

不确定性线性系统的 H_∞ 输出反馈鲁棒重复控制

苏宝库¹, 赵 富^{1,2}, 刘 雨¹

(1. 哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 哈尔滨 150001, zhaofu9274@163.com;

2. 北京航天控制仪器研究所, 北京 100854)

摘 要: 为了抑制乘性不确定性线性系统中的外部扰动, 提出了一种重复控制器与输出反馈控制器参数同时优化的方法. 引入一个假想摄动将系统的扰动抑制问题归结为具有结构型摄动的系统鲁棒稳定性问题. 根据小增益定理得到该结构型摄动系统鲁棒稳定性的充分条件. 引入一个稳定的定标阵, 得到该结构型摄动系统低保守性的鲁棒稳定性充分条件. 基于该充分条件和线性矩阵不等式方法 (LMI)、锥补线性化方法 (CCL), 提出的迭代算法可以同时计算出重复控制器中低通滤波器剪切频率的最大值及其对应的输出反馈控制器的参数. 最后, 低频线振动台系统验证了该方法的有效性.

关键词: 鲁棒重复控制; 低频线振动台; LMI 方法; 锥补线性化方法; 位置周期扰动

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)11-1696-06

H-infinity output feedback robust repetitive control for uncertain linear systems

SU Bao-ku¹, ZHAO Fu^{1,2}, LIU Yu¹,

(1. Space Control and Inertia Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China, zhaofu9274@163.com; 2. Beijing Aerospace Control Device Institute, Beijing 100854, China)

Abstract: A new design method for linear system with model uncertainty is presented to restrain the external disturbance, which can design the repetitive controller and the output feedback controller simultaneously. The disturbance rejection problem of the linear system is reformulated as a robust stability problem of the system with structured uncertainties through introducing a fictitious uncertainty. Using small gain theorem, a sufficient condition is derived, which ensures robust stability of the system with structured uncertainties. A stable matrix is introduced to get a sufficient condition with less conservativeness for the system with structured uncertainties. Basing on the resulting sufficient condition, by using linear matrix inequality (LMI) and cone complementarity linearization (CCL), an iterative algorithm is presented to calculate the largest cut-off frequency of the low-pass filter in the repetitive controller and the parameters of the output feedback controller simultaneously. Finally, the validity of this method is verified by a low-frequency linear vibration table system.

Key words: robust repetitive control; low-frequency linear vibration table; LMI; cone complementarity linearization algorithm; position-dependent periodic disturbance

在许多工业应用中(如机器人、数字控制机床和转台等),参考信号或扰动信号经常是周期已知的周期性信号,并且这些实际应用要求伺服系统具有很高的定位精度和低速性能.文献[1]

基于内模原理提出了重复控制,在稳定的闭环系统内设置一个产生与参考信号或扰动信号同周期的内部模型,使得系统实现对周期性参考信号的渐近跟踪或对周期性扰动信号的有效抑制.自从重复控制提出以来,许多学者对此展开了广泛深入的研究,并且获得了成功的应用^[2-5]. Hara 和 Yamamoto 给出重复控制系统的稳定性条件^[6].文

收稿日期: 2009-9-29.

基金项目: 国家安全重大基础研究项目(973-61334).

作者简介: 苏宝库(1941—),男,教授,博士生导师.

献[7]将有限维重复控制器应用于抑制转台控制系统的力矩扰动,但是要求被控对象无虚轴上的零点,没有考虑系统存在不确定性的情况. 由于 H_∞ 控制理论适合处理存在数据摄动和外界扰动时系统的鲁棒控制问题,因此一些学者已经将 H_∞ 控制理论用于分析和设计重复控制系统. Guvenç 用 1 和 -1 分别代替内模中的时滞 $e^{-\tau s}$, 利用结构奇异值理论分析连续重复控制系统鲁棒稳定性和跟踪性能,将原来无限维的问题简化成一个有限维问题. 但是用此方法设计镇定控制器存在很大的保守性^[8]. 文献[9]在频域空间中研究了鲁棒重复控制器的设计问题,但是所提出的设计方法只能适用于最小相位系统. 文献[10]在给系统镇定控制器的基础上,基于 LMI 约束条件提出设计重复控制器的方法. 在文献[10]的基础上,吴敏等人在保证控制系统稳定性的基础上提出了低通滤波器和状态反馈控制器参数同时优化的方法^[11]. 但是没有考虑扰动对控制系统的影响.

基于以上文献存在的缺点,本文针对不确定性线性系统提出一种重复控制器和输出反馈控制器参数同时优化的方法,有效地解决了重复控制系统控制性能与系统稳定性之间的折衷问题,即使得乘性不确定性系统具有鲁棒稳定性又提高系统的扰动抑制性能和跟踪性能. 将本文所提出的方法与文献[10-11]的方法均应用于低频线振动台系统,仿真结果验证了本文所提的方法具有更高的跟踪精度,更具有实用性,并且使得系统具有鲁棒性.

1 问题描述

设控制系统如图1所示. 其中, r, e, u, d, θ 分别为参考输入、输出误差、控制输入、扰动信号、输出信号. z_1, z_2 为评价输出. $P(s)$ 为被控对象的标称模型, $\Delta(s)$ 是被控对象未知的摄动函数 ($\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$), $W_2(s)$ 表示 $\Delta(s)$ 的摄动界函数. $M(s)$ 是重复控制器, $K(s)$ 是输出反馈控制器. d 与 θ 存在非线性关系,即存在周期函数 $H(\cdot)$,使得 $d = H(\theta)$,它实际上构成了非线性反馈.

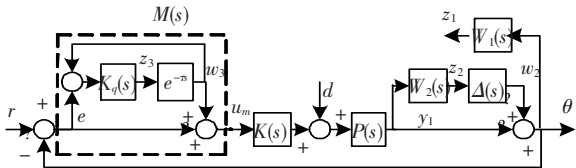


图1 含有重复控制器的控制系统

本文考虑的问题是设计重复控制器 $M(s)$ 和输出反馈控制器 $K(s)$, 抑制未知的周期性扰动 d ,

提高系统的跟踪精度. 在图1中设计重复控制器就是设计合适的低通滤波器 $K_q(s)$.

2 重复控制系统鲁棒性能分析

2.1 控制系统鲁棒稳定性分析

定理1 设被控对象 $P(s)$ 含有稳定摄动 $\Delta(s)$, 且满足 $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$, 当图1的重复控制系统满足

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1, \tag{1}$$

则重复控制系统对于任意 $\Delta(s)$ 是鲁棒稳定的.

其中: $T(s) = \frac{P(s)K(s)M(s)}{1 + P(s)K(s)M(s)}.$

证明 考虑系统的鲁棒稳定性, 设 $r = d = 0$. 从图1中可以得到从 w_2 到 z_2 的传递函数为 $G_{z_2w_2} = -W_2(s)T(s)$, 然后利用小增益定理可以得到: 当 $\|G_{z_2w_2}\|_\infty = \|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1$ 时, 重复控制系统对于任意 $\Delta(s)$ 是鲁棒稳定的. 证毕.

2.2 控制系统扰动抑制性能分析

扰动抑制的目标是尽量减小扰动输入 d 对评价输出 z_1 的影响, 即实现

$$\|W_1(s)(S(s)P(s))/\{1 - \Delta(s)W_2(s)/[(1 + \Delta(s)W_2(s))(1 + P(s)K(s)M(s))]\}\|_\infty < 1. \tag{2}$$

其中: $S(s) = (1 + P(s)K(s)M(s))^{-1}$.

由于 $\Delta(s)$ 在 $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$ 的范围内可任意取值, 因此即使鲁棒稳定条件成立, 仍会存在这样的 $\Delta(s)$, 使得在某些频带上

$$\|1 - \Delta(s)W_2(s)/[(1 + \Delta(s)W_2(s))(1 + P(s)K(s)M(s))]\|_\infty < 1.$$

显然, 对于该摄动 $\Delta(s)$, 扰动抑制会极端恶化, 所以, 即使标称系统性能和鲁棒稳定性再好, 也不能保证鲁棒扰动抑制性能.

因此为实现扰动抑制性能, (1) 和 (2) 必须同时满足. 由于 (2) 中含有摄动项 $\Delta(s)$, 在设计时, 必须把这个条件转变成不含摄动的一个条件, 因此乘性摄动系统的扰动抑制性能问题等价于导入假想摄动 $\Delta_f(s)$ (如图2所示, 其中 $\|\Delta_f(s)\|_\infty < 1$) 后的鲁棒稳定问题.

因为 $\|e^{-\tau s}\|_\infty = 1$, 因此将图2中的摄动 Δ_f , Δ 和 $e^{-\tau s}$ 分离出来. 通过把图2变形为图3, 鲁棒抑

制问题归结为对具有对角结构型摄动 $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \Delta_f(s) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(s) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\tau s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

的重复控制系统鲁棒稳定性问题。

定性问题。

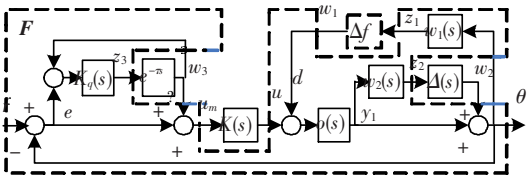


图 2 等价鲁棒稳定问题

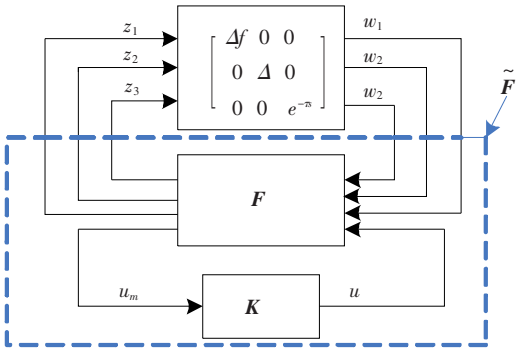


图 3 鲁棒稳定性与鲁棒性能

设被控对象 $P(s)$ 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p u + \mathbf{B}_p w_1, \\ y_1 = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{x}_p \in \mathbf{R}^n$ 是被控对象的状态向量, $u \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入。

设扰动抑制加权函数 $W_1(s)$ 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{w1} = \mathbf{A}_{w1} \mathbf{x}_{w1} + \mathbf{B}_{w1} \theta, \\ z_1 = \mathbf{C}_{w1} \mathbf{x}_{w1} + \mathbf{D}_{w1} \theta. \end{cases} \quad (4)$$

设鲁棒稳定加权函数 $W_2(s)$ 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{w2} = \mathbf{A}_{w2} \mathbf{x}_{w2} + \mathbf{B}_{w2} y_1, \\ z_2 = \mathbf{C}_{w2} \mathbf{x}_{w2} + \mathbf{D}_{w2} y_1. \end{cases} \quad (5)$$

选择广泛使用的低通滤波器 $K_q(s) = \omega_c / (s + \omega_c)$ 。

将低通滤波器 $K_q(s)$ 转化成如下的状态空间表达式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_q = \mathbf{A}_q \mathbf{x}_q + \mathbf{B}_q (e + w_3), \\ z_3 = \mathbf{C}_q \mathbf{x}_q. \end{cases} \quad (6)$$

考虑图 3 的重复控制系统的鲁棒稳定性, 可以令 $r = 0$ 。

设 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_p \quad \mathbf{x}_q \quad \mathbf{x}_{w1} \quad \mathbf{x}_{w2}]^T$, $\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T$, $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T$ 。

利用(3) ~ (6) 可以得到广义被控对象 $\mathbf{F}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 u, \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} u, \\ u_m = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}. \end{cases} \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{B}_q \mathbf{C}_p & \mathbf{A}_q & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{w1} \mathbf{C}_p & 0 & \mathbf{A}_{w1} & 0 \\ \mathbf{B}_{w2} \mathbf{C}_p & 0 & 0 & \mathbf{A}_{w2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_q & \mathbf{B}_q \\ 0 & \mathbf{B}_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_2 &= [-\mathbf{C}_p \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{w1} \mathbf{C}_p & 0 & \mathbf{C}_{w1} & 0 \\ \mathbf{D}_{w2} \mathbf{C}_p & 0 & 0 & \mathbf{C}_{w2} \\ 0 & \mathbf{C}_q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{21} = [0 \quad -1 \quad 1]. \end{aligned}$$

设广义被控对象(7) 的输出反馈控制器 $K(s)$ 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k u_m \\ u = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k \end{cases} \quad (8)$$

设 $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_p \quad \mathbf{x}_q \quad \mathbf{x}_{w1} \quad \mathbf{x}_{w2} \quad \mathbf{x}_k]^T$, $\bar{\mathbf{w}} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T$, 利用(7) 和(8) 可得图 3 中 $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{w}}, \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}_{11} \bar{\mathbf{w}}. \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{w1} \mathbf{C}_p & 0 & \mathbf{C}_{w1} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{w2} \mathbf{C}_p & 0 & 0 & \mathbf{C}_{w2} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{D}}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_p \mathbf{C}_k \\ -\mathbf{B}_q \mathbf{C}_p & \mathbf{A}_q & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{w1} \mathbf{C}_p & 0 & \mathbf{A}_{w1} & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{w2} \mathbf{C}_p & 0 & 0 & \mathbf{A}_{w2} & 0 \\ -\mathbf{B}_k \mathbf{C}_p & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_q & \mathbf{B}_q \\ 0 & \mathbf{B}_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_k & \mathbf{B}_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于 $\|\text{diag}(\Delta_f, \Delta, e^{-sT})\|_\infty \leq 1$, 根据小增益定理可知, 图 3 所示的闭环系统鲁棒稳定性的充分条件为 $\|G_{zw}\|_\infty = \|\tilde{F}\|_\infty < 1$.

引理 1^[13] 设 $\gamma > 0$, 且 $G(s)$ 的最小实现由 (A, B, C, D) 给出, 则 A 是稳定阵, 且 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ 的充要条件是存在 $X > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} XA + A^T X & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

定理 2 设 $\gamma = 1$, G_{zw} 由式(9) 给出. 如果存在

$$\begin{bmatrix} X\bar{A} + \bar{A}^T X & X\bar{B}_1 & \bar{C}_1^T \\ \bar{B}_1^T X & -I & \bar{D}_{11}^T \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

则 $\bar{A}$ 是稳定阵, 且 $\|G_{zw}\|_\infty = \|\tilde{F}\|_\infty < 1$. 从而图 3 的系统是鲁棒稳定的.

证明 设 $\gamma = 1$, G_{zw} 由式(9) 给出. 由引理 3 的充分条件可以得到定理 2 的证明. 证毕.

由于定理 2 使用对角型结构的摄动, 导致保守性较大. 鉴于此, 在图 3 中引入定标阵 $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, Q_3)$, 再利用小增益定理来确定系统鲁棒稳定性的充分条件. 在图 3 中加入稳定的定标阵变形为图 4.

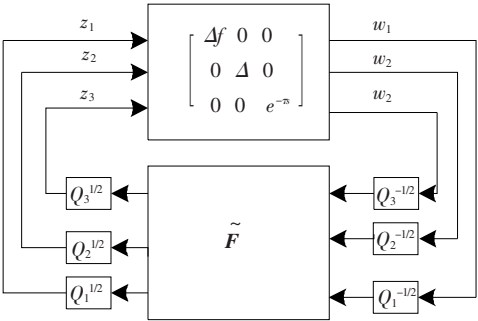


图 4 导入定标阵的结构图

设 $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, Q_3)$, 利用小增益定理可知图 4 的闭环系统鲁棒稳定的充分条件为

$$\|Q^{-1/2} \tilde{F} Q^{1/2}\|_\infty < 1. \quad (12)$$

满足式(12)的定标矩阵 Q 的条件归结为如下 LMI:

$$\begin{bmatrix} X\bar{A} + \bar{A}^T X & X\bar{B}_1 & \bar{C}_1^T \\ \bar{B}_1^T X & -Q^{-1} & \bar{D}_{11}^T \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

通过适当地选择 Q , 可使得 $\|Q^{-1/2} \tilde{F} Q^{1/2}\|_\infty < \|\tilde{F}\|_\infty$, 从而可以设计出性能更好的控制系统.

3 控制器设计

为了方便分析, 将(9) 中 $\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}_1$ 表示成如

下的形式: $\bar{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}C_k \\ B_k \tilde{C} & A_k \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ B_k \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 C_k]$

其中: $\tilde{C} = [-C_p \quad 0 \quad 0 \quad 0], \tilde{B}_2 = [0 \quad -I \quad I],$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & 0 \\ -B_q C_p & A_q & 0 & 0 \\ B_{u1} C_p & 0 & A_{u1} & 0 \\ B_{u2} C_p & 0 & 0 & A_{u2} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_p & 0 & 0 \\ 0 & -B_q & B_q \\ 0 & B_{u1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} D_{u1} C_p & 0 & C_{u1} & 0 \\ D_{u2} C_p & 0 & 0 & C_{u2} \\ 0 & C_q & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设 $X = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & W \end{bmatrix}, X^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & U \end{bmatrix}$, 其中 R, S, M, N 具有适当的维数.

定义矩阵

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix},$$

则 $X\Phi_1 = \Phi_2, \Phi_1^T X\Phi_1 = \Phi_1^T \Phi_2 = \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix}.$

定义变量:

$$\hat{A} = NA_k M^T + NB_k \tilde{X} P^T + S^T \tilde{B} C_k M^T + S^T \tilde{A} R^T, \\ \hat{B} = NB_k, \hat{C} = C_k M^T.$$

式(13)变换成以下 LMI:

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & J_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

其中:

$$J_{12} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & R\tilde{C}_1^T + \hat{C}^T \tilde{C}_2^T \\ S^T \tilde{B}_1 + \hat{B} \tilde{B}_2 & \tilde{C}_1^T \end{bmatrix},$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} -Q^{-1} & \bar{D}_{11}^T \\ \bar{D}_{11} & -Q \end{bmatrix},$$

$$J_{11} = \begin{bmatrix} R\tilde{A}^T + \hat{C}^T \tilde{B}^T + \tilde{A} R^T + \hat{B} \tilde{C} & \tilde{A} + \hat{A}^T \\ \hat{A} + \tilde{A}^T & \tilde{A} S + S^T \tilde{A} + \hat{B} \tilde{C} + \hat{C}^T \tilde{B}^T \end{bmatrix}.$$

注: 矩阵不等式(14) 不是线性的, 无法便捷地得到控制器参数 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 和 ω_c , 下面的推论 1 给出了将非凸的矩阵不等式(14) 转化为非线性最小化问题求解.

推论 1 给定一个参数 ω_c , 将(14) 转化为如下的非线性最小化问题:

$$\min_{Q, Q_1, R, S, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}} \text{tr}(Q \cdot Q_1). \quad (15)$$

S. t. :

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & \hat{J}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} Q & I \\ I & Q_1 \end{bmatrix} > 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \tag{18}$$

$$Q \geqslant I. \tag{19}$$

其中：
$$\hat{J}_{22} = \begin{bmatrix} -Q_1 & \bar{D}_{11}^T \\ \bar{D}_{11} & -Q \end{bmatrix}.$$

若其解为 $m + 2$ 且存在正定矩阵 Q, Q_1, R, S , 则得到所要求的控制器参数 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹.

在上述的锥补线性化方法中很难通过数据方法保证 $\min \text{tr}(Q \cdot Q_1)$ 精确的等于 $m + 2$, 所以用式 (14) 作为迭代终止的判定条件. 下面给出具体的算法 1:

- 1) 找到满足式 (16) ~ (19) 一组可行解: $[Q, Q_1, R, S, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}]$, 令迭代次数 $j = 0$.
- 2) 求解如下的线性矩阵不等式最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{Q, Q_1, R, S, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}} \quad & \text{tr}[Q_{1,j}Q + Q_jQ_1] \\ \text{s. t. :} \quad & (17) \sim (19) \end{aligned}$$

令求出的解为

$$[Q_{j+1}, Q_{1,j+1}, R_{j+1}, S_{j+1}, \hat{A}_{j+1}, \hat{B}_{j+1}, \hat{C}_{j+1}].$$

- 3) 将求出的解带入式 (16), 如果满足, 则得到控制器增益 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, R, S$; 若不满足, 且迭代次数大于设定的最大迭代次数 $j_{\max}$, 则系统无解, 否则令 $j = j + 1$, 转到 2).

理论上重复控制系统中低通滤波器的剪切频率越大, 系统的跟踪精度越高^[11], 因此可以利用下面的算法 2 得到 ω_c 的最大值及其对应的 A_k, B_k, C_k . 算法 2 的步骤如下:

- 1) 首先确定算法 1 的最大迭代次数 $j_{\max}$, ω_c 的增加值 $\Delta\omega_c > 0, 1 > \Delta\omega_{c2} > 0$, 给定一个很小的 ω_c 及算法 2 终止参数 ε .
- 2) 利用算法 1 的方法求解 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. 如果无解, 则 $\omega_c = \omega_c + \Delta\omega_{c2}$, 转到 2). 如果有解, 转到 3).
- 3) $\omega_c = \omega_c + \Delta\omega_c$, 利用算法 1 的方法求解 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. 如果有解, 转到 3); 如果无解, 转到 4).
- 4) $\omega_c = \omega_c + \frac{\Delta\omega_c}{2}$, 利用算法 1 的方法求解 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \Delta\omega_c = \frac{\Delta\omega_c}{2}$. 如果无解, 转到 4). 如果有解, 转到 3). 当 $\Delta\omega_c < \varepsilon$ 时 (一般 ε 选得很小), 转到 5).
- 5) 通过矩阵 $I - RS$ 的奇异值分解, 得到满足 $MN^T = I - RS$ 的 M, N .
- 6) 从 (14) 式计算镇定控制器参数 A_k, B_k, C_k .

注 1: 文献 [10] 提出一种求解低通滤波器剪

切频率 ω_c 的算法, 首先给定一个正定矩阵 Q 和标量 $\mu > 0$, 然后利用 LMI 求解 ω_c . 由于正定矩阵 Q 和标量 $\mu > 0$ 是人为给定的, 因此该方法具有很大的保守性. 文献 [11] 的方法比文献 [10] 的方法求解 ω_c 的保守性小, 但是没有考虑系统的扰动抑制问题. 本文提出的设计方法利用二分法逐渐寻找 ω_c 的最大值及其对应的输出反馈控制器参数, 此方法没有人为给定的参数, 因此求解的 ω_c 保守性小, 并且使得系统的扰动抑制性能更强.

4 应用实例

为了验证本文所提方法在实际应用中的有效性, 对低频线振动台进行仿真研究, 永磁直线同步电机 (PMLSM) 是其驱动部件, PMLSM 的传递函数为

$$P(s) = \frac{1}{89.047s(0.0019s + 1)}.$$

可测反馈信号为低频线振动台的位置信号 θ , 期望轨迹为正弦信号 $0.1\sin(10\pi t)$. 外部扰动信号可写成

$$d = -\frac{R}{K_t} \{ [f_c + (f_s - f_c)e^{-(\theta/\theta_s)^2}] \text{sign}(\dot{\theta}) - A_r \sin(\omega\theta + \varphi) \}.$$

其中:

$$\begin{aligned} R &= 0.51 \, \Omega, K_t = 108 \, \text{N/A}, f_s = 20 \, \text{N}, \\ f_c &= 10 \, \text{N}, \dot{\theta}_s = 0.1 \, \text{m/s}, f_v = 10 \, \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}, \\ A_r &= 8.5 \, \text{N}, \varphi = 0.05 \pi, \omega = 314 \, \text{rad/m}. \end{aligned}$$

设乘性不确定性 $W_2(s) = 0.7(0.05s + 1)/(0.035s + 1)$, 扰动抑制加权阵 $W_1(s) = 100/(0.8s + 1)$.

给定算法 1 和算法 2 的参数: $\Delta\omega_c = 100, \Delta\omega_{c2} = 0.1, \varepsilon = 1, \omega_c = 0, j_{\max} = 100$. 得到 $\omega_{c\max} = 1\,638$, 与 $\omega_{c\max}$ 对应的输出反馈控制器为 $K(s) =$

$$\begin{aligned} & \frac{25\,054\,743\,199\,751.27(s + 526.1)(s + 1.237) \cdot}{(s + 1.747 \times 10^7)(s + 4\,798)(s + 1\,638)} \cdot \\ & \leftarrow \frac{(s^2 + 58.69s + 872.3)}{(s + 71.7)(s + 0.6371)}. \end{aligned}$$

简化后为

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{1\,434\,200(s + 526.1)(s + 1.237) \cdot}{(s + 4\,798)(s + 1\,638)} \cdot \\ & \leftarrow \frac{(s^2 + 58.69s + 872.3)}{(s + 71.7)(s + 0.6371)}. \end{aligned}$$

确定 $\tau = 0.2 - \frac{1}{1\,638}^{[13]}$.

为了验证本文所提出方法的有效性, 用文献 [10] 和文献 [11] 提出的方法与本文所提出的方法做比较. 针对低频线振动台, 文献 [11] 的方法

没有可行解. 利用文献[10]的方法设计低频线振动台的重复控制器时, 设系统不含不确定性, 首先给定系统的镇定控制器为

$$K = 33\,000.7787 \frac{(s + 16.67)(s + 4.167)(s + 3.846)}{s(s + 55.6)(s + 2.778)}.$$

及 $\hat{\omega}_e = 50$, $Q = 0.01 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mu = 100$. 然后

利用 LMI 的方法求得 $\gamma = 2.2084 \times 10^4$.

针对低频线振动台, 采用本文所提出的方法设计的重复控制系统的位置误差和采用文献[10]提出的方法设计重复控制系统的位置误差如图 5 所示.

图 6 为采用本文所提出的方法设计的重复控制系统的加速度频谱图.

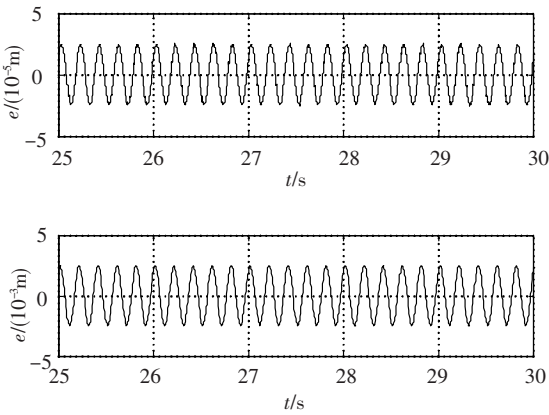


图 5 鲁棒重复控制的仿真结果

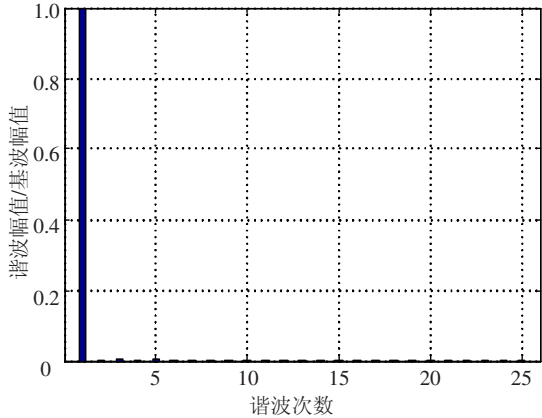


图 6 重复控制的低频线振动台加速度频谱图

很明显, 本文所提出的重复控制系统设计方法提高了低频线振动台的跟踪性能. 通过图 6 可知低频线振动台的加速度失真度为 1.34%, 满足系统的性能指标.

5 结 论

本文提出的重复控制器和输出反馈控制器的设计方法有效地抑制了乘性不确定性系统存在的周期性扰动, 提高了系统的跟踪性能. 给出了计算

重复控制器中低通滤波器最大的剪切频率及其对应的输出反馈控制器参数的迭代算法. 仿真结果验证该设计方法的有效性.

参考文献:

[1] FRANCIS B A, WONHAM W M. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply[J]. *Applied Mathematics & Optimization*, 1975, 2(2):216 – 221.

[2] PEDRO R S, ENRIQUE A. Dynamic voltage restorer based on flying capacitor multilevel converters operated by repetitive control[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2009, 24(2):951 – 960.

[3] FUJIMOTO H. RRO compensation of hard disk drives with multirate repetitive perfect tracking control[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(10):3825 – 3831.

[4] ABRAHAM D R, HENDRIK T. Mouton and Hirofumi Akagi. DFT – based repetitive control of a series active filter integrated with a 12 pulse diode rectifier[J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2009, 24(6):1515 – 1521.

[5] GOELE P, BRAM D, FARID A B, *et al.* Optimal performance tradeoffs in repetitive control: experimental validation on an active air bearing setup[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(4):970 – 979.

[6] HARA S, YAMAMOTO Y, OMATA T, *et al.* Repetitive control system: A new type servo system for periodic exogenous signals [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7):659 – 666.

[7] 张东纯, 曾鸣, 苏宝库. 精密速率控制系统中位置周期扰动的动态补偿一种有限维重复控制方法[J]. *宇航学报*, 2003, 24(1):57 – 60.

[8] GUVENC L. Stability and performance robustness analysis of repetitive control systems using structured singular values[J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1996, 118(9):593 – 597.

[9] CHEN J W, LIU T S. H_∞ repetitive control for pickup head flying height in near-field optical disk drives[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, 41(2):1067 – 1070.

[10] WEISS G, ZHONG Q C, GREEN T C, *et al.* H_∞ repetitive control of DC – AC converters in microgrids [J]. *IEEE Transaction on Power Electronics*, 2004, 19(1):219 – 230.

[11] 吴敏, 兰永红, 余锦华, 等. 线性不确定系统的 H_∞ 状态反馈鲁棒重复控制[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(6):427 – 433.

[12] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.

[13] DOH T Y, RYOO J R, CHUNG M J. Design of a repetitive controller: an application to the track – following servo system of optical disk drives[J]. *IEE Proc. Control Theory and Applications*, 2006, 153(3):323 – 330.

(编辑 张 宏)