial t} = - \left[\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + T_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta} \right], \quad (8)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + T_{ij} \right) v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta}. \quad (9)$$

当 $r_{ij} = 2h$ 时式(8) 和(9) 不连续,而且当粒子间距 r_{ij} 增大时 T_{ij} 大幅减小,难以抵消拉伸不稳定的影响. 因此虽然在一定程度上解决了拉伸不稳定的问题,但依然存在一定的震荡. 为了进一步解决拉伸不稳定问题,考虑到物体处于弹性拉伸时弹性模量乘以应变即是应力的现象,本文提出了如下形式的人工力:

$$T_{ij} = \kappa \frac{E}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{r_{ij}}{h} - 1 \right) + \frac{\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}}.$$

式中, κ 通常取 0.1 ~ 0.3; E 为弹性模量; α 和 β 的取值范围通常为 0.2 ~ 1.0 和 1.0 ~ 5.0. 该人工力是连续的,其第一项随粒子间距 r_{ij} 增大而增大,与式(7) 相比可更有效地抵消拉伸不稳定的影响;第二项为粒子分离时的人工粘性力^[15]. 该人工力起作用的条件为

- 1) 粒子间距: 当 $h < r_{ij} \leq 2h$ 时;
- 2) 粒子反向运动: 当 $v_{ij} \cdot x_{ij} > 0$ 时;
- 3) 粒子状态: 相互作用的粒子是固体, 并且

表 1 Mie-Grüneisen 状态方程参数

材料	$\rho / (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	$c_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	S	$C_v / (\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1})$	Γ
Al 2024	2.785	5 328.000	1.338	875.000	2.000

表 2 Johnson-Cook 强度模型参数

材料	G / GPa	A / MPa	B / MPa	C	m	n	$T_{\text{room}} / \text{K}$	$T_{\text{melt}} / \text{K}$
Al 2024	27.600	265.000	426.000	0.015	1.000	0.340	300.000	775.000

Mie-Grüneisen 状态方程为

$$p = p_H + \Gamma \rho (e - e_H).$$

其中: $p_H = \rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu) / [1 - (s - 1)\mu]^2$, $e_H = (p_H \mu) / (2\rho_0 (1 + \mu))$, $\mu = (\rho / \rho_0) - 1$, $\Gamma \rho = \Gamma_0 \rho_0 = \text{const}$, $U = c_0 + s u_p$. 式中: p 和 e 分别为静水压力和比内能; p_H 和 e_H 分别为冲击 Hugoniot 曲

尚未失效;

4) 粒子归属: 相互作用的粒子属于同一物体.

对于二维和三维情况, Owen J M^[16] 提出了张量形式的人工粘性力,对消除压缩失稳得到了较好的结果. 本文在该人工粘性力的基础上叠加抗拉伸不稳定的人工力,建立了统一形式的人工力,此时式(2) 和式(3) 分别变为

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial t} = - \left[\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Lambda_{ij}^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta} \right],$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Lambda_{ij}^{\alpha\beta} \right) v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\beta}.$$

式中: 统一张量形式的人工力 $\Lambda_{ij}^{\alpha\beta} = T_{ij}^{\alpha\beta} - \Pi_{ij}^{\alpha\beta}$, 张量形式的人工粘性力 $\Pi_{ij}^{\alpha\beta}$ 有如下定义^[16]:

$$\Pi_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}^{\alpha\beta} + \beta (\mu_{ij}^{\alpha\beta})^2}{\bar{\rho}_{ij}}, & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha < 0, \\ 0, & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha \geq 0. \end{cases}$$

式中: $\mu_{ij}^{\alpha\beta} = (h_{ij} v_{ij}^\alpha x_{ij}^\beta) / (|x_{ij}^\beta|^2 + \eta h_{ij}^2)$, 其它与式(6) 相同;改进拉伸失稳的张量形式人工力 $T_{ij}^{\alpha\beta}$ 定义为

$$T_{ij}^{\alpha\beta} = \kappa \frac{E}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{r_{ij}}{h} - 1 \right) + \frac{\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}^{\alpha\beta} + \beta (\mu_{ij}^{\alpha\beta})^2}{\bar{\rho}_{ij}}.$$

3 算例

3.1 算例 1

设一维铝杆长 100 mm, 左半部分具有 -100 m/s 的初速度, 右半部分静止. 由于拉力作用, 应力波从中间向两侧传播. 将该铝杆进行均匀离散, 光滑长度取为 0.1 mm, 采用三阶 B-Spline 核函数和所提出的人工力, 计算至 5 μs . 铝杆材料为 Al 2024, 采用 Mie-Grüneisen 状态方程和 Johnson-Cook 强度模型进行模拟, 材料参数见表 1 和表 2.

线上静水压力和比内能的参考值; Γ 和 ρ 分别为 Grüneisen 参数和密度, 相应地 Γ_0 和 ρ_0 为初始 Grüneisen 参数和初始密度; U 和 u_p 分别为冲击波波速和波后质点速度, c_0 为体积声速, s 为 U 和 u_p 之间线性关系的斜率; μ 为压缩比.

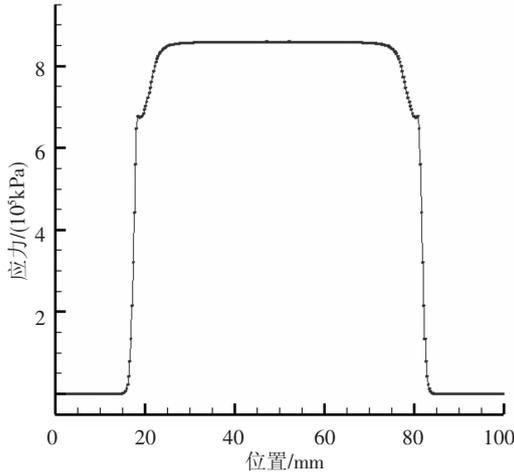
Johnson-Cook 强度模型为

$$\sigma_y = (A + B \varepsilon_p^n) [1 + C \ln(\dot{\varepsilon}_p / \dot{\varepsilon}_0)] (1 - T^{*m})$$

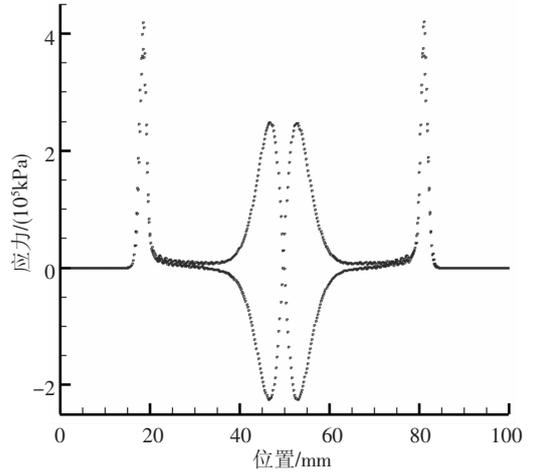
式中： σ_y 为屈服应力； ε_p 为等效塑性应变； $\dot{\varepsilon}_p$ 为等效塑性应变率；参考应变率 $\dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ ；若 T 为温度， T_{Room} 为室温， T_{Melt} 为熔点，则 $T^* = (T - T_{\text{Room}}) / (T_{\text{Melt}} - T_{\text{Room}})$ ； A, B, n, C 和 m 是材料常数。

计算得到的 $5 \mu\text{s}$ 时杆中应力 - 位置曲线如图 2 所示。其中，图 (a) 为通过 Ansys Autodyn v6.1 利用有限元法的计算结果，不会出现拉伸不稳定现象；图 (b) 中显示了没有施加人工力时

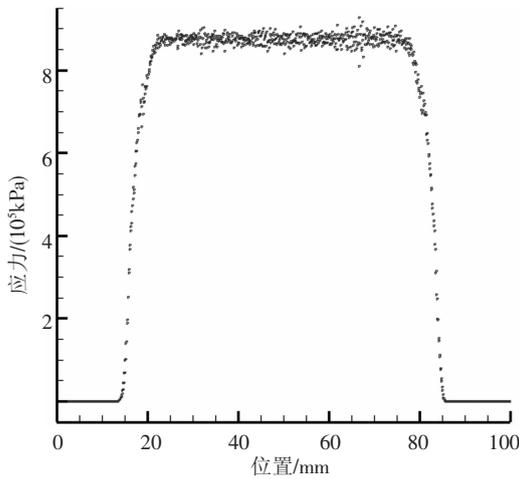
SPH 法产生了极度不稳定现象。当加入 Monaghan J J 等提出的人工力进行模拟后，结果如图 (c) 所示，其曲线整体趋势与图 (a) 相同，在一定程度上解决了拉伸不稳定的问题，但依然存在一定的振荡。使用本文的人工力后计算结果如图 (d) 所示，可以看出得到的曲线平滑且几乎不产生振荡，与有限元结果非常接近，拉伸不稳定性得到了较大改善，其效果优于 Monaghan J J 等提出的人工力。



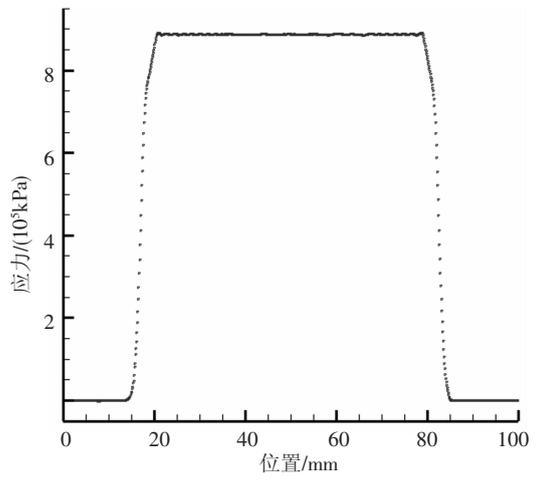
(a) 有限元法计算结果



(b) 未施加人工力的 SPH 计算结果



(c) 施加 Monaghan J J 等人工力的 SPH 计算结果



(d) 施加本文人工力的 SPH 计算结果

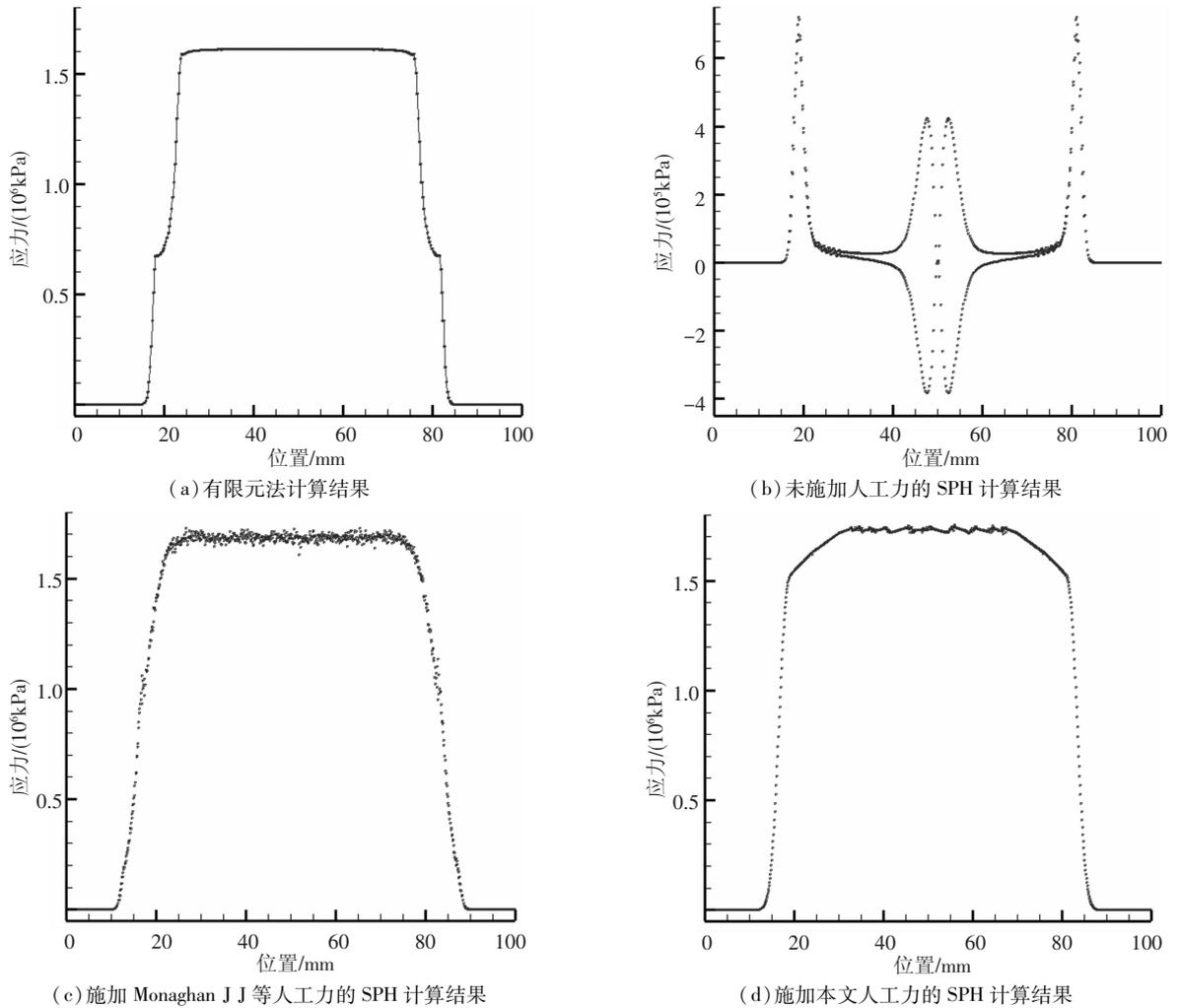
图 2 $5 \mu\text{s}$ 时杆中应力 - 位置曲线

3.2 算例 2

设一维铝杆长 100 mm ，左半部分具有 -100 m/s 的初速度，右半部分具有 100 m/s 的初速度。材料及离散方式与算例 1 相同，计算得到的 $5 \mu\text{s}$ 时杆中应力 - 位置曲线如图 3 所示。

其中，通过 Ansys Autodyn v6.1 利用有限元法的计算结果如图 (a) 所示；图 (b) 显示了没有施

加人工力时 SPH 法产生的极度不稳定现象。当加入 Monaghan J J 等提出的人工力进行模拟后，结果如图 (c) 所示。使用本文的人工力后计算结果如图 (d) 所示。从图中可以看出，通过施加本文人工力得到的曲线更加平滑且振荡较小，与有限元结果接近，其效果优于 Monaghan J J 等提出的人工力。

图3 5 μs 时杆中应力 - 位置曲线

参考文献:

- [1] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *Astronomical Journal*, 1977, 82: 1013 - 1020.
- [2] LIBERSKY L D, PETSCHKE A G, CARNEY T C, *et al.* High strain Lagrangian hydrodynamics; a three-dimensional SPH code for dynamic material response [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, 109(1):67 - 75.
- [3] SWEGLE J W, HICKS D L, ATTAWAY S W. Smoothed Particle Hydrodynamics stability analysis [J]. *Journal of Computational Physics*, 1995, 116(1):123 - 134.
- [4] MORRIS J P. Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with applications[D]. Melbourne: Monash University, 1996.
- [5] WEN Y, HICKS D L, SWEGLE J W. Stabilizing SPH with conservative smoothing, SAND94 - 1932 [R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1994.
- [6] BALSARA D S. Von Neumann stability analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics - suggestions for optimal algorithms [J]. *Journal of Computational Physics*, 1995, 121(2):357 - 372.
- [7] DYKA C T, INGEL R P. An approach for tension instability in Smoothed Particle Hydrodynamics [J]. *Computers and Structures*, 1995, 57(4):573 - 580.
- [8] DYKA C T, RANGLES P W, INGEL R P. Stress points for tension instability in Smoothed Particle Hydrodynamics [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(13):2325 - 2341.
- [9] RANGLES P W, LIBERSKY L D. Normalized SPH with stress points [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(10):1445 - 1462.
- [10] MONAGHAN J J. SPH without a tensile instability [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 159(2):290 - 311.
- [11] GRAY J P, MONAGHAN J J, SWIFT R P. SPH elastic dynamics [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(49 - 50):6641 - 6662.
- [12] CUMMINS S J, RUDMAN M. An SPH projection method [J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152(2):584 - 607.
- [13] MONAGHAN J J. Extrapolating B-Splines for interpolation [J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, 60(2):253 - 262.
- [14] MONAGHAN J J, GINGOLD R A. Shock simulation by the particle method SPH [J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, 52(2):374 - 389.
- [15] SWEGLE J W, ATTAWAY S W, HEINSTEIN M W. An analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics, SAND93 - 2513 [R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1994.
- [16] OWEN J M. A tensor artificial viscosity for SPH [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 201(2):601 - 629.

(编辑 张 宏)