

半球谐振子动力学方程的建立及固有频率的计算

赵洪波, 任顺清, 李 巍

(哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 哈尔滨 150001, h84b@163.com)

摘 要: 为了建立半球谐振陀螺仪谐振子的动力学方程, 由基希霍夫-李雅夫假设分析了半球谐振子上任一点的应变及应力, 然后在谐振子上取一薄壳单元, 对其进行受力分析, 并考虑了三轴角速率和角加速度的情况下引起的惯性力, 建立了薄壳单元的平衡方程及薄壳的边缘运动方程, 利用解微分方程的布勃诺夫-加廖尔金法建立了谐振子的动力学方程, 最后根据动力学方程求出了谐振子的固有频率. 通过与各种计算固有频率的方法的计算值以及实测值的比较, 证明了本文推导的半球谐振子动力学方程和固有频率的正确性.

关键词: 半球谐振陀螺; 固有频率; 动力学

中图分类号: U666.1

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2010)11-1702-05

Establishment of dynamics equation of HRG resonator and calculation of natural frequency

ZHAO Hong-bo, REN Shun-qing, LI wei

(Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China, h84b@163.com)

Abstract: In order to establish dynamics equation of resonator in HRG, the strains and stresses of an arbitrary point in the hemispherical thin shell were deduced under Kirchhoff-Lyav hypothesis. The force and torque equilibrium equations of the thin shell element selected from the resonator were gained on the basis of the calculated strains and stresses, then the border motion equations of the HRG were obtained in consideration of the subjected 3-D angular rate and the 3-D angular acceleration. Finally the dynamics equations of resonator were established by Bubonov-Galerkin method which is common used for solving differential equations, thus the natural frequency is computed by the established dynamics equations. By contrast with other methods of calculating natural frequency and the measured frequency values of practical HRG, the correctness of the established dynamics equations and the method of frequency calculation are proved.

Key words: hemispherical resonator gyro; natural frequency; dynamics

半球谐振陀螺仪是一种哥氏振动陀螺仪, 已在卫星和宇宙飞船中得到广泛的应用^[1-2], 其高精度、长寿命特性使其在空间技术方面有广阔的应用前景, 国内从十一·五期间已开展了半球谐振陀螺仪的研制工作. 在理论与实际应用中半球谐振子的固有频率是一个很重要的参数, 特别是在由于谐振子密度、厚度等的不均匀性造成的半

球谐振子频率裂解的分析中有重要的作用. 文献[3]通过有限元法计算了半球谐振陀螺仪谐振子的固有频率, 文献[4]给出了半球谐振陀螺仪谐振子的固有频率的计算公式, 但根据此公式编程计算的值与实测的固有频率相差太大. 因此本文经过一系列的推导, 建立了与文献[4]不同的动力学方程, 给出了固有频率的计算方法, 并结合某半球谐振陀螺仪的具体参数给出了计算的固有频率, 这个频率与实测结果相近. 再取文献[3]的一组半球谐振陀螺仪的基本参数, 按照本文的方法进行计算并和文献[3]的结果比较, 证明了本文方法的正确性.

收稿日期: 2009-05-23.

基金项目: 国防预研项目(51309050601).

作者简介: 赵洪波(1984—), 男, 硕士研究生;

任顺清(1967—), 男, 教授, 博士生导师.

1 半球谐振子动力学方程

1.1 半球谐振子任意点的应变方程

如图 1 所示, 半球壳谐振子中曲面一点的矢径为 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ 在坐标系 $O-XYZ$ 下的分量为 $R\sin\alpha\cos\beta, R\sin\alpha\sin\beta, R\cos\alpha$ (其中 R 为矢量 $\boldsymbol{R}$ 的模). 把经线和纬线作为坐标曲线 α, β , 它们的切线单位矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 和法线单位矢量 $\boldsymbol{e}_3$ 组成一个右手局部坐标系. 假设半球壳的中曲面任一点在局部坐标系的位移为 $\boldsymbol{M} = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w\boldsymbol{e}_3$, 法线方向上和此点距离为 Z 的一点位移为 $\boldsymbol{M}_Z = u_z\boldsymbol{e}_1 + v_z\boldsymbol{e}_2 + w_z\boldsymbol{e}_3$, 假设变形后坐标系变为 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$, 以 θ 表示在 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 确定的平面内, $\boldsymbol{e}_3$ 向 $\boldsymbol{e}'_1$ 的转角; φ 表示 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 确定的平面内, $\boldsymbol{e}_3$ 向 $\boldsymbol{e}'_2$ 的转角; w_1 和 w_2 分别表示在切平面内, $\boldsymbol{e}_1$ 向 $\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_2$ 向 $\boldsymbol{e}'_1$ 的转角. $\boldsymbol{R}$ 为中曲面内一点变形前的矢径, $\boldsymbol{P}$ 为同一点变形后的矢径, 在局部坐标系下表示为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{M} = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + (R + w)\boldsymbol{e}_3.$$

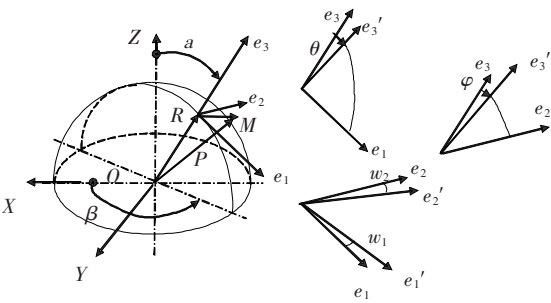


图 1 半球薄壳一点的位移, 变形及局部坐标系

基于基希霍夫-李亚夫假设, 即薄壳变形前任何垂直于壳体中间表面的直线在变形后依然垂直于这一表面; 沿壳体厚度的法线段的长度在变形过程中保持常值; 在相邻的平行于中间表面的薄壳层表面间产生的法向应力与应力张量的其它分量相比是小量, 可以忽略不计. 再根据板壳理论、曲面论的知识和几何关系, 得到半球谐振子中距离中曲面为 Z 的任一点的应变方程^[5]为

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha^z = \frac{1}{R} \left[w + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{Z}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \alpha} \right) \right] \left(1 - \frac{Z}{R} \right); \\ \varepsilon_\beta^z = \frac{1}{R} \left(u \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w + Z \theta \cot \alpha + \right. \\ \quad \left. \frac{1}{Z} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) \left(1 - \frac{Z}{R} \right); \\ \gamma_{\alpha\beta}^z = w_1 + w_2 = \frac{1}{R} \left(-v \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\varepsilon_\alpha^z, \varepsilon_\beta^z$ 为沿 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 方向的应变, $\gamma_{\alpha\beta}^z$ 为切应变, u, v, w 为半球壳中曲线上一点的位移在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 方向的投影.

1.2 半球薄壳单元平衡方程

薄壳单元的应力分析如图 2 所示, 可求出沿中曲面为单位宽度的面积上的内力.

在以 α, β 为法线的截面上, 正应力分别为 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$, 切应力为 $\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha z}, \tau_{\beta\alpha}, \tau_{\beta z}$.

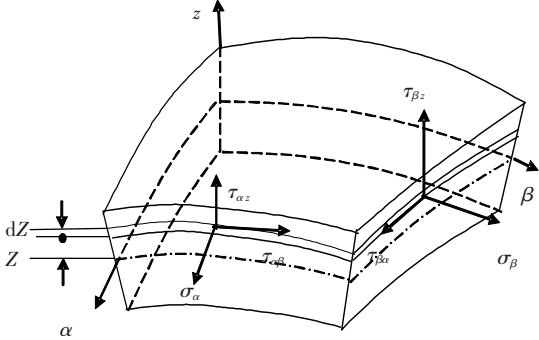
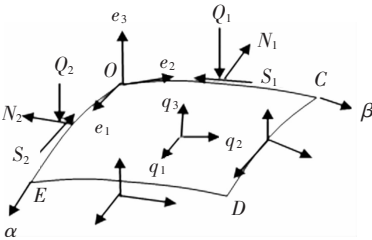
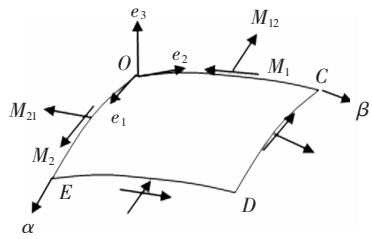


图 2 薄壳单元应力图

图 3 为薄壳微元受力分析图, 其中 $N_1, S_1, Q_1, N_2, S_2, Q_2$ 为沿中曲面为单位宽度的面积上的内力, M_1, M_2, M_{12}, M_{21} 为沿中曲面为单位宽度的面积上的力矩, q_1, q_2, q_3 分别是外力沿坐标系方向的投影, χ 为扭率. 根据面素的平衡条件建立力平衡方程, 再求出其力矩平衡方程, 从而得到半球薄壳单元平衡方程, 如式 (2) ~ (4) 所示.



(a) 力分析图



(b) 力矩分析图

图 3 薄壳微元受力图

$$\begin{aligned} -q_1 R &= (N_1 - N_2) \cot \alpha + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + \\ &\quad \frac{1}{R} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{M_1 - M_2}{R} \cot \alpha + \frac{1}{R \sin \alpha} \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -q_2 R &= \frac{1}{R} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + \frac{2M_{12}}{R} \cot \alpha + \frac{1}{R \sin \alpha} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \\ &\quad (S_1 + S_2) \cot \alpha + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_2}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$-q_3 R = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} \cot \alpha - \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \alpha} \cot \alpha + \frac{2}{R \sin \alpha} \frac{\partial^2 M_{21}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2}{R \sin \alpha} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} \cot \alpha - \frac{M_1 - M_2}{R} - (N_1 + N_2). \quad (4)$$

其中:

$$N_1 = \frac{Eh}{1 - \gamma^2} (\varepsilon_\alpha + \gamma \varepsilon_\beta),$$

$$S_1 = \frac{Eh}{2(1 + \gamma)} \gamma_{\alpha\beta},$$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1 - \gamma^2} [\varepsilon_\alpha + \gamma \varepsilon_\beta + (k_1 + k_2 \gamma) Z] Z \left(1 + \frac{Z}{R}\right) dZ = \frac{Eh^3}{12(1 - \gamma^2)} \left(k_1 + \gamma k_2 + \frac{\varepsilon_\alpha + \gamma \varepsilon_\beta}{R}\right),$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1 + \gamma)} (\gamma_{\alpha\beta} + 2Z\chi) \left(Z + \frac{Z^2}{R}\right) dZ = \frac{Eh^3}{24(1 + \gamma)} \left(2\chi + \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{R}\right).$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1 - \gamma^2} (\varepsilon_\beta + \gamma \varepsilon_\alpha),$$

$$S_2 = \frac{Eh}{2(1 + \gamma)} \gamma_{\alpha\beta},$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1 - \gamma^2)} \left(k_2 + \gamma k_1 + \frac{\varepsilon_\beta + \gamma \varepsilon_\alpha}{R}\right),$$

$$M_{21} = \frac{Eh^3}{24(1 + \gamma)} \left(2\chi + \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{R}\right).$$

以下力平衡和力矩平衡方程的推导,可参照文献[6].

1.3 半球谐振子二阶固有振型的动力学方程

在前面提到的半球薄壳单元平衡方程的推导过程中,在谐振的外力中必须考虑谐振子在惯性空间以角速度 $[\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T$ 运动时的惯性力.根据哥氏定理计算得到谐振子的惯性力 $[X \quad Y \quad Z]^T$,并在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时得

$$X = -\rho h a_\alpha, \quad Y = -\rho h a_\beta, \quad Z = -\rho h a_z.$$

其中: ρ 为谐振子的材料密度

$$a_\alpha = \ddot{u} + (R + w)(-\Omega_x \sin \beta + \Omega_y \cos \beta) - v(\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta) + 2\dot{w}(-\Omega_x \sin \beta + \Omega_y \cos \beta) - 2\dot{v}(\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta) + v\Omega_z(\Omega_x \sin \beta - \Omega_y \cos \beta) - u(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) - w\Omega_z(\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta),$$

$$a_\beta = \ddot{v} + u(\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta) + \Omega_z(R + w) + 2\dot{u}(\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta) + 2\dot{w}\Omega_z + u\Omega_z(\Omega_x \sin \beta - \Omega_y \cos \beta) - v[\Omega_z^2 + (\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta)^2] + (R + w)(-\Omega_x^2 +$$

$$\Omega_y^2) \sin \beta \cos \beta + w\Omega_x \Omega_y (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta),$$

$$a_z = \ddot{w} - v\Omega_z + u(\Omega_x \sin \beta - \Omega_y \cos \beta) - 2\dot{u}\Omega_z + 2\dot{v}(\Omega_x \sin \beta - \Omega_y \cos \beta) - u\Omega_z(\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta) + v(-\Omega_x \sin \beta + \Omega_y \cos \beta)(\Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta) - (R + w)(\Omega_z^2 + \Omega_x^2 \sin^2 \beta + \Omega_y^2 \cos^2 \beta) + 2w\Omega_x \Omega_y \sin \beta \cos \beta.$$

得到以角速率旋转并处于外分布载荷作用下的半球谐振子边缘的运动方程为

$$\left(\frac{H_1}{R} + \frac{D_1}{R^3}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \left(\frac{H}{R} + \frac{D}{R^3}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{H}{R} \gamma + \frac{H_1}{R} + \frac{D\gamma + D_1}{R^3}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \left[\frac{H}{R}(1 + \gamma) + \frac{D}{R^3} \gamma\right] \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) \frac{D}{R^3} - \frac{H}{R} \gamma u - \frac{D}{R^3} \gamma u - 2 \frac{D_1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + R q_1 - X = 0. \quad (5)$$

$$\left(\frac{D_1}{R^3} + \frac{D}{R^3} \gamma + \frac{H_1}{R} + \gamma \frac{H}{R}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{D}{R^3} + \frac{H}{R}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \left(\frac{D_1}{R^3} + \frac{H_1}{R}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \left(-\frac{2D_1}{R^3} + \frac{H}{R}(1 + \gamma)\right) \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{2D_1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right) + \left(\frac{H_1}{R} + \frac{D_1}{R^3}\right) v - Y + q_2 R = 0. \quad (6)$$

$$- \left[2 \frac{D}{R^3} \gamma + \frac{H}{R}(1 + \gamma)\right] \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{2D_1}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \left[\frac{D}{R^3} \gamma + \frac{2D_1}{R^3} + \frac{D}{R^3}(1 - \gamma) - \frac{H}{R}(1 + \gamma)\right] \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\gamma \frac{D}{R^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{2D_1}{R^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{D}{R^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2}\right) - \frac{2H}{R}(1 + \gamma) w - \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \gamma \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}\right) + \frac{4D_1}{R^3} \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^2}\right) + \frac{D}{R^3} \left(2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial \beta^2}\right) + \frac{D}{R^3}(1 - \gamma) \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right). \quad (7)$$

式中: $H = \frac{Eh}{1 - \gamma^2}$; $H_1 = \frac{Eh}{2(1 + \gamma)}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \gamma^2)}$; $D_1 = \frac{Eh^3}{24(1 + \gamma)}$, E 为杨氏模量, h 为半球谐振子的厚度, γ 为谐振子的材料泊松比. 式(5) ~ (7) 可作为半球谐振子动力学方程的边界条件.

(注:公式(5)中第二项 $\left(\frac{H}{R} + \frac{D}{R^3}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ 与文献[4]中的不同,文献[4]中为 $\left(\frac{H}{R} + \frac{D}{R^3}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$, -

$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \frac{D}{R^3}$ 项也与文献[4] 中的不同, 文献[4] 为 $-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \frac{D}{R^3}$, 少乘 γ , 公式(6) 和(7) 也增加了一些项, 文献[7][8] 对这个不正确的结果直接进行了引用.)

将谐振子各点的位移按不可拉伸薄壳的二阶固有振型展开得

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\alpha) \cos 2\beta \\ V(\alpha) \sin 2\beta \\ W(\alpha) \cos 2\beta \end{bmatrix} m(t) + \begin{bmatrix} U(\alpha) \sin 2\beta \\ -V(\alpha) \cos 2\beta \\ W(\alpha) \sin 2\beta \end{bmatrix} n(t).$$

(8)

式中:

$$U(\alpha) = V(\alpha) = \sin \alpha \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$
$$W(\alpha) = -(2 + \cos \alpha) \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

$U(\alpha)$, $V(\alpha)$, $W(\alpha)$ 为半球薄壳二阶固有振型振动的瑞利函数, 则半球谐振子边缘某点的位移方程为

$$M = [U(\alpha) \cos 2\beta_1 + V(\alpha) \sin 2\beta_2 + W(\alpha) \cos 2\beta_3] m(t) + [U(\alpha) \sin 2\beta_1 - V(\alpha) \cos 2\beta_2 + W(\alpha) \sin 2\beta_3] n(t) = \varphi_1(x) m(t) + \varphi_2(x) n(t).$$

用 A_x , A_y , A_z 分别表示式(5) ~ (7) 的左边, 则半球谐振子边缘的运动方程 L 可表示为

$$L = A_x e_1 + A_y e_2 + A_z e_3 = 0.$$

将式(8) 代入式(5) ~ (7) 并利用布勃诺夫 - 加廖尔金法^[4] 得

$$\begin{cases} \iiint_V L \cdot \varphi_1 dx dy dz = 0, \\ \iiint_V L \cdot \varphi_2 dx dy dz = 0. \end{cases}$$

其中 V 为半球壳区域, 化为球坐标

$$\begin{cases} \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \cdot \varphi_1 r^2 \sin \alpha d\alpha d\beta dr = 0, \\ \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \cdot \varphi_2 r^2 \sin \alpha d\alpha d\beta dr = 0, \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [A_x U(\alpha) \cos 2\beta + A_y V(\alpha) \sin 2\beta + A_z W(\alpha) \cos 2\beta] \sin \alpha d\alpha d\beta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [A_x U(\alpha) \sin 2\beta - A_y V(\alpha) \cos 2\beta + A_z W(\alpha) \sin 2\beta] \sin \alpha d\alpha d\beta = 0. \end{cases}$$

(9)

进行积分运算, 可得动力学方程为

$$\begin{cases} m_0 \ddot{m} - 2\Omega_z b \dot{n} + (c_0 + d + e) m - a n + f(\Omega_x^2 - \Omega_y^2) = 0, \\ m_0 \ddot{n} + 2\Omega_z b \dot{m} + (c_0 + d + e) n + a m = 0. \end{cases}$$

(10)

其中:

$$m_0 = -\rho h R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (U^2 + V^2 + W^2) \sin \alpha d\alpha,$$

$$b = 2\rho h R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} V W \sin \alpha d\alpha,$$

$$c_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ U^2 \left(-4H_1 - 4\frac{D_1}{R^2} - H\gamma - \frac{D}{R^2} \gamma \right) + \right.$$

$$U''U \left(H + \frac{D}{R^2} \right) + 2V'U \left(H\gamma + H_1 + \frac{D\gamma + D_1}{R^2} \right) +$$

$$W'U \left[H(1 + \gamma) + 5\gamma \frac{D}{R^2} + 8\frac{D_1}{R^2} \right] - W''U \frac{D}{R^2} -$$

$$2U'V \left(\frac{D_1}{R^2} + \frac{D}{R^2} \gamma + H_1 + \gamma H \right) + V^2 \left(H_1 + \frac{D_1}{R^2} -$$

$$4\frac{D}{R^2} - 4H \right) + V''V \left(\frac{D_1}{R^2} + H_1 \right) - WV \left[-\frac{8D_1}{R^2} +$$

$$14\frac{D}{R^2} + 4H(1 + \gamma) \right] + W'V \left(\frac{4D_1}{R^2} + 2\gamma \frac{D}{R^2} \right) +$$

$$U'W \left[-\frac{D}{R^2} (5\gamma + 1) - H(1 + \gamma) - \frac{8D_1}{R^2} \right] +$$

$$U''W \frac{D}{R^2} + V''W \left(2\gamma \frac{D}{R^2} + \frac{4D_1}{R^2} \right) + W^2 \left[-2H(1 + \right.$$

$$\gamma) - \frac{D}{R^2} (12 - 4\gamma) + 16\frac{D_1}{R^2} \left. \right] +$$

$$W''W \left[\frac{D}{R^2} (9\gamma + 1) + \frac{16D_1}{R^2} \right] -$$

$$\frac{D}{R^2} W^{(4)} W \left. \right\} \sin \alpha d\alpha,$$

$$a = \rho h R^2 2\Omega_z \int_0^{\frac{\pi}{2}} V W \sin \alpha d\alpha,$$

$$d = \rho h R^2 \Omega_z^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (V^2 + W^2) \sin \alpha d\alpha,$$

$$e = \rho h R^2 (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(U^2 + \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} W^2 \right) \sin \alpha d\alpha,$$

$$f = \frac{1}{2} \rho h R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (V - W) \sin \alpha d\alpha.$$

其中 c_0 与文献[4] 中的计算结果不同, 增加了很多项, 使谐振子的动力学方程更加精确, 为进行半球谐振子运动机理分析及其质量, 密度, 厚度, 杨氏模量等的不均匀性的误差分析打下基础.

下面与中电集团二十六所研制的半球谐振陀螺仪的实际参数进行计算比较.

2 固有频率的计算及比较

根据式(10)可知固有频率 ω_0 的计算公式为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0 + d + e}{m_0}}. \quad (11)$$

由 $U(\alpha) = V(\alpha) = \sin\alpha \tan^2(\alpha/2)$, $W(\alpha) = -(2 + \cos\alpha)\tan^2(\alpha/2)$, 对它们求取关于 α 的各阶导数 $U'(\alpha)$, $U''(\alpha)$, $U'''(\alpha)$ 及 $W'(\alpha)$, $W''(\alpha)$, $W'''(\alpha)$, $W^{(4)}(\alpha)$, 然后代入 c_0, d, e 和 m_0 的公式中得

$$c_0 = (-0.188\ 3\gamma - 0.035\ 5)H + 0.152\ 8H_1 +$$

$$(20.31\gamma - 15.88)\frac{D}{R^2} + (41.10)\frac{D_1}{R^2}.$$

$$d = 1.317\ 7\rho h R^2 \Omega_z^2,$$

$$e = 0.870\ 7\rho h R^2 (\Omega_x^2 + \Omega_y^2),$$

$$m_0 = -1.529\ 5\rho h R^2.$$

目前国内生产谐振子的材料为熔融石英,其密度 $\rho = 2\ 200\ (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$, 杨氏模量 $E = 7.67 \times 10^{10}\ (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$, 泊松比 $\gamma = 0.17$, 它的几何参数为中曲面半径 $R = 0.015\ \text{m}$, 厚度 $h = 0.85 \times 10^{-3}\ \text{m}$, 将以上各值带入式(11)得:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (-2.257\ 0 \times 10^5 + 5.544\ 5 \times 10^{-4} \times \Omega_z^2 + \\ &3.663\ 6 \times 10^{-4} (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) / -6.435\ 8 \times \\ &10^{-4})^{1/2} \approx \sqrt{\frac{-2.257\ 0 \times 10^5}{-6.435\ 8 \times 10^{-4}}} = 18\ 727 \\ &\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} = 2\ 980.5\ \text{Hz}. \end{aligned}$$

这与实际测量结果是一致的. 而按照文献[4]给定的公式, 计算结果为 $\omega_0 = 10\ 950\ \text{Hz}$, 与实际不符.

文献[3]给定的参数为 $\rho = 2\ 500\ (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$, $\gamma = 0.17$, $h = 10^{-3}\ \text{m}$, $R = 0.014\ 5\ \text{m}$, $E = 7.67 \times 10^{10}\ (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$, 按照本文的方法计算得 $\omega_0 = 2\ 623.6\ \text{Hz}$, 半球壳支柱的长度和半径对固有频率影响较大^[3], 故考虑支柱的影响后文献[3]计算结果为 $\omega_0 = 3\ 640\ \text{Hz}$, 与本文的按完整半球壳计算的固有频率有一定的差别. 按照文献[4]计算得 $\omega_0 = 10\ 622\ \text{Hz}$, 此结果与实际严重不符, 是不正确的.

3 结 论

1) 在建立半球谐振子的应变方程, 力平衡方程的基础上得到了半球谐振子的动力学方程, 比文献[4]中的动力学方程更加准确;

2) 通过与有限元法计算的固有频率比较, 证明了本文固有频率的计算公式的正确性;

3) 通过实际的半球谐振陀螺仪的参数计算并与实际结果比较, 证明了本文固有频率的计算公式及结果的正确性;

4) 建立的半球谐振子动力学方程是今后半球谐振子的质量, 密度, 厚度, 杨氏模量等的不均匀性的误差分析的基础.

参 考 文 献:

- [1] 吕志清. 半球谐振陀螺在宇宙飞船中的应用[J]. 压电与声光, 1999, 21(5): 349-353.
- [2] EMILY L B, ALLAN Y L. In-flight characterization of cassini inertial reference units [C]//AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Hilton Head, South Carolina: AIAA, 2007.
- [3] 杨倩. 基于半球谐振陀螺的惯性导航系统研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007: 16-22.
- [4] МАТВЕЕВ В А, ЛИПАТНИКОВ В И, АЛЕХИН А В. Проектирование. Волнового твердотельного гироскопа [M]. [S. l.]: Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 1998: 1-43.
- [5] 刘鸿文, 林建兴, 曹曼玲. 板壳理论[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1987.
- [6] QI Jiayi, CHEN Xue, BEN Shunqing, et al. Dynamic error mechanism analysis of HRG [C]//ISSCAA2008. Shenzhen: [s. n.], 2008.
- [7] 梁嵬. 半球陀螺仪谐振子振动特性及其结构研究[D]. 长春: 长春理工大学, 2008: 17-18.
- [8] 雷霆. 半球谐振陀螺控制技术研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2006: 9-10.
- [9] ZHBANOV Y K. Vibration of a hemispherical shell gyro excited by an electrostatic field [J]. Mechanics of Solids, 2008, 43(3): 328-332.
- [10] ZHBANOV Y K, ZHURAVLEV V P. Effect of movability of the resonator center on the operation of a hemispherical resonator gyro [J]. Mechanics of Solids, 2007, 44(3): 851-859.
- [11] 高胜利, 吴简彤. 半球谐振陀螺的漂移机理及其控制[J]. 弹箭与制导学报, 2008, 28(3): 61-64.
- [12] FAN Shangchun, LIU Guangyu, WANG Zhenjun. On Flexural Vibration Of Hemispherical Shell [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1991, 12(10): 1023-1030.

(编辑 张 宏)