

# 基于中心差分卡尔曼滤波器的快速 SLAM 算法

田翔, 张亮, 陈耀武

(浙江大学 数字技术及仪器研究所, 浙江 杭州 310027, cyw@mail.bme.zju.edu.cn)

**摘要:** 针对密集路标环境下机器人同时定位与地图创建(SLAM)速度缓慢以及一致性不够收敛,提出了一种使用 Stirling 多项式插值方法对非线性过程进行近似的卡尔曼滤波器,同时利用路标测量统计信息对 SLAM 过程中的状态向量和状态协方差进行动态调整的 SLAM 方法.此方法对预测方程和测量方程使用 Stirling 多项式插值方法可以近似到二级甚至是更高级的泰勒展开.使用路标统计信息动态计算各个路标对于当前时刻状态向量的权重,利用此权重进行状态向量和状态向量协方差动态调整.实验表明无论是在稀疏路标环境下还是在密集路标环境下此方法在内存占用、SLAM 速度以及对机器人定位的一致性上都优于 FASTSLAM.

**关键词:** 同步定位与地图重建; Stirling 多项式插值; 中心差分卡尔曼滤波器; 一致性; 统计信息

中图分类号: TP24

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)09-1454-08

## Fast SLAM algorithm based on central difference Kalman filter

TIAN Xiang, ZHANG Liang, CHEN Yao-wu

(Institute of Advanced Digital Technology and Instrument, Zhejiang University,  
Hangzhou 310027, China, cyw@mail.bme.zju.edu.cn)

**Abstract:** A method based on Stirling's polynomial interpolation to approximate the nonlinear process and using landmark's statistical information to adjust the state vector and state vector's covariance is proposed to resolve the simultaneous localization and mapping (SLAM) speed and consistency in dense landmark environment. By using Stirling's polynomial interpolation, the nonlinearity can be approximated to the second or even higher Taylor series and the state vector and its covariance's size can be limited to fixed size by the dynamic method based on the weight value of each landmark. It can be seen from experiment that not only in sparse landmark environment but also in dense landmark environment, the SLAM memory, speed and consistency of the proposed method are all superior to those of FASTSLAM.

**Key words:** simultaneous localization and mapping (SLAM); stirling polynomial interpolation; central difference Kalman filter; consistency; statistical information

移动机器人同时定位与地图创建 SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) 问题<sup>[1-2]</sup>是指在未知环境中移动机器人利用自身定位信息创建环境地图,同时利用已创建的环境地图进行自身定位.经过十多年的研究和发展已经产生了

许多 SLAM 算法,典型的包括基于扩展卡尔曼滤波的 SLAM 算法(EKF-SLAM),基于粒子滤波器的 SLAM 算法(FASTSLAM1、FASTSLAM2),基于稀疏信息矩阵滤波器的 SLAM 算法(EIF-SLAM)等<sup>[3-8]</sup>.由于在 EKF-SLAM 中状态向量和状态向量协方差都需要维护所有已检测的路标,因此在路标密集环境下 SLAM 速度很慢,从而限制其在实际中的应用.另外由于机器人 SLAM 中的预测过程和测量过程都是非线性模型,所以在 EKF-SLAM 算法中使用了一级泰勒展开中对预测过程和测量过程进行线性近似,但是当非线性方程的

收稿日期: 2009-11-25.

基金项目: 国家高技术研究发展计划软件重大专项资助项目(2003AA1Z2130);浙江省科技计划重大科技攻关资助项目(2005C11001-02).

作者简介: 田翔(1979—),男,博士后;  
陈耀武(1963—),男,教授,博士生导师.

非线性严重时会导致 EKF-SLAM 算法的一致性出现问题<sup>[9]</sup>. 在 FASTSLAM 中 SLAM 的速度和一致性受粒子数目的影响, 粒子数目过小可能导致 SLAM 结果发散, 粒子数目过多会导致 SLAM 速度太慢从而限制其在实际中的应用.

本文提出基于中心差分卡尔曼滤波器的快速 SLAM 算法对预测过程和测量过程的线性近似精度上进行了改进, 使用 Stirling 插值方法可以对非线性过程近似到二级泰勒展开, 从而提高 SLAM 的精确性, 并且使用已检测过的路标统计信息对由已检测路标和机器人位置组成的状态向量和状态协方差矩阵进行动态调整, 以保证它们的大小限制在固定范围内, 从而提高了 SLAM 速度. 本文算法同 EKF-SLAM 和 FASTSLAM 进行分析发现在内存占用上要优于 EKF-SLAM 和 FASTSLAM. 通过对在稀疏路标环境和密集路标环境下的 SLAM 结果进行比较表明在 SLAM 精确性和一致性上都优于 FASTSLAM2.0 算法.

## 1 中心差分卡尔曼滤波器 SLAM

中心差分卡尔曼滤波器是一种对非线性过程使用 Stirling 多项式插值公式近似, 同时将其和卡尔曼滤波器结合所组成的滤波器. 基于此滤波器对移动机器人进行 SLAM 称为 CDKFSLAM.

### 1.1 Stirling 多项式插值

假设非线性方程为  $f$ , 输入随机变量  $x$  在  $\bar{x}$  附近的点  $\bar{x} + ph$  经过非线性方程  $f$  后的输出值  $f(\bar{x} + ph)$  使用 Stirling 多项式插值公式<sup>[10-11]</sup> 可以表示为

$$f(x) = f(\bar{x} + ph) = f(\bar{x}) + pu\delta f(\bar{x}) + \frac{p^2}{2}\delta^2 f(\bar{x}) + \binom{p+1}{3}u\delta^3 f(\bar{x}) + \dots \quad (1)$$

式中:  $u$  和  $\delta$  分别为操作符.

对于式(1) 如果只考虑到二级近似而忽略之后的所有高阶项则可以简化为

$$f(x) = f(\bar{x} + ph) \approx f(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})}{h}u\delta f(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2h^2}\delta^2 f(\bar{x}). \quad (2)$$

式(2) 中操作符  $u$  和  $\delta$  的定义为

$$\begin{cases} \delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right), \\ \mu f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right). \end{cases} \quad (3)$$

对式(2) 中的操作符使用式(3) 进行替换可得

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h}(x - \bar{x}) +$$

$$\frac{f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} - h) - 2f(\bar{x})}{2h^2}(x - \bar{x})^2 \quad (4)$$

将式(4) 中的  $f(\bar{x} + h)$  和  $f(\bar{x} - h)$  都表示为其在  $\bar{x}$  处的泰勒展开, 则式(4) 可以表示为

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - \bar{x})^2 + \left(\frac{f'''(\bar{x})}{3}h^2 + \frac{f^{(5)}(\bar{x})}{5}h^4 + \dots\right)(x - \bar{x}) + \left(\frac{f^{(4)}(\bar{x})}{4}h^2 + \frac{f^{(6)}(\bar{x})}{6}h^4 + \dots\right)(x - \bar{x})^2. \quad (5)$$

对比式(5) 和对  $f(x)$  在  $\bar{x}$  处的泰勒展开可以看出使用 Stirling 插值公式对非线性方程  $f$  的近似可以达到二级泰勒展开, 同时选取合适的参数  $h$  还可以近似到更高级别的泰勒展开.

当表达式(1) 中的输入随机变量  $x$  为多维变量时, 式(2) 可以重新被表示为

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + D_{\Delta x} f + \frac{1}{2!} D_{\Delta x}^2 f. \quad (6)$$

假设多维向量  $\bar{x}$  的维数为  $N$ , 则式(6) 中的  $D_{\Delta x} f$  和  $D_{\Delta x}^2 f$  可以表示为

$$\begin{cases} D_{\Delta x} f = \frac{1}{h} \left( \sum_{p=1}^N \Delta x_p u_p \delta_p \right) f(\bar{x}), \\ D_{\Delta x}^2 f = \frac{1}{h^2} \left( \sum_{p=1}^N (\Delta x_p)^2 \delta_p^2 + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1, q \neq p}^N \Delta x_p \Delta x_q (u_p \delta_q)(u_q \delta_p) \right) f(\bar{x}). \end{cases} \quad (7)$$

式(7) 中操作符  $u_p$  和  $\delta_p$  为

$$\begin{cases} \delta_p f(x) = f\left(x + \frac{h}{2} e_p\right) - f\left(x - \frac{h}{2} e_p\right), \\ \mu_p f(x) = \frac{1}{2} \left( f\left(x + \frac{h}{2} e_p\right) + f\left(x - \frac{h}{2} e_p\right) \right). \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $e_p$  为第  $p$  项元素为 1 其余项元素为 0 的  $N$  维向量.

式(6) 中输入随机变量  $x$  经过非线性过程  $f$  后输出的均值为

$$\begin{aligned} E(f(x)) &\approx E\left(f(\bar{x}) + D_{\Delta x} f + \frac{1}{2!} D_{\Delta x}^2 f\right) = \\ &f(\bar{x}) + E\left(\frac{1}{2!} D_{\Delta x}^2 f\right) = \frac{h^2 - N}{h^2} f(\bar{x}) + \\ &\frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^N (f(\bar{x} + h s_p) + f(\bar{x} - h s_p)). \end{aligned} \quad (9)$$

式中:  $s_p$  为输入变量  $x$  的协方差 Cholesky 系数的第  $p$  项.

$$s_p = (\sqrt{P_x})_p. \quad (10)$$

式(6) 中输入随机变量  $x$  经过非线性过程  $f$  后输出的协方差以及输出和输入  $x$  之间的互协方差分别为

$$P_{f(x)} \approx \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^N ((f(\bar{x} + h s_p) - f(\bar{x} - h s_p)) (f(\bar{x} + h s_p) - f(\bar{x} - h s_p))^T + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{p=1}^N (f(\bar{x} + h s_p) + f(\bar{x} - h s_p) - 2f(\bar{x})) (f(\bar{x} + h s_p) + f(\bar{x} - h s_p) - 2f(\bar{x}))^T, \tag{11}$$

$$P_{f(x),x} = \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^N s_p (f(\bar{x} + h s_p) - f(\bar{x} - h s_p)). \tag{12}$$

综合考虑式(9)、式(11)以及式(12)可以看出对非线性方程使用 Stirling 插值公式的二级展

$$PV^k = \begin{bmatrix} P_{r,x,x}^k & P_{r,x,y}^k & P_{r,x,a}^k & P_{r,x,l,1,x}^k & P_{r,x,l,1,y}^k & \dots & P_{r,x,l,n,x}^k & P_{r,x,l,n,y}^k \\ P_{r,y,x}^k & P_{r,y,y}^k & P_{r,y,a}^k & P_{r,y,l,1,x}^k & P_{r,y,l,1,y}^k & \dots & P_{r,y,l,n,x}^k & P_{r,y,l,n,y}^k \\ P_{r,a,x}^k & P_{r,a,y}^k & P_{r,a,a}^k & P_{r,a,l,1,x}^k & P_{r,a,l,1,y}^k & \dots & P_{r,a,l,n,x}^k & P_{r,a,l,n,y}^k \\ P_{l,1,x,r,x}^k & P_{l,1,x,r,y}^k & P_{l,1,x,r,a}^k & P_{l,1,x,x}^k & P_{l,1,x,y}^k & \dots & P_{l,1,x,l,n,x}^k & P_{l,1,x,l,n,y}^k \\ P_{l,1,y,r,x}^k & P_{l,1,y,r,y}^k & P_{l,1,y,r,a}^k & P_{l,1,y,x}^k & P_{l,1,y,y}^k & \dots & P_{l,1,y,l,n,x}^k & P_{l,1,y,l,n,y}^k \\ \dots & \dots \\ P_{l,n,x,r,x}^k & P_{l,n,x,r,y}^k & P_{l,n,x,r,a}^k & P_{l,n,x,l,1,x}^k & P_{l,n,x,l,1,y}^k & \dots & P_{l,n,x,x}^k & P_{l,n,x,y}^k \\ P_{l,n,y,r,x}^k & P_{l,n,y,r,y}^k & P_{l,n,y,r,a}^k & P_{l,n,y,l,1,x}^k & P_{l,n,y,l,1,y}^k & \dots & P_{l,n,y,x}^k & P_{l,n,y,y}^k \end{bmatrix}. \tag{14}$$

式中:  $n$  为在  $0 \sim k$  时刻已检测到的路标数目,  $r_x^k$  和  $r_y^k$  分别为机器人在时刻  $k$  的笛卡尔坐标位置,  $r_a^k$  为机器人在时刻  $k$  的方位角,  $l_{i,x}^k$  和  $l_{i,y}^k$  分别为路标  $i$  ( $i = 0 \sim n$ ) 的笛卡尔坐标位置.

状态向量预测是指根据机器人当前状态向量  $SV$ , 同时参考机器人速度和以及噪声参数预测机器人下一时刻的位置. 状态向量预测方程为

$$SV_{predict}^{k+1} = \begin{bmatrix} r_x^k + V\Delta t \cos(Gn + r_a^k) \\ r_y^k + V\Delta t \sin(Gn + r_a^k) \\ r_a^k + V\Delta t \sin(Gn)/WB \\ l_{1,x}^k \\ l_{1,y}^k \\ \dots \\ l_{n,x}^k \\ l_{n,y}^k \end{bmatrix}. \tag{15}$$

式中:  $V$  为机器人的运动速度,  $\Delta t$  为时刻  $k$  和时刻  $k + 1$  的时间间隔,  $Gn$  为方位角噪声,  $WB$  为机器人的轮间距.

由式(15)可知为了根据  $k$  时刻的状态向量预测  $k + 1$  时刻的状态向量需要使用  $k$  时刻的状态向量  $SV^k$ , 机器人速度参数  $V$ , 机器人方位角噪声参数, 时间间隔以及机器人轮间距. 由于机器人速度和方位角参数受噪声影响, 因此在使用 Stirling 多项式插值方法对式(15)进行非线性近

开近似后, 非线性方程的输出均值、协方差以及输出和输入的互协方差完全由  $2N + 1$  个输入点经过非线性方程  $f$  后的输出决定. 这些输入点统称为 Sigma 点<sup>[12-13]</sup>. 结合式(9)、式(11)和式(12)同卡尔曼滤波器组成中心差分卡尔曼滤波器, 并使用此滤波器对 SLAM 中的状态预测方程, 测量方程进行估计.

### 1.2 SLAM 状态向量预测

在 CDKFSLAM 过程中, 状态向量和状态向量协方差分别为

$$SV^k = [r_x^k \ r_y^k \ r_a^k \ l_{1,x}^k \ l_{1,y}^k \ \dots \ l_{n,x}^k \ l_{n,y}^k]^T, \tag{13}$$

$$PV^k = \begin{bmatrix} P_{r,x,l,1,x}^k & \dots & P_{r,x,l,n,x}^k & P_{r,x,l,n,y}^k \\ P_{r,y,l,1,x}^k & \dots & P_{r,y,l,n,x}^k & P_{r,y,l,n,y}^k \\ P_{r,a,l,1,x}^k & \dots & P_{r,a,l,n,x}^k & P_{r,a,l,n,y}^k \\ P_{l,1,x,y}^k & \dots & P_{l,1,x,l,n,x}^k & P_{l,1,x,l,n,y}^k \\ P_{l,1,y,y}^k & \dots & P_{l,1,y,l,n,x}^k & P_{l,1,y,l,n,y}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{l,n,x,l,1,y}^k & \dots & P_{l,n,x,x}^k & P_{l,n,x,y}^k \\ P_{l,n,y,l,1,y}^k & \dots & P_{l,n,y,x}^k & P_{l,n,y,y}^k \end{bmatrix}. \tag{14}$$

似时对输入 Sigma 点的构造需要考虑机器人速度和角速度噪声. 使用式(9)和式(11)对状态向量的均值和协方差预测时的输入 Sigma 点来进行选择

$$\text{Sig}_{base}^k = [SV^k \ V + Vn \ Gn], \tag{16}$$

$$PV_{sig}^k = \begin{bmatrix} PV^k & 0 & 0 \\ 0 & VV & 0 \\ 0 & 0 & GV \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\text{Sig}^k = [\text{Sig}_{base}^k \ \text{Sig}_{base}^k - h(\sqrt{PV_{sig}^k})_1 \ \dots \ \text{Sig}_{base}^k - h(\sqrt{PV_{sig}^k})_{SN} \ \text{Sig}_{base}^k + h(\sqrt{PV_{sig}^k})_1 \ \dots \ \text{Sig}_{base}^k + h(\sqrt{PV_{sig}^k})_{SN}]. \tag{18}$$

式中:  $V$  为机器人移动速度参数,  $Vn$  为机器人移动速度噪声均值,  $Gn$  为机器人方位角噪声均值,  $VV$  为机器人速度噪声协方差,  $GV$  为方位角噪声协方差. 由于机器人移动速度参数和机器人方位角噪声参数的维数都为 1, 所以式(18)中  $SN = 3 + 2n + 1 + 1$ , 输入 Sigma 点的总数为  $2SN + 1$ , 在这里机器人移动速度噪声和方位角噪声都近似认为符合高斯分布, 因此参数  $h$  取值为  $\sqrt{3}$ .

将式(18)中各个输入向量代入式(15)可以获得各个输入向量经过状态向量预测方程的输出, 同时结合式(9)和式(11)获得预测状态向量  $SV_{predict}^{k+1}$  和其协方差  $PV_{predict}^{k+1}$ .

### 1.3 SLAM 状态向量更新

在机器人运动过程中接收到传感器测量数据时先根据 Stirling 插值方式对测量方程的输出进行估计,再使用卡尔曼滤波器对状态向量更新,测量方程为

$$MV_i^{k+1} = \begin{bmatrix} M_{d,i}^{k+1} \\ M_{a,i}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(r_{\text{predict},x}^{k+1} - l_{\text{predict},i,x}^{k+1})^2 + (r_{\text{predict},y}^{k+1} - l_{\text{predict},i,y}^{k+1})^2} \\ \text{atan2}\left(\frac{r_{\text{predict},y}^{k+1} - l_{\text{predict},i,y}^{k+1}}{r_{\text{predict},x}^{k+1} - l_{\text{predict},i,x}^{k+1}}\right) - r_{\text{predict},a}^{k+1} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

式中:  $M_{d,i}^{k+1}$  为机器人和状态向量中第  $i$  个路标之间的笛卡尔距离,  $M_{a,i}^{k+1}$  为机器人和状态向量中第  $i$  个路标之间的方位角差,  $r_{\text{predict},x}^{k+1}$ ,  $r_{\text{predict},y}^{k+1}$  和  $r_{\text{predict},a}^{k+1}$  分别为使用预测式(15)对机器人当前位置的预测值,  $l_{\text{predict},i,x}^{k+1}$  和  $l_{\text{predict},i,y}^{k+1}$  分别为第  $i$  个路标的笛卡尔坐标。

同样在使用 Stirling 插值方式对测量方程输出进行估计时需要考虑到测量过程的距离测量噪声和方位角测量噪声,因此此时输入 Sigma 点的选择为

$$\text{Sig}_{\text{base}}^{k+1} = [SV_{\text{predict}}^{k+1} \quad Dn \quad An], \quad (20)$$

$$PV_{\text{sig}}^{k+1} = \begin{bmatrix} PV_{\text{predict}}^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & DV & 0 \\ 0 & 0 & AV \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\text{Sig}^{k+1} = [\text{Sig}_{\text{base}}^{k+1} \quad \text{Sig}_{\text{base}}^{k+1} - h(\sqrt{PV_{\text{sig}}^{k+1}})_1 \quad \dots \\ \text{Sig}_{\text{base}}^{k+1} - h(\sqrt{PV_{\text{sig}}^{k+1}})_{SM} \quad \text{Sig}_{\text{base}}^{k+1} + h(\sqrt{PV_{\text{sig}}^{k+1}})_1 \quad \dots \\ \text{Sig}_{\text{base}}^{k+1} + h(\sqrt{PV_{\text{sig}}^{k+1}})_{SM}]. \quad (22)$$

式中:  $Dn$  为距离测量噪声的均值,  $An$  为方位角测量噪声的均值,  $DV$  为距离测量噪声的协方差,  $AV$  为方位角测量噪声的协方差;由于  $DV$  和  $AV$  的维数都为 1,所以式(22)中的  $SM = 3 + 2n + 1 + 1$ ,输入 Sigma 点总数为  $2SM + 1$ ,参数  $h$  取值为  $\sqrt{3}$ 。

在测量数据过程中,由于距离测量噪声和方位角测量噪声与状态向量  $SV$  互不相关并且测量式(19)的输出即为机器人和路标之间的相对距离和相对方位角,所以对测量方程的输入 Sigma 点的选取可以简化为

$$\text{Sig}_{\text{base}}^{k+1} = [SV_{\text{predict}}^{k+1}], \quad (23)$$

$$PV_{\text{sig}}^{k+1} = [PV_{\text{predict}}^{k+1}]. \quad (24)$$

同时对均值和协方差的估计需要由式(9)、式(11)修正为

$$E(f(x)) \approx \frac{h^2 - N}{h^2} f(\bar{x}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^N (f(\bar{x} + hs_p) +$$

$$f(\bar{x} - hs_p)) + \text{Noise. mean}, \quad (25)$$

$$P_{f(x)} \approx \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^N \cdot ((f(\bar{x} + hs_p) - f(\bar{x} - hs_p)) (f(\bar{x} + hs_p) - f(\bar{x} - hs_p))^T + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{p=1}^N (f(\bar{x} + hs_p) + f(\bar{x} - hs_p) - 2f(\bar{x})) (f(\bar{x} + hs_p) + f(\bar{x} - hs_p) - 2f(\bar{x}))^T + \text{Noise. cov}). \quad (26)$$

式中:  $\text{Noise. mean}$  为噪声均值所组成的向量,  $\text{Noise. cov}$  为噪声协方差所组成的协方差矩阵. 从式(25)和式(26)可以看出此时噪声参数对于非线性输出的估计可以认为是单纯的附加量。

$$\text{Noise. mean} = [Dn \quad An]^T, \quad (27)$$

$$\text{Noise. cov} = \begin{bmatrix} DV & 0 \\ 0 & AV \end{bmatrix}. \quad (28)$$

相对于使用式(20)~式(22)对测量方程输出的估计使用式(23)~式(28)时输入 Sigma 点数目从  $2(3 + 2n + 1) + 1$  降低为  $2(3 + 2n) + 1$ ,从而降低了时间占用量. 当使用式(23)~式(28)获得对第  $i$  个路标的测量数据向量  $MV^{k+1}$  和测量数据向量协方差矩阵  $PMV^{k+1}$  后,根据式(12)获取测量方程的输入变量  $SV_{\text{predict}}^{k+1}$  和测量方程输出  $MV^{k+1}$  的协方差  $PV_{SV,MV}^{k+1}$  为

$$K_{\text{gain}} = PV_{SV,MV}^{k+1} \text{inv}(\text{chol}(PMV^{k+1})) \cdot (\text{inv}(\text{chol}(PMV^{k+1})))^T, \quad (29)$$

$$SV^{k+1} = SV_{\text{predict}}^{k+1} + K_{\text{gain}} (z_i^{k+1} - MV_i^{k+1}), \quad (30)$$

$$PV^{k+1} = PV_{\text{predict}}^{k+1} - (PV_{SV,MV}^{k+1} \text{inv}(\text{chol}(PMV^{k+1}))) \cdot (PV_{SV,MV}^{k+1} \cdot \text{inv}(\text{chol}(PMV^{k+1})))^T. \quad (31)$$

式中:  $z_i^{k+1}$  为第  $i$  个路标和机器人之间的测量数据向量. 当测量数据中包括对多个路标的测量向量时使用式(29)获取卡尔曼增益系数,且需要循环使用式(23)~式(31)对状态向量以及状态向量协方差进行更新。

### 1.4 状态向量及状态协方差动态调整

由状态向量和状态向量协方差矩阵可知随着已检测到路标数目的增大状态向量  $SV$  和状态向量协方差  $PV$  的维数都会逐渐增大,这样会严重影响 SLAM 的速度. 因此根据已测量到的路标统计信息提出一种动态状态向量和状态向量协方差调整的方法. 假设  $k$  时刻之前所检测到的路标索引序列为

$$ML_{\text{array}}^k = \{ML^1 \quad ML^2 \quad \dots \quad ML^k\}. \quad (32)$$

式中:  $ML^i$  为在第  $i$  时刻所检测到的路标索引序列. 根据检测路标统计信息计算每个路标对于当前时刻状态向量的影响权重,同时依据此权重对当前状态向量和状态向量协方差实现动态调整。

为简单起见,在  $k$  时刻计算各个路标权重时只考虑到  $k$  之前的  $m$  个时刻的路标统计信息,  $m$  取值范围为  $1 \sim k$ , 距离当前时刻  $k$  越近的路标索引序列所对应的权重系数越大. 这样  $k$  时刻所参考的路标索引序列为

$$MLref^k = \{ML^{k-m+1} \quad ML^{k-m+2} \quad \dots \quad ML^k\}. \quad (33)$$

每次路标索引的权重系数满足  $w^k > w^{k-1} > \dots > w^{k-m+2} > w^{k-m+1}$ , 权重系数为

$$Weight^k = \{w^{k-m+1} \quad w^{k-m+2} \quad \dots \quad w^k\}. \quad (34)$$

在时刻  $k$  各个路标的权重为

$$LWeight_i^k = \sum_{j=k-m+1}^k w^j \cdot MLvalid_i^j. \quad (35)$$

式中:  $i$  为路标索引.

$MLvalid_i^j$  的取值为

$$MLvalid_i^j = \begin{cases} 1, & \text{路标 } i \text{ 包括在 } ML^j \text{ 中} \\ 0, & \text{路标 } i \text{ 未包括在 } ML^j \text{ 中.} \end{cases} \quad (36)$$

式中: 当路标  $i$  包括在检测路标索引序列  $ML^j$  中时其值为 1, 否则为 0.

为将状态向量  $SV$  和状态向量协方差矩阵  $PV$  控制在固定大小内, 定义阈值  $MAXLM$ ,  $MAXLM$  为在  $SV$  和  $PV$  中所包含的最大路标数. 当  $SV$  和  $PV$

$$PV^1 = \begin{bmatrix} VV\cos^2\sqrt{AV} & VV\cos\sqrt{AV}\sin\sqrt{AV} & \sqrt{VV}\sqrt{AV}\cos\sqrt{AV} \\ VV\cos\sqrt{AV}\sin\sqrt{AV} & VV\sin^2\sqrt{AV} & \sqrt{VV}\sqrt{AV}\sin\sqrt{AV} \\ \sqrt{VV}\sqrt{AV}\cos\sqrt{AV} & \sqrt{VV}\sqrt{AV}\sin\sqrt{AV} & AV \end{bmatrix}. \quad (39)$$

此时式(38)和式(39)满足一致性要求.

## 2 内存分析

在 CDKFSLAM 算法中所占用的内存由状态向量  $SV$ , 状态向量协方差  $PV$  以及参考路标序列  $MLref$  组成. 当环境中路标总数目为  $LN$  时, CDKFSLAM 占用的最大内存为

$$Mem_{cdkfslam} = (3 + 2MAXLM) + (3 + 2MAXLM)^2 + mLN. \quad (40)$$

式中:  $(3 + 2MAXLM)$  为状态向量  $SV$  大小,  $(3 + 2MAXLM)^2$  为状态向量协方差  $PV$  大小,  $mLN$  为参考路标序列大小.

EKFSLAM 算法中内存占用量由状态向量和状态向量协方差组成, 其占用最大内存为

$$Mem_{ekfslam} = (3 + 2LN) + (3 + 2LN)^2. \quad (41)$$

在 FASTSLAM 中, 内存占用量和粒子数目有关. 每个粒子所占用内存由机器人位置向量, 机器人位置协方差, 各个路标位置向量以及各个路标位置协方差组成. 假设粒子数目为  $PMAx$ , 其占用最大内存为

$$Mem_{fastslam} = PMAx((3 + 3^2) + LN(2 + 2^2)). \quad (42)$$

中路标数目大于  $MAXLM$  时首先通过式(35)获取每个路标在此时刻的权重, 然后在  $SV$  和  $PV$  中找到权重最小的路标并将其从  $SV$  和  $PV$  中删除, 直至  $SV$  和  $PV$  中所包含路标数目小于等于  $MAXLM$ . 当在后续时刻重新检测到被删除过的路标时将其作为未被检测过的路标对待.

### 1.5 初始状态及其协方差确定

由于在初始状态时还未检测到任何路标, 因此初始状态向量  $SV^1$  和状态向量协方差  $PV^1$  中只包括机器人位置信息.

$$\chi = \frac{(SV^1)^T(SV^1)}{PV^1}. \quad (37)$$

$SV^1$  和  $PV^1$  组成的式(37) 满足自由度为 3 的卡方分布, 根据一致性理论<sup>[14]</sup> 可知当式(37) 的值位于双边概率为 95% 的区域时认为其符合一致性要求. 由卡方分布可知此时双边概率区域为  $[0.22 \ 9.35]$ .

根据上述要求, 当速度噪声满足  $N \sim (0, VV)$ , 方位角噪声满足  $N \sim (0, AV)$  时, 初始状态向量和状态向量协方差取值为

$$SV^1 = [\sqrt{VV}\cos\sqrt{AV} \quad \sqrt{VV}\sin\sqrt{AV} \quad \sqrt{AV}]^T, \quad (38)$$

式中:  $(3 + 3^2)$  为机器人位置向量和位置向量协方差大小,  $(2 + 2^2)$  为每个路标位置向量和位置向量协方差大小.

对比式(40) ~ 式(42) 可知 CDKFSLAM 和 FASTSLAM 的内存占用和环境中路标总数  $LN$  成线性关系, EKFSLAM 的内存占用和  $LN$  成二次型关系. 图 1 描述了 CDKFSLAM、EKFSLAM 和 FASTSLAM 的内存占用情况随路标数目  $LN$  变化的关系, 其中,  $m$  取值为 10. 从图 1 中可以看出 CDKFSLAM 对内存的占用要少于 EKFSLAM 和 FASTSLAM.

## 3 实验

本实验在稀疏路标环境和密集路标环境下使用 CDKFSLAM 和 FASTSLAM2.0 分别进行测试. 稀疏路标环境大小为  $250 \text{ m} \times 200 \text{ m}$ , 包含 35 个路标; 密集路标环境大小为  $250 \text{ m} \times 200 \text{ m}$ , 包含 135 个路标. 移动机器人轮间距为 4 m, 所使用传感器最大检测距离为 30 m, 检测角度范围为  $0 \sim 180^\circ$ . SLAM 过程中状态向量预测的频率为 400 Hz, 测量数据的获取频率为 50 Hz. 机器人运

动过程中速度噪声方差为 0.3 m,方位角噪声方差为 3°;传感器测量过程中测量距离噪声方差为 0.1 m,角度方差为 1°。CDKFSLAM 中状态向量中的最大路标数目 MAXLM 为 10,权重计算时所参考的路标序列数目  $m = 10$ ,FASTSLAM2.0 中粒子数目取 PMAX = 10。

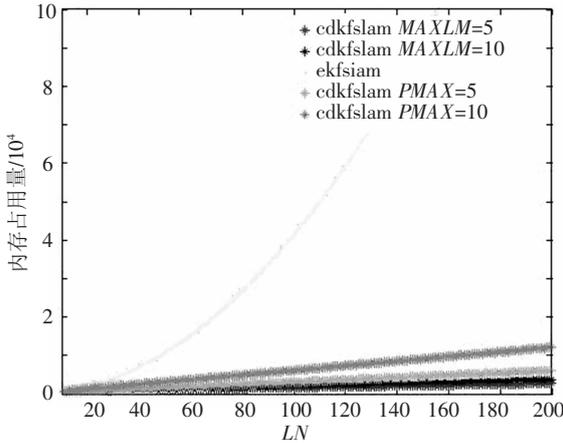
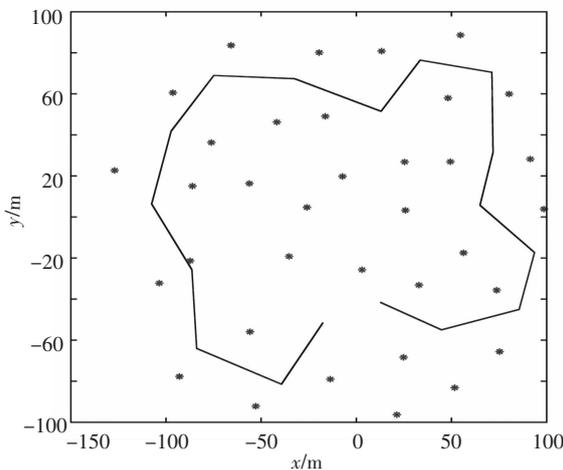
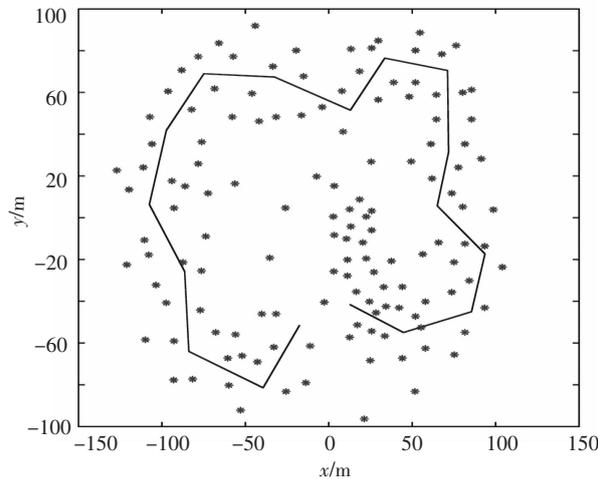


图1 CDKFSLAM、EKFSLAM 和 FASTSLAM 内存比较



(a) SLAM 稀疏路标环境



(b) SLAM 密集路标环境

图2 稀疏路标环境下和密集路标环境下 SLAM 的比较  
在稀疏路标环境下使用 CDKFSLAM 和 FASTSLAM2.0 分别进行 45 次实验. 图 3 中为每

次 MMSE (Minimum Mean Square Error) 比较. 图 4 为 CDKFSLAM 和 FASTSLAM2.0 在不同时刻状态向量预测和状态向量更新所消耗的时间. 从图 4 中可以看出,FASTSLAM2.0 所消耗的时间要大于 CDKFSLAM.

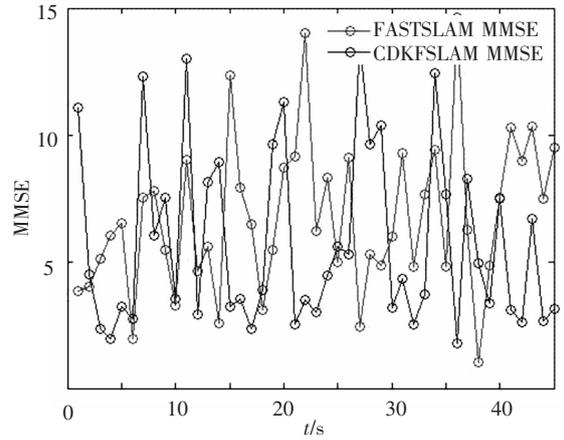


图3 稀疏路标环境下 CDKFSLAM 和 FASTSLAM 的 MMSE 比较

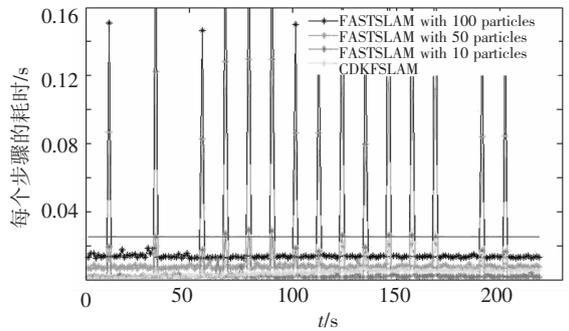


图4 稀疏路标环境下 CDKFSLAM 和 FASTSLAM 的消耗时间比较

在密集路标环境下,图 5 中为每次 MMSE (Minimum Mean Square Error) 比较. 图 6 为 CDKFSLAM 和 FASTSLAM2.0 在不同时刻状态向量预测和状态向量更新所消耗的时间. 从图 6 中可以看出 FASTSLAM 所消耗的时间要大于 CDKFSLAM,与稀疏环境相比,CDKFSLAM 所消耗的时

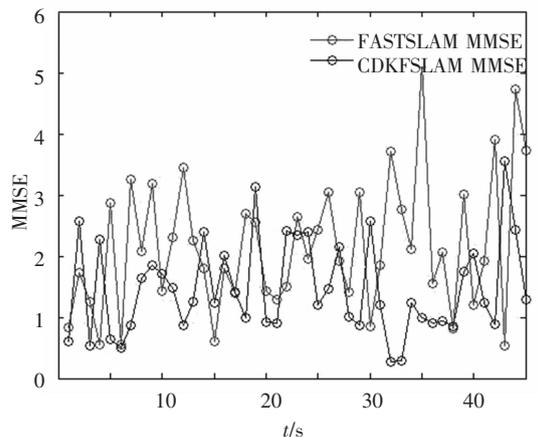


图5 密集路标环境下 CDKFSLAM 和 FASTSLAM 的 MMSE 比较

间增大,这是因为在密集环境下动态调整状态向量  $SV$  和  $PV$  的频率加大的缘故.

### 4 一致性分析

使用 NEES (Normalized Estimation Error Squared) 作为对移动机器人 SLAM 过程中定位结果的一致性分析依据,NEES 定义为

$$\varepsilon(k) = \frac{(x(k) - \hat{x}(k))^T P(k|k)^{-1} \cdot (x(k) - \hat{x}(k))}{3} \quad (43)$$

式中:  $x(k)$  为机器人  $k$  时刻实际位置,  $\hat{x}(k)$  为机器人  $k$  时刻的估计位置,  $P(k|k)$  为机器人  $k$  时刻的位置协方差. 由于机器人位置向量维数为 3, 因此可知  $\varepsilon(k)$  符合自由度为 3 的卡方分布.

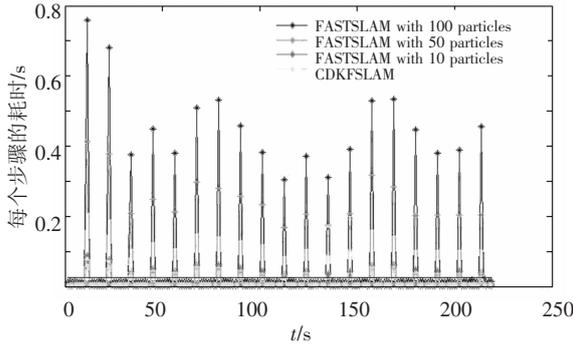
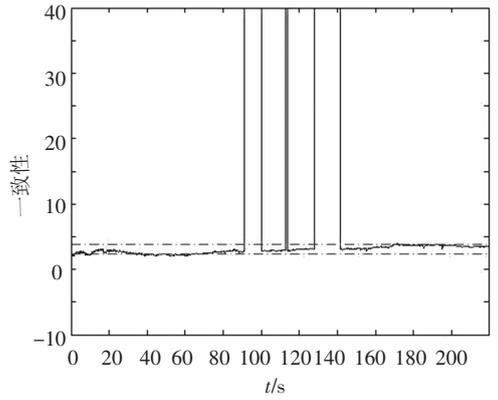


图 6 密集路标环境下 CDKFSLAM 和 FASTSLAM 的消耗时间比较

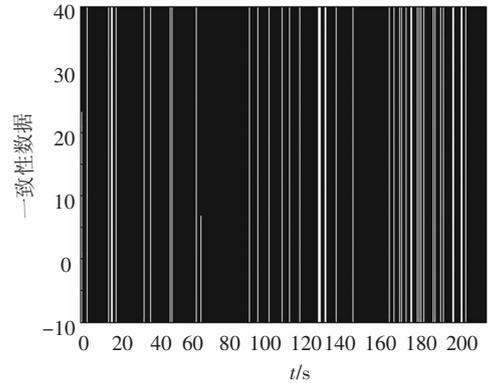
对 CDKFSLAM 和 FASTSLAM2.0 分别进行 45 次实验,使用 45 次的平均 NEES 作为一致性分析依据. 由卡方分布属性可知  $\sum_{i=1}^{45} \varepsilon_i(k)$  符合自由度为  $45 \times 3$  的卡方分布,当考虑双边概率为 95% 的区域作为一致性区域时可得  $\varepsilon(k)$  的双边区域为  $[2.32 \ 3.75]$ , 当  $\varepsilon(k)$  位于此区域内时表示当前机器人位置估计满足一致性要求, 则表示机器人位置估计不满足一致性要求. 图 7(a) 为稀疏路标环境下通过 45 次实验所得的 CDKFSLAM 的一致性数据, 图 7(b) 为粒子数为 10 时 FASTSLAM2.0 的一致性数据. 图 8(a) 为密集路标环境下 CDKFSLAM 的一致性数据, 图 8(b) 为粒子数为 10 时 FASTSLAM2.0 的一致性数据.

$$\bar{\varepsilon}(k) = \frac{1}{45} \sum_{i=1}^{45} \varepsilon_i(k). \quad (44)$$

表 1 是对图 7 和图 8 中位于一致性区间内点数的统计, 比较可以看出无论是在稀疏路标环境下还是在密集路标环境下使用 CDKFSLAM 所得的机器人位置一致性都要优于粒子数目为 10 的 FASTSLAM2.0. 对比图 3 和图 5 可以看出对 CDKFSLAM 而言在密集路标环境下的 MMSE 均值要优于稀疏路标环境下的结果, 但从一致性结果

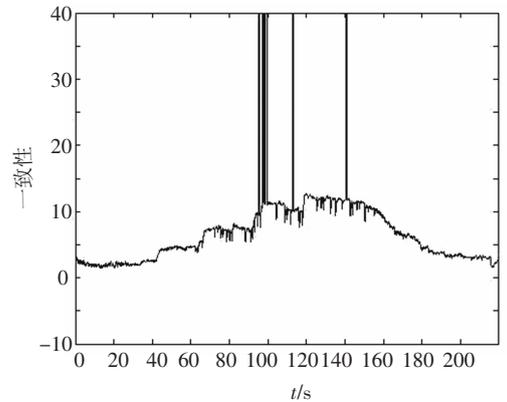


(a) CDKFSLAM 的一致性数据描述

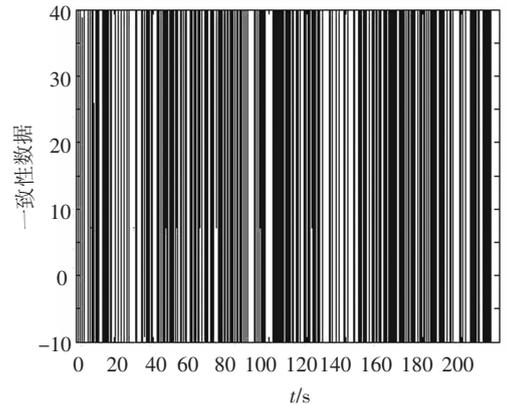


(b) FASTSLAM 的一致性数据描述

图 7 稀疏路标环境下使用 CDKFSLAM 和 FASTSLAM 所得机器人位置一致性



(a) CDKFSLAM 的一致性数据描述



(b) FASTSLAM 的一致性数据描述

图 8 密集路标环境下使用 CDKFSLAM 和 FASTSLAM 所得机器人位置一致性

(图7,图8和表1)上来看却恰恰相反,在稀疏环境下CDKFSLAM的一致性要优于密集环境下的结果.这是由于在MMSE计算过程中并没有考虑协方差矩阵,由此可以看出在对SLAM结果的分析过程中使用一致性分析要比使用MMSE更加合理.

表1 CDKFSLAM和FASTSLAM一致性分析

环境	稀疏路标环境下		密集路标环境下	
	CDKFSLAM	FASTSLAM2.0	CDKFSLAM	FASTSLAM2.0
一致性区域内点数	6 375	0	1 628	0
总点数	8 779	8 779	8 779	8 779
百分比/%	72.41	0	18.54	0

## 5 结论

1)选取合适的参数时使用Strling多项式插值方法对非线性近似可以达到二级甚至更高级的近似,从而提高了SLAM结果的一致性.

2)使用已经测量到的路标统计信息估计各个路标对当前状态向量的影响权重,使用各个路标权重动态调整状态向量和状态协方差将其控制在固定大小内虽然在一定程度上丢失了一些历史信息,但可以使其在密集型路标环境下达到较快的SLAM速度从而可以提高实际应用的可行性.

3)从实验结果可以看出本文算法的SLAM MMSE结果要优于FASTSLAM,从一致性分析中可以看出在稀疏环境和密集环境下CDKFSLAM的一致性都优于粒子数目为10的FASTSLAM;另外从一致性结果和MMSE比较可以看出对SLAM结果的评价时使用一致性评价要比使用MMSE更加合理.

## 参考文献:

[1] SMITH R, SELF M, CHESSEMAN P. Estimating uncertain spatial relationships in robots [C]//Autonomous Robot Vehicles. New York, NY: Springer-Verlag New York, Inc, 1990:167-193.

[2] DURRANT-WHYTE H, BAILEY T. Simultaneous localization and mapping: Part I [J]. IEEE Robotics and Automation Magazine, 2006, 13(2): 99-110.

[3] BAILEY T, DURRANT-WHYTE H. Simultaneous localization and mapping: Part II [J]. IEEE Robotics and Automation Magazine, 2006, 13(3): 108-117.

[4] KIM C, SAKTHIVEL R, CHUNG W K. Unscented FastSLAM: A robust and efficient solution to the slam problem [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2008, 24(4): 808-820.

[5] BAILEY T, NIETO J, NEBOT E. Consistency of the FastSLAM algorithm [C]//Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Orlando, FL: IEEE, 2006: 424-429.

[6] MONTEMERLO M, THRUN S, KOLLER D, et al. FastSLAM 2.0: An improved particle filtering algorithm for simultaneous localization and mapping that provably converges [C]//Proceeding of the International Conference on Artificial Intelligence. Acapulco, Mexico: Springer, 2003: 1151-1156.

[7] THRUN S, KOLLER D, GHAHRAMANI Z, et al. Simultaneous Mapping and Localization with Sparse Extended Information Filters: Theory and Initial Results [R]. [S.l.]: CMU, 2002.

[8] THRUN S, LIU Y F, KOLLER D, et al. Simultaneous mapping and localization with sparse extended information filters [J]. The International Journal of Robotics Research, 2004, 23(7/8): 693-716.

[9] WAN E A, Van der MERWE R. The unscented kalman filter for nonlinear estimation [C]//Proceedings of Adaptive Systems for Signal Processing, Communications and Control Symposium. Lake Louise, Alta: IEEE, 2000:153-158.

[10] NORGAARD M, POULSEN N, RAVN O. New developments in state estimation for nonlinear systems [J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.

[11] NORGAARD M, POULSEN N, RAVN O. Advances in Derivative-Free State Estimation for Nonlinear Systems [R]. [S.l.]:Denmark,2004.

[12] Van der MERWE R. Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models [D]. Oregon: Oregon Health & Science University, 2004.

[13] WANG X, ZHANG H. A UPF-UKF framework for SLAM [C]//Proceedings of International Conference on Robotics and Automation. Roma: IEEE, 2007: 1664-1669.

[14] BAR-SHALOM Y, RONG L X, KIRUBARAJAN T. Estimation with Applications To Tracking and Navigation [M]. New York, NY: Wiley-Interscience Publication, 2001.

(编辑 张红)