

非凸区域上 SPH 计算结果后处理方法研究

郑俊, 于开平, 张嘉钟, 魏英杰

(哈尔滨工业大学 航天学院, 150001 哈尔滨, zhengjun324203@126.com)

摘要: 系统考察了利用 Delaunay 三角化实现 SPH(smoothed particle hydrodynamics)算法后处理的途径. 针对非凸物质域上 SPH 粒子点集的最小凸包的 Delaunay 三角化, 会得到一些并不属于物质域的空白单元, 提出一种“单元称重”算法, 通过 SPH 求和近似获得单元的加权质量, 利用不属于物质域中的空白单元的加权质量比其节点的平均质量小很多的特点, 将它们从单元集中过滤掉. 将过滤后剩下的单元作为有限单元并结合 SPH 粒子上的计算数据, 导入到通用后处理软件 Tecplot 中, 可以实现 SPH 计算结果的可视化, 从而为 SPH 算法的后处理提供了一种简洁实用的途径. 算法的适用性在具有材料飞溅和粒子不均匀分布的算例中得到了验证.

关键词: SPH; 非凸区域; Delaunay 三角化; 后处理; 单元称重法

中图分类号: O302

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2011)03-0012-07

The post-processing method of SPH on non-convex configuration

ZHENG Jun, YU Kai-ping, ZHANG Jia-zhong, WEI Ying-jie

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China, zhengjun324203@126.com)

Abstract: A post-processing method for SPH was presented based on Delaunay triangulation. However for non-convex domain occupied by SPH particles(nodes), Delaunay triangulation results in some empty elements which contains no mass. Thus an “element mass weighing” method should be proposed to identify and delete those empty elements from the element collection. The reasonability of the algorithm is that each empty element has a very much less SPH-weighted-approximation than the average quality of the particles on it. With the SPH data and the kept elements being exported into the universal post-processing software Tecplot, the values at any point in the computational domain could be obtained. The feasibility of the algorithm was tested in a series of numerical cases including a case with heterogeneous particle distribution and material splashing.

Key words: SPH; non convex domain; Delaunay triangulation; post processing; element mass weighing method

SPH(smoothed particle hydrodynamics)是一种基于 Lagrangian 描述的无网格方法^[1], 其计算结果的后处理一般是直接将存储于粒子上的数据与颜色矩阵关联来获得物质域上物理量分布^[2], 无法得到基于网格的算法后处理的连续的等值线(面)图、云图、流程图, 且不易进行微积分运算以及切片上的数据可视化等. Massidda^[3]指出无网格计算可

视化是一项新的技术. Daniel^[4]开发的面向 SPH 后处理的开源软件 Splash, 需在 Linux 下编译, 主要面向天文领域, 且该软件包对于水动力学等其它领域的适用性还有待拓展. Biddiscombe 等^[5]基于 Paraview 开发了可处理 SPH 数据的程序, 但其处理时还是直接在粒子上, 并不方便, 功能也不全面. 无网格法计算可视化的理论^[6-9], 主要是采用 Delaunay 三角化方法, 将无网格点集进行三角化, 获得非结构化网格, 然后基于非结构化网格进行后处理, 可得到传统计算可视化所得的各种图形. 但这些研究只针对凸区域上的无网格点集, 而非凸区域上的无网格计算可视化, 鲜有报导. 但在 SPH 所计算的

收稿日期: 2009-12-29.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10832007).

作者简介: 郑俊(1983—)男, 博士研究生;

于开平(1968—)男, 教授, 博士生导师;

张嘉钟(1945—)男, 教授, 博士生导师.

液体飞溅、高速撞击中的材料碎片等问题中,计算域都是非凸的,对非凸区域上的无网格点集进行 Delaunay 三角化将获得一些并不属于物质域的单 元,称这些单元为空白单元;如何方便的过滤掉这些单元,国内还没有较系统的工作.文献[6]采用在程序中事先指定边界的方法来去除这些空白单元,但在 SPH 中,边界处于复杂变化中,不可能通过事先指定.因此如何在复杂的非凸区域上进行 Delaunay 三角化并去除空白单元,从而为 SPH 算法提供后处理所需的网格,是非凸区域上 SPH 算法计算可视化急需解决的问题.

本文以凸区域上离散点集 Delaunay 三角化为基础,提出一种“单元称重”算法去除非凸区域上离散点集最小凸包三角化后形成的一些空白单元,准确得到了非凸区域 SPH 后处理所需要的网格,结合后处理软件 Tecplot 实现了非凸区域上 SPH 计算结果的可视化.

SPH 作为一种基于物质描述的无网格算法,在自由表面流动等领域得到了非常好的应用^[2,10],以至在流体的计算机实时动画领域也开始采用该算法^[11-12],计算结果用很逼真的形象显示出来.动画领域对计算结果的处理,主要关注物质域表面的提取^[10,13-14]及色泽处理,这些技术也是值得 SPH 算法后处理借鉴的.

1 SPH 基本原理

SPH 利用函数 f 与光滑函数 w 的加权积分来近似 f 与 Dirac 函数 δ 的卷积,从而可以近似得到 f 在计算域某点函数及空间导数的近似值^[1],离散后可得到

$$f(x_i) = \sum_j \tau_j f(x_j) w_{ij}(x_i - x_j), \tag{1}$$

$$\nabla f(x_i) = \sum_j \tau_j f(x_j) \nabla_i w_{ij}(x_i - x_j). \tag{2}$$

其中 τ_j 为粒子体积.利用它们,便可以将流体的动力学方程进行离散.由于本文侧重的是计算可视化的探讨,后文算例计算所需要的方程和参数会给出相应文献出处,这里不再赘述.本文中所有算例的光滑函数为分段五次样条函数^[1],初始光滑长度与粒子间距比值为 $\sqrt{2}$.

2 物质域离散点集的 Delaunay 三角化及“单元称重”法

对于任意一个离散点集,都存在一个最小凸包包含这些点.对该最小凸包进行 Delaunay 三角化,可形成由该离散点集的点作为节点的三角网格(单元)集,而且每 1 个三角单元的外接圆都不

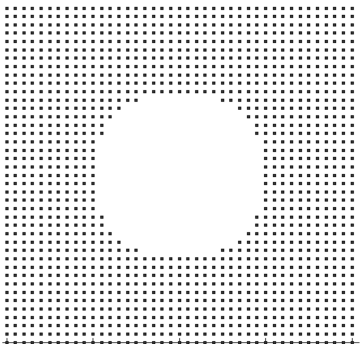
包含其它的节点;而由这些外接圆的圆心形成的多边形称为 Voronoi 图^[15].离散点集的 Delaunay 三角化和 Voronoi 图是计算几何中最重要的算法,这里不再赘引.

2.1 凸区域离散点集上的 Delaunay 三角化

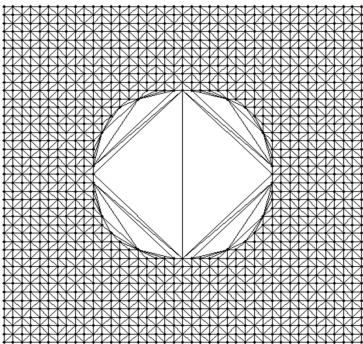
采用 SPH 粒子离散物质域之后,可以将 SPH 粒子集合的最小凸包进行 Delaunay 三角化,从而得到非结构化网格(或单元集),并将 SPH 粒子作为单元节点,然后利用有限元插值方法,得到单元内任何一点处的物理量的值.对于凸区域上的离散点集(粒子集合),也可借助 Matlab 中 Delaunay 算法来对其最小凸包进行三角化^[7-8].凸区域上离散点集的最小凸包的 Delaunay 三角化较为简单,且是非凸区域上离散点集三角化的基础.

2.2 非凸区域离散点集上的 Delaunay 三角化及“单元称重”算法

对非凸区域点集直接进行 Delaunay 三角化会得到一些空白单元,这些单元包含任何物质.如图 1(a)所示,正方形区域的中心空洞中并没有任何物质点,但是该点集最小凸包是包含所有粒子的正方形区域,因此该凸包也包含该正方形点集中心的空洞区域;当对该凸包进行三角化时,该空洞也同时被三角化了,如图 1(b)所示.



(a)非凸物质区域上的离散粒子点集



(b)三角化后形成的网格

图 1 非凸区域的点集及其三角化后形成的空白单元

去除这些空白区域,文献[6]通过事先指定边界—比如指定空洞的周界,然后除掉处于该周

界内的单元,剩下的单元就可以作为后处理的网格了.该方法对于静变形,或材料(或计算域)不破碎、不卷曲的情况是可考虑应用的.但是在 SPH 领域,特别是波浪的飞溅、卷曲问题中,该方法无法应用.因此,本文提出一种“单元称重”算法,可以去除各种复杂非凸区域上的离散点集三角化后形成的空白单元,并且其可行性在具有材料飞溅和粒子不均匀性的高速撞击问题中得到了验证.

2.2.1 空白单元过滤的“单元称重”法

“单元称重”法的基本思想是,不属于物质域的空白单元,其质量比其它单元的质量或其节点(粒子)的质量要小很多,这类单元可以从单元集中去除.因此该算法的核心问题是,如何寻找 1 个方法来计算单元的质量,并提出 1 个比较的标准将它与周围的粒子的质量进行比较,然后将其去除.解决这个问题,可以考虑将 SPH 求和近似算法式(1)结合三角单元的外心(也就是上文提到的相应三角网格的 Voronoi 多边形的顶点),具体算法如下.

每 1 个单元的位置用该单元的外心的位置 $\mathbf{r}_e$ 来表示,其中 $\mathbf{r}_e$ 为外心的矢径,下标“e”表示单元的序号.而用外心处的加权质量来表征该单元的质量.因为该单元的外心正好是某 Voronoi 多变形的顶点,因此该单元的外接圆中将不含任何其它单元的其它节点,这确保了对该单元质量影响权重最大的是属于该单元本身的节点;而该单元的所有节点到单元外心的距离都相等(都等于外径),确保了它的节点对其外心的影响权重相等.这些性质非常重要,这也是 Delaunay 三角化的优点.

要利用 SPH 求和近似得到外心处的加权质量,需要知道该单元外心处的光滑长度值.对任 1 个单元,可以取光滑长度为该单元所有节点的光滑长度的代数平均,即 $h_e = (\sum_j h_j)/3$. 其中 j 为该单元上节点的序号, h 为光滑长度;利用式(1)可得单元加权质量 m_e 为

$$m_e = \sum_k m_k \tau_k w_{ek}. \quad (3)$$

其中 k 为该单元外心的紧支域内支持粒子的序号.这些粒子可能不仅仅包含该单元本身上的节点,还可能包括周围其它单元的节点;也有可能该外心的紧支域内不含任何支持粒子,甚至不含单元本身的节点—此时其加权质量为 0.

通过下式—即“单元称重”算法的定义式,来过滤掉不属于物质域内的空白单元

$$m_e \leq \beta_s \bar{m} \Leftrightarrow m_e / \bar{m} \leq \beta_s. \quad (4)$$

其中: $\bar{m} = (\sum_j m_j)/3$ 为该单元的节点质量的代数平均值; β_s 为临界加权质量因子,是一个选定值,且 $0 < \beta_s < 1$. 任何一个单元的加权质量因子都可用下式表示:

$$\beta_e = m_e / \bar{m}. \quad (5)$$

因此式(4)可以表达为

$$\beta_e \leq \beta_s. \quad (6)$$

式(4)可理解为,若计算所得单元的加权质量 m_e 小于该单元节点质量的平均值 $\bar{m}$ 的一定量,那么该单元可以被过滤掉;式(6)可以理解为,若一个单元的加权质量因子 β_e 小于事先设定的标准值 β_s ,则这个单元应该被过滤掉.对于图 1(b)中非凸区域的离散点集三角化后形成的空白单元,利用“单元称重”法就可以去除,如图 2 所示.

由图 2 可发现,当 β_s 不同时,可以过滤掉一部分共同的空白单元. β_s 较小时,过滤后周界显得光滑,如图 2(a); β_s 变大时,周界显得较不光滑,如图 2(c). 这是因为 β_s 较小时,只有那些加权质量 m_e 特别小的单元被过滤掉,被过滤掉的单元较少,所以边界处显得光滑;而 β_s 变大时,有些加权质量不是特别小的单元也被过滤掉; β_s 越大,被过滤掉的单元越多.注意到,式(3)中粒子对单元外心的权重 w_{ek} 与单元的外径成反比关系,所以外径越大的单元(也就是单元空间尺寸越大),其加权质量自然越小.

特别是当临界加权质量因子 $\beta_s = 0$ 时,只有那些加权质量为 0 的单元被过滤掉,此时表现为因为单元外径太大,该单元上的 3 个节点都对单元的外心的权重 w_{ek} 为 0. 考虑到 SPH 中粒子间存在相互作用的概念是基于 w_{ek} 不为 0,所以可以将这些节点对其单元的加权求和称为对外心的作用.注意到 SPH 中粒子间的互相作用在数学上表现为 w_{ek} 不为 0,但在物理意义上表现为粒子间的作用力不为 0. 而在连续介质力学中,力的产生是因为相邻的物质发生相对运动或变形,即力就是物质的相互作用.因此如果两点之间不互相作用,那么可以认为这两个点上的质量粒子没有相互接触.所以如果三角单元上的节点对其外心没有作用,即 w_{ek} 为 0,那么可认为该单元上的粒子与其外心间没有质量接触;而没有质量接触,则表明该单元内部有质量间断,该单元就自然可被过滤掉.可见单元称重算法是一种符合物理意义的算法.而 $\beta_s > 0$ 的含义是把单元内粒子间互相作用极其微弱的单元也过滤掉.

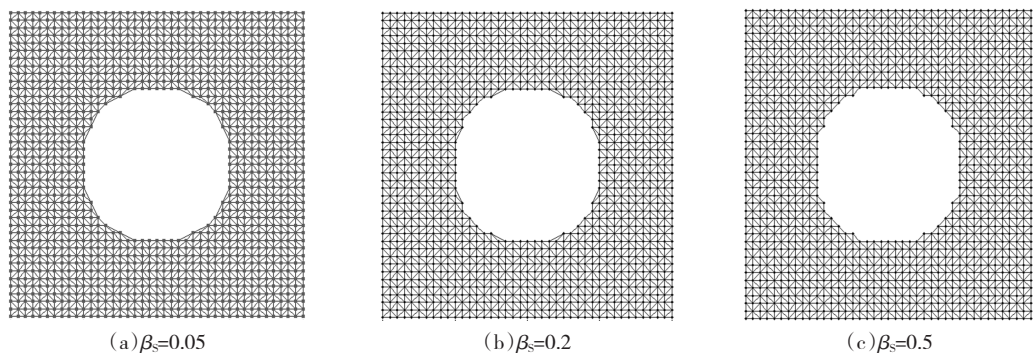


图 2 β_s 不同时, “单元称重”法去除空白单元的情况

下面对单元称重法为什么能过滤掉空白单元进行更深层次考察. 主要出发点是考察空白单元的尺寸和加权质量因子 β_e 间的关系.

2.2.2 “单元称重”法过滤空白单元的可行性分析

首先给出单元称重算法可行的直观解释. 由图 1 可以发现空白单元的 3 个节点中只要有一对节点的连线跨越了空白区域, 则这个连线的距离就会比较大. 而该空白单元的 3 个节点中, 只要有 2 个节点之间的连线距离比较大, 那么外接圆半径就会很大, 而外径很大时, 根据光滑函数的衰减特性可知, 这 3 个节点对该单元外心处的权重 w_{ek} 就会迅速减小并接近于 0. 而图 2(a) 中处于边界附近的小单元依然可以保存下来, 原因也正在于此, 即它们之间的连线并未完全跨越空白区域.

定义单元的特征长度为外接圆半径, 并定义单元的特征尺度为特征长度与其光滑长度之比, 记为 γ_e . 显然, 只要某单元的特征长度接近于光滑函数 w_{ek} 的紧支域半径, 那么单元的加权质量就为 0, 那些特别大的空白单元就立即被过滤掉; 而那些单元特征长度大于光滑长度而接近于紧支域半

径的, 因为光滑函数的衰减性质, 由式 (3) 所得的加权质量会非常小, 于是由式 (4) 中 β_s 的大小决定它们是否被过滤掉.

为了给式 (4) 的定性分析, 在一个等边三角形的单元上, 根据式 (3) 和 (4), 绘制出该单元本身加权质量因子 β_e 随单元特征尺度变化的大致关系, 如图 3 所示. 由图 3 可知, 随 γ_e 增长, 曲线、横坐标线及 γ_e 竖线围成的曲边三角形区域越来越小. 特别是当尺度因子 γ_e 接近 2.5 时, 也就是单元尺度接近于 2.5 倍的光滑长度时, 此时 $\beta_s \approx 0$, 即只有那些加权质量 m_e 接近于 0 的单元被过滤掉, 剩下的大多数单元被保存下来. 随着尺度因子 γ_e 的缩小, 并接近 1.5 时, 被过滤的单元数量几乎不变, 如图中的最大曲边三角形, 此时 $\beta_s \approx 1$, 也就是那些单元加权质量 m_e 小于粒子平均质量 $\bar{m}$ 的单元基本上都被过滤了 (即那些粒子对其外心作用比较弱的甚至稍强的也都被过滤掉了), 保留下的单元其质量都大于其节点的平均质量. 这可作为图 2 中随着临界 β_s 增大, 被过滤的单元几乎不变的原因, 因为剩下的可被过滤的单元越来越少.

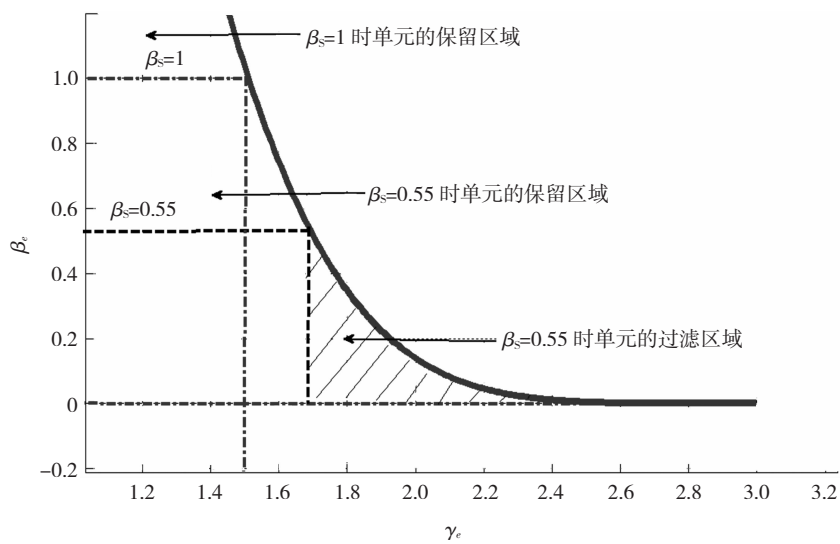


图 3 单元加权质量随其特征尺度的变化关系

“单元称重”法中反映一个单元是否可被过滤的参数,即加权质量因子 β_e ,它反映了一个单元内部所含质量的多少,是单元内部粒子之间作用强弱表现.从以上分析中还可得知,它也是单元尺度 γ_e 小或大的间接体现.也就是说,本质上讲,式(6)是根据被过滤单元尺度 γ_e 来判定哪些大尺度的单元是可以被过滤掉的.这与 SPH 中粒子间是否是粒子作用对是由它们之间距离来判断的思想是一致的.

临界加权质量因子 β_e 的合理范围,可以根据图 3 中的曲线来估计.一般地,如果尺度因子为 2 以上,即特征长度为 2 倍光滑长度以上的单元被过滤掉,那么根据图 3,就可以得到此时 $\beta_e \approx 0.15$.

3 SPH 后处理的有限元插值方法及数值算例

形成网格后,就可由网格节点上所存储的物理量的数值进行有限元插值,从而得到网格单元内各点处的相应数值.完成这个过程,可选择自主开发程序,也可利用现有软件,如 Tecplot^[16].而要利用

成熟的后处理软件 Tecplot 精确处理 SPH 这些数据,就需要将 SPH 数据转换到离散该物质域的有限元格式,从而实现有限元插值.图 4 为液滴问题的几个时刻的处理结果.三维时的情是类似的.

非凸区域上的 SPH 算法后处理同样如此,但是需要将离散点集三角化之后,利用“单元称重”法将空白单元过滤掉,再将 SPH 数据结合过滤后的单元集用有限元格式导入到 Tecplot 中处理.若图 2 区域上各粒子上具有 $F = \sin(x^2 + y^2) \cos(x^2 - y^2)$ 的物理量,则其利用以上 SPH 算法的后处理方法得到的曲面与等值线图如图 5 所示. Tecplot 功能远不限于此;它还具有微积分、切片、光照等功能.

对于大多数基于 SPH 的研究,本文方法已足够使用.特别是去除非凸区域上离散点集三角化的空白单元,“单元称重”法简洁且适应性强.值得注意的是,“单元称重”法不需要事先判断该点集是否属于非凸区域,而是直接进行单元过滤.因此只要程序中加入该算法,不但不凸区域上点集三角化后形成的单元有影响,而且可直接对非凸集三角化后的单元进行过滤.

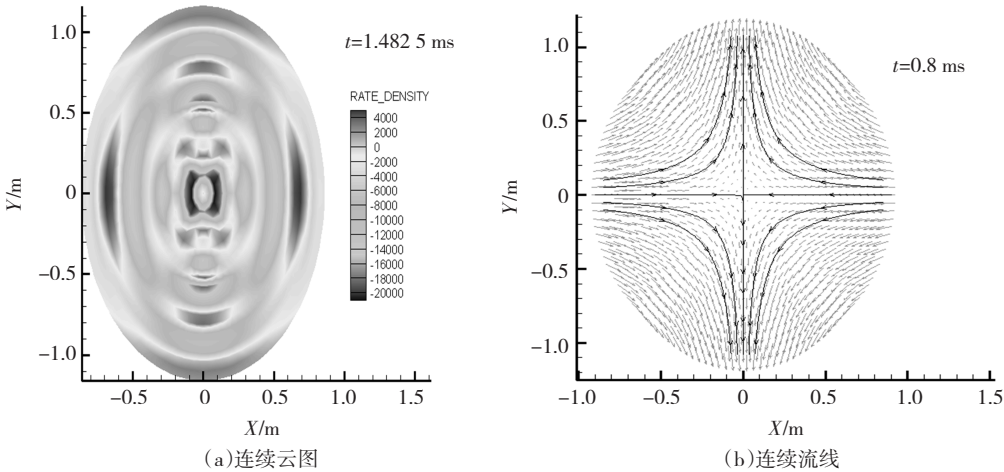


图 4 凸区域上利用有限元插值方法得到的 SPH 后处理结果

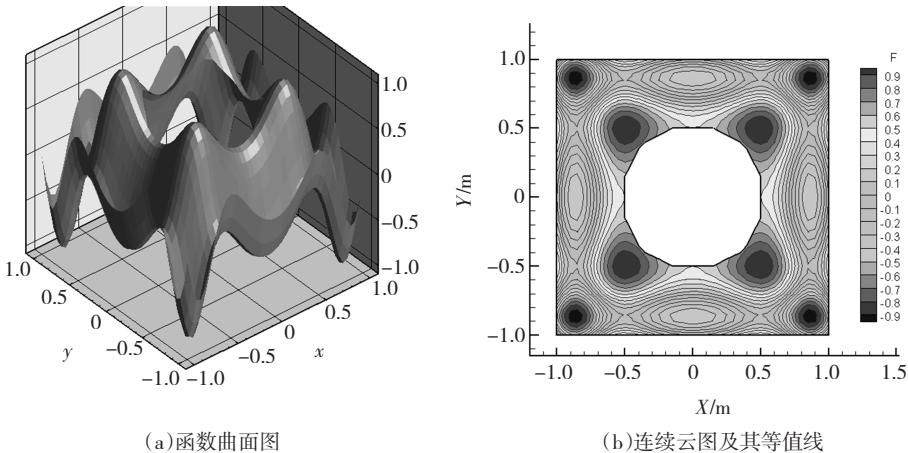


图 5 非凸区域上利用有限元插值方法得到的 SPH 后处理结果

3.1 “单元称重”算法在粒子非均匀分布与材料飞溅情况的适应性

以上所计算的算例粒子分布都比较均匀,如图4~5.为了检验“单元称重”法对实际复杂情况的适用性,本文计算了一个高速撞击问题,在该算例中具有较严重的粒子分布不均匀性与材料飞溅问题.控制方程同文献[17],计算域如图6(a)~(c)所

示,粒子的间距为 $5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$,而时间步长为 $5.0 \text{ }\mu\text{s}$,取人工粘性常数 $\alpha_{\text{II}} = 1, \beta_{\text{II}} = 2^{[17]}$.球形液滴以 $1\,000 \text{ m/s}$ 初始速度向左运动.2.5 ms和12.5 ms时粒子分布、三角化后的单元集以及经过加权质量因子 $\beta_s = 1.0\text{e} - 3$ 过滤后的单元集,如图6所示.

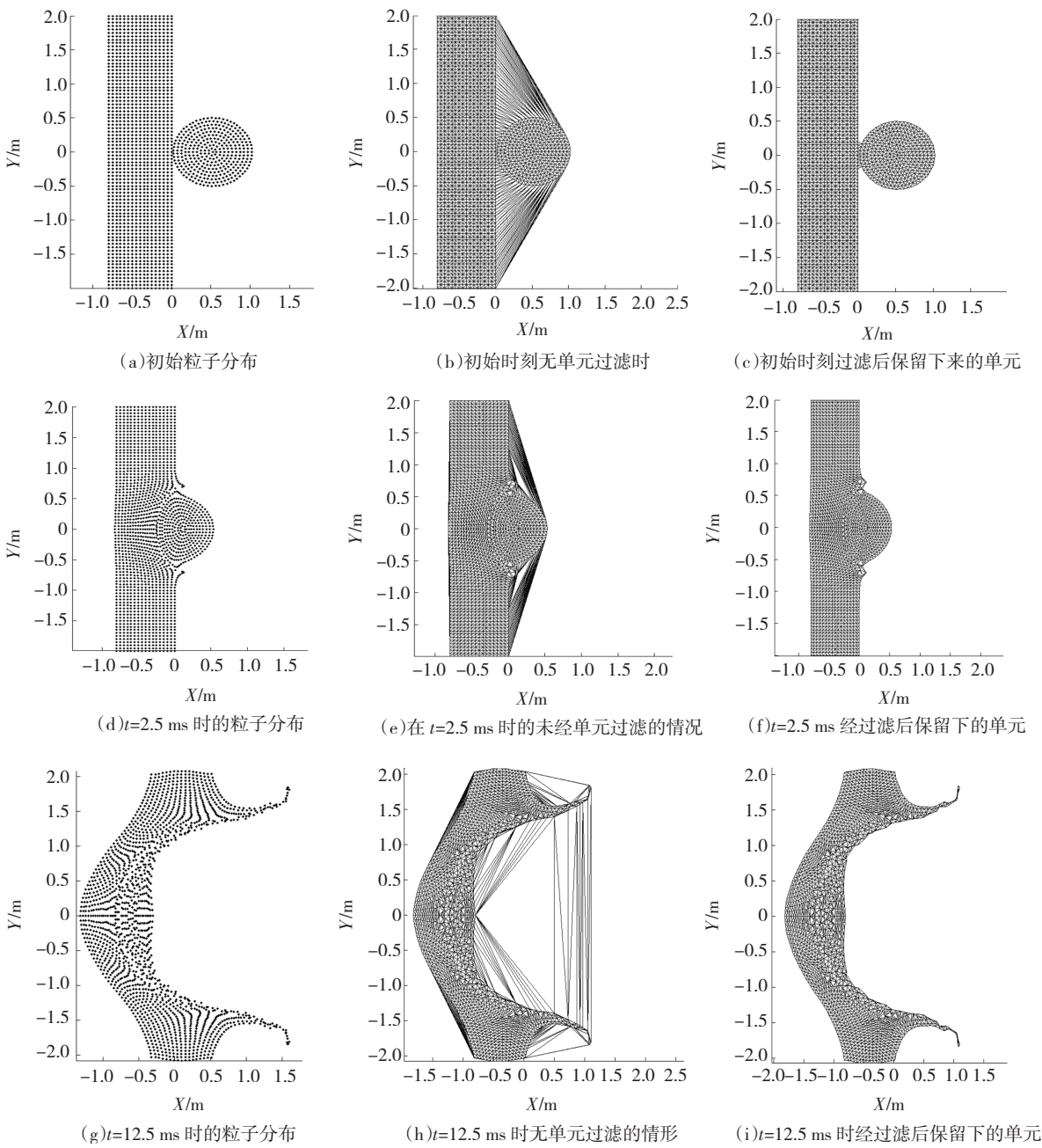


图6 不同时刻粒子分布及在其最小凸包上三角化形成的单元集和过滤后的情形, $\beta_s = 1.0\text{e} - 3$

4 结 论

本文提出一种“单元称重”算法,用于去除非凸区域上离散点(粒子)集的三角化后形成的空白单元.“单元称重”法只过滤非凸区域离散点集的三角

化后形成的空白单元,而对凸区域上离散点集三角化形成的单元没有影响,该方法简洁且对复杂的非凸区域适应性较强.利用“单元称重”法过滤后的单元集,结合 SPH 计算所得数据,并将数据文件写成有限元格式,导入到 Tecplot 中进行直接后处理,获得传统科学计算可视化所需的计算图形,为SPH算

法的后处理,提供了一种实用简洁的途径. 该方法的适用性和可行性在具有材料飞溅和粒子不均性的数值算例中得到了验证.

参考文献:

- [1] LIU G R, LIU M B. 光滑粒子流体动力学——一种无网格粒子法[M]. 韩旭,杨刚,强洪夫,译. 长沙:湖南大学出版社,2005:1-200.
- [2] OGER G, DORING M, ALESSANDRINI B, *et al.* Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 213(2): 803-822.
- [3] MASSIDDA L. ARMANDO, a SPH code for CERN-some theory, a short tutorial, the code description and some examples [R]. [S.l.];European Organization for Nuclear Research, 2008.
- [4] DANIEL P. Visualisation of SPH data using SPLASH-v1.9.1[EB/OL]. 2007-9-12. <http://www.astro.ex.ac.uk/people/dprice/splash/index.html>.
- [5] BIDDISCOMBE J, GRAHAM D, MARUZEWSKI P. Interactive visualization and exploration of SPH data [C]//Second International Workshop of Smoothed Particle Hydrodynamics European Research Interest Community. Madrid:[s.n.],2007.
- [6] 文建波,周进雄,张红艳,等. 基于 Delaunay 三角化的无网格法计算结果后处理 [J]. *应用力学学报*, 2003, 4(20): 600-601.
- [7] 田仲可. 基于面片句柄对象的无网格法可视化研究 [J]. *计算机工程与设计*, 2008, 29(13): 3513-3515.
- [8] 史宝军,袁明武,陈永强. 无网格方法数值结果的可视化方法与实现[J]. *工程力学*, 2004, 21(6): 51-55.
- [9] ZHOU J X, WEN J B, ZHANG H Y, *et al.* A nodal integration and post-processing technique based on Voronoi diagram for Galerkin meshless methods [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, 192: 3831-3843.
- [10] BECKER M, TESCHNER M. Weakly compressible SPH for free surface flows [C]//Eurographics ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation. San Diego:[s.n.], 2007: 63-72.
- [11] 柳有权,刘学慧,朱红斌,等. 基于物理的流体模拟动画综述 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2005, 17(12): 2581-2589.
- [12] KOUMOUTSAKOS P, COTTET G H, ROSSINELLI D. Flow simulations using particules bridging computer graphics and CFD [R]. <http://www.cse-lab.ethz.ch/teaching/classes/mulsup.html>.
- [13] ROSENTHAL P, ROSSWOG S, LINSEN L. Direct surface extraction from smoothed particle hydrodynamics simulation data [C]//Proceedings of the 4th High-End Visualization Workshop. Berlin: Lehmanns Media, 2007: 50-61.
- [14] KIM J, CHA D, CHANG B, *et al.* Practical animation of turbulent splashing water [C]//In Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Eurographics:[s.n.], 2006: 335-344.
- [15] 周培德. 计算几何—算法分析与设计[M]. 北京:清华大学出版社, 2000: 1-100.
- [16] TECPLOT. Tecplot 10 Release 6 on line help [EB/OL]. www.tecplot.Com/support.
- [17] FANG J, PARRIAUX A, RENTSCHLER M, *et al.* Improved SPH methods for simulating free surface flows of viscous fluids [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2009, 59(2): 251-271.

(编辑 张 宏)