2种最佳离散信号的构造方法

刘永山，王德臣，贾彦国，高世伟

（燕山大学 信息科学与工程学院，066004 秦皇岛，ysulys@sohu.com）

摘 要：为了构造更多的几乎最佳二进阵列偶和几乎最佳屏蔽二进阵列偶，扩大其应用范围，采用复合乘积法、二维周期乘积法以及折叠变换法，利用最佳二进阵列偶、几乎最佳二进阵列偶和几乎最佳屏蔽二进阵列偶等已知的最佳离散信号，可以构造出大量的几乎最佳二进阵列偶和几乎最佳屏蔽二进阵列偶等新的具有良好循环相关特性的最佳离散信号. 实验证明这2种最佳离散信号不受体积为$4t^2$的束缚，从而找到更多的最佳离散信号实例.

关键词：最佳二进阵列；几乎最佳二进阵列偶；几乎最佳屏蔽二进阵列偶

中图分类号：TN911.2 **文献标志码**：A **文章编号**：0367-6234(2011)03-0102-05

Two perfect methods of constructing discrete signals

LIU Yong-shan, WANG De-chen, JIA Yan-guo, GAO Shi-wei

(College of Information Science & Engineering, Yanshan University, 066004 Qinhuangdao, China, ysulys@sohu.com)

Abstract: To construct more almost perfect binary array pairs and almost perfect punctured binary array pairs, and to expand their scope of application, the complex product, two-dimensional cycle of product and folding transform method were adoped, and by using the known perfect discrete signal, large amounts of optimum signal of almost perfect binary array pairs and almost optimal shielding binary array with new and good characteristics related circulation could be constructed. The two kinds of optimum discrete signal gets rid of the limitation of volume $4t^2$, so that more examples of the optimum signal can be found.

Key words: the perfect binary array pairs; almost perfect binary array pairs; almost perfect punctured binary array pairs

目前研究最深入、最广泛的最佳离散信号准则为循环相关，最佳二进阵列[1-2]作为一种具有良好循环相关特性的最佳离散信号，已被广泛的应用到工程中，但是它的存在体积受到了很大的限制，只存在于$4t^2$中（t为整数），严重制约了其在工程中的应用范围. 为了突破这种束缚，人们提出了最佳二进阵列偶[3]、最佳三进阵列偶[4-5]、几乎最佳二进阵列偶[6-7]、最佳屏蔽二进阵列偶[8]等. 由于几乎最佳二进阵列偶、几乎最佳屏蔽阵列偶[9]是对最佳二进阵列的重要推广，且本身也同样具有良好的循环相关特性，因此本文采用了复合乘积法、折叠法和二维周期乘积法等构造方法. 这些方法不但可以构造出大量的几乎最佳二进阵列偶、几乎最佳屏蔽阵列偶，而且便于计算机的实现，对于扩大工程的选择范围是很有价值的.

收稿日期：2009-09-16.

基金项目：国家自然科学基金资助项目(60272026).

作者简介：刘永山(1963—)，男，教授，博士生导师.

1 相关定义

定义1 阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的循环自相关函数$R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_n)$定义为

$$R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\sum_{s_1=0}^{N_1-1}\sum_{s_2=0}^{N_2-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{N_n-1}x(s_1,s_2,\cdots,s_n)\cdot y(s_1+u_1,\cdots,s_n+u_n). \quad (1)$$

式中：$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$分别为2个$n$维$N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$阶矩阵，$s_i+u_i=(s_i+u_i)\bmod N_i, 1\leqslant i\leqslant n$.

定义2 若二进阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的自相关函数$R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_n)$满足

$$R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{cases}U\neq 0, & (u_1,u_2,\cdots,u_n)=(0,0,\cdots,0);\\ U^*\neq 0, & (u_1,u_2,\cdots,u_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n);\\ 0, & (u_1,u_2,\cdots,u_n)=(\text{其他}).\end{cases}\quad(2)$$

则称阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为几乎最佳二进阵列偶.

定义 3　若屏蔽二进阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的自相关函数 $R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 满足

$$R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{cases}F\neq 0, & (u_1,u_2,\cdots,u_n)=(0,0,\cdots,0);\\ F^*\neq 0, & (u_1,u_2,\cdots,u_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n);\\ 0, & (u_1,u_2,\cdots,u_n)=(\text{其他值}).\end{cases}\quad(3)$$

则称屏蔽阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为几乎最佳屏蔽二进阵列偶.

定义 4　若 m 维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m$ 阶阵列偶(X_1,Y_1)和 n 维 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$构成一个新的$(m+n)$维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m\times N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,其中:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=[x(s_1,s_2,\cdots,s_{m+n})]=\\&\quad[x_1(s_1,s_2,\cdots,s_m)x_2(s_{m+1},s_{m+2},\cdots,s_{m+n})],\\ \boldsymbol{Y}&=[y(s_1,s_2,\cdots,s_{m+n})]=\\&\quad[y_1(s_1,s_2,\cdots,s_m)y_2(s_{m+1},s_{m+2},\cdots,s_{m+n})].\end{aligned}\quad(4)$$

则称阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$和阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$的复合乘积阵列偶.

定义 5　设$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为二维 $M_1\times M_2$ 阶阵列偶,$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为二维 $N_1\times N_2$ 阶阵列偶,且 M_1,N_1 和 M_2,N_2 互为互素,若它们构成的一个新的二维 $M_1N_1\times M_2N_2$ 阶阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,其中 $x(s_1,s_2)=x_1(s_1,s_2)x_2(s_1,s_2)$, $y(s_1,s_2)=y_1(s_1,s_2)y_2(s_1,s_2)$, $0\leqslant s_1\leqslant M_1N_1-1$, $0\leqslant s_2\leqslant M_2N_2-1$,则称阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$和$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$的周期乘积阵列偶.

2　几乎最佳二进阵列偶的构造方法

定理 1　若 m 维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m$ 阶二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为最佳二进阵列偶,$n$ 维 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为几乎最佳二进阵列偶,则它们的复合乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为$(m+n)$维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m\times N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶几乎最佳二进阵列偶.

证明　复合乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的自相关函数为

$$\begin{aligned}&R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\sum_{s_1=0}^{M_1-1}\sum_{s_2=0}^{M_2-1}\cdots\sum_{s_{m+n}=0}^{N_n-1}x(s_1,s_2,\cdots,s_{m+n})\cdot\\&y(s_1+u_1,s_2+u_2,\cdots,s_{m+n}+u_{m+n})=\\&\sum_{s_1=0}^{M_1-1}\sum_{s_2=0}^{M_2-1}\cdots\sum_{s_{m+n}}^{N_n-1}x_1(s_1,s_2,\cdots,s_m)\cdot\\&x_2(s_{m+1},s_{m+2},\cdots,s_{m+n})y_1(s_1+u_1,s_2+u_2,\cdots,s_m+u_m)\cdot\\&y_2(s_{m+1}+u_{m+1},s_{m+2}+u_{m+2},\cdots,s_{m+n}+u_{m+n})=\\&[\sum_{s_1=0}^{M_1-1}\sum_{s_2=0}^{M_2-1}\cdots\sum_{s_m=0}^{M_m-1}x_1(s_1,s_2,\cdots,s_m)\cdot\\&y_1(s_1+u_1,s_2+u_2,\cdots,s_m+u_m)]\cdot\\&[\sum_{s_{m+1}=0}^{N_1-1}\sum_{s_{m+2}=0}^{N_2-1}\cdots\sum_{s_{m+n}=0}^{N_m-1}x_2(s_{m+1},s_{m+2},\cdots,s_{m+n})\cdot\\&y_2(s_{m+1}+u_{m+1},s_{m+2}+u_{m+2},\cdots,s_{m+n}+u_{m+n})]=\\&R_{X_1Y_1}(u_1,u_2,\cdots,u_m)R_{X_2Y_2}(u_{m+1},u_{m+2},\cdots,u_{m+n}).\end{aligned}\quad(5)$$

式中:$R_{X_1Y_1}$,$R_{X_2Y_2}$ 分别为最佳二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$和几乎最佳二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$的自相关函数,所以有

$$R_{XY}(u_1,u_2,\cdots,u_{m+n})=\begin{cases}UE, & (u_1,u_2,\cdots,u_{m+n})=(0,0,\cdots,0);\\ U^*E, & (u_1,u_2,\cdots,u_{m+n})=(0,\cdots,0,a_1,a_2,\cdots,a_m);\\ 0, & (u_1,u_2,\cdots,u_{m+n})=(\text{其他值}).\end{cases}\quad(6)$$

因此有 $UE\neq 0$, $U^*E\neq 0$,根据几乎最佳二进阵列偶的定义可知,复合乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为几乎最佳二进阵列偶.

证毕

推论 1　设 m 维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m$ 阶二进阵列 X_1 为最佳二进阵列,(X_2,Y_2)为 n 维 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶几乎最佳二进阵列偶,则它们的复合乘积列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为$(m+n)$维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m\times N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶几乎最佳二进阵列偶.

证明　X_1 为最佳二进阵列,则$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_1)$为最佳二进阵列偶,由定理 1 直接可得.

定理 2　设$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为二维 $M_1\times M_2$ 阶最佳二进阵列偶,$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为二维 $N_1\times N_2$ 阶几乎最佳二进阵列偶,且 M_1,N_1 互素,M_2,N_2 互素,则它们的周期乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为二维 $M_1N_1\times M_2N_2$ 阶几乎最佳二进阵列偶.

证明　周期乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的自相关函数为

$$R_{XY}(u_1,u_2)=\sum_{s_1=0}^{M_1N_1-1}\sum_{s_2=0}^{M_2N_2-1}x(s_1,s_2)\cdot y(s_1+u_1,s_2+u_2)=\sum_{s_1=0}^{M_1N_1-1}\sum_{s_2=0}^{M_2N_2-1}x_1(s_1,s_2)x_2(s_1,s_2)\cdot y_1(s_1+u_1,s_2+u_2)y_2(s_1+u_1,s_2+u_2).\quad(7)$$

由于 M_1,N_1 和 M_2,N_2 互为互素，所以式(7)可写为

$$R_{XY}(u_1,u_2)=\sum_{s_1=0}^{M_1-1}\sum_{s_2=0}^{M_2-1}x_1(s_1,s_2)y_1(s_1+u_1,s_2+u_2)\sum_{s_1=0}^{N_1-1}\sum_{s_2=0}^{N_2-1}x_2(s_1,s_2)y_2(s_1+u_1,s_2+u_2)=$$

$$R_{X_1Y_1}(u_1,u_2)R_{X_2Y_2}(u_1,u_2)=\begin{cases}EU, & (u_1,u_2)=(0,0);\\ EU^*, & (u_1,u_2)=(M_1a_1,M_2a_2);\\ 0, & (u_1,u_2)=(\text{其他值}).\end{cases}\quad(8)$$

因为 $E\neq0,U\neq0,U^*\neq0$ 所以有 $UE\neq0$, $U^*E\neq0$，根据几乎最佳二进阵列偶的定义可知，周期乘积阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 为几乎最佳二进阵列偶. 证毕.

推论 2　设 $\boldsymbol{X}_1$ 为二维 $M_1\times M_2$ 阶最佳二进阵列，$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$ 为二维 $N_1\times N_2$ 阶几乎最佳二进阵列偶，且 M_1,N_1 互素，M_2,N_2 互素，则它们的周期乘积阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 为二维 $M_1N_1\times M_2N_2$ 阶几乎最佳二进阵列偶.

证明　$\boldsymbol{X}_1$ 为最佳二进阵列，则 $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_1)$ 为最佳二进阵列偶，由定理 2 可证得.

定理 3　设序列偶 (s,s^*) 为几乎最佳二进序列偶，长度为 N_1N_2，N_1,N_2 互素，经折叠变换可得二维 $N_1\times N_2$ 阶几乎最佳二进阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，其中 $x(i,j)=s(k),y(i,j)=s^*(k),i=k\bmod N_1$, $j=k\bmod N_2,0\leqslant k\leqslant N_1N_2-1,i=k\bmod N_1$, $j=k\bmod N_2$；相反，二维 $N_1\times N_2$ 阶几乎最佳二进阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，$N_1,N_2$ 互素，经折叠变换可得几乎最佳二进序列偶 (s,s^*)，其中 $s(k)=x([k]_{N_1},[k]_{N_2})$, $s^*(k)=y([k]_{N_1},[k]_{N_2})$.

证明　序列偶 (s,s^*) 的自相关函数为

$$R_{ss^*}(u)=\sum_{k=0}^{N_1N_2-1}s(k)s^*(k+u)=\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}s(i+jN_1)s^*(i+jN_1+u)=$$
$$\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}x([i+jN_1]_{N_1},[i+jN_1]_{N_2})\cdot y([i+jN_1+u]_{N_1},[i+jN_1+u]_{N_2})=$$
$$\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}x(i,[i+jN_1]_{N_2})\cdot y(i+u,[i+jN_1+u]_{N_2}).\quad(9)$$

由于 N_1,N_2 互素，$[i+jN_1]_{N_2}=(i+jN_1)\bmod N_2$，可知 $[i+jN_1]_{N_2}$ 与 $i+j$ 之间存在一一对应的关系，则式(9)可写为

$$R_{ss^*}(u)=\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}x(i,i+j)y(i+u,i+j+u)=\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}x(i,j)y(i+u,j+u)=R_{XY}([u]_{N_1},[u]_{N_2}).$$

可得几乎最佳二进阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 经折叠变换得到的序列偶 (s,s^*) 为几乎最佳二进序列偶，几乎最佳二进序列偶 (s,s^*) 经折叠变换得到的阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 为几乎最佳二进阵列偶. 证毕.

例 1　几乎最佳二进序列偶 (s,s^*) 与几乎最佳二进阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 可以相互折叠构造为

$$s=[+\ -\ +\ -\ -\ -],$$
$$s^*=[+\ -\ +\ +\ -\ -],$$
$$X=\begin{bmatrix}+&-&+\\-&-&-\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}+&-&+\\+&-&-\end{bmatrix}.$$

3　几乎最佳屏蔽二进阵列偶的构造方法

定理 4　若 m 维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m$ 阶二进阵列偶 $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$ 为最佳阵列偶，n 维 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶二进阵列偶 $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$ 为几乎最佳屏蔽二进阵列偶，则它们的复合乘积阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 为 $(m+n)$ 维 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_m\times N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，其能量效率为 $\eta=\eta_2$，其中 η_2 为几乎最佳屏蔽二进阵列偶 $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$ 的能量效率.

证明　由定理 1 和几乎最佳屏蔽二进阵列偶的定义可得复合乘积阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 为几乎最佳屏蔽二进阵列偶. 设 $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$ 的屏蔽位数为 p 则由定义 3 可知复合阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的屏蔽位数为 $M_1M_2\cdots M_mp$，则复合乘积阵列偶 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的能量效率为

$$\eta=\frac{M_1M_2\cdots M_mN_1\cdots N_n-M_1M_2\cdots M_mp}{M_1M_2\cdots M_mN_1\cdots N_n}=\frac{N_1N_2\cdots N_n-p}{N_1N_2\cdots N_n}=\eta_2.\quad(10)$$

证毕.

推论 3　设 m 维 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m$ 阶二进阵列 $\boldsymbol{X}_1$ 为最佳二进阵列，阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为 n 维 $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，则它们的复合乘积$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为$(m+n)$维 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m \times N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶.

证明　$\boldsymbol{X}_1$ 为最佳二进阵列，则$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_1)$为最佳二进阵列偶，根据定理 4 则直接可证.

定理 5　若 m 维 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m$ 阶二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为最佳屏蔽二进阵列偶，$n$ 维 $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ 阶二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为几乎最佳屏蔽二进阵列偶，则它们的复合乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为$(m+n)$维 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m \times N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，其能量效率为 $\eta = \eta_1\eta_2$.

证明　由定理 1 和几乎最佳屏蔽二进阵列偶的定义可得$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为几乎最佳屏蔽二进阵列偶. 设屏蔽阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$的屏蔽位数为 p_1，$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$的屏蔽位数为 p_2，根据定义 3 可得复合阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的屏蔽位数为 $p = p_1V_2 + p_2V_1 - p_1p_2$，其中 V_1, V_2 分别为阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$和阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$的体积，则几乎最佳屏蔽二进阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的能量效率为

$$\eta = \frac{V-p}{V} = \frac{V_1V_2 - (p_1V_2 + p_2V_1 - p_1p_2)}{V_1V_2} = \frac{(V_1 - p_1)(V_2 - p_2)}{V_1V_2} = \eta_1\eta_2. \tag{11}$$

证毕.

定理 6　若 m 维 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m$ 阶二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为几乎最佳二进阵列偶，$n$ 维 $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ 阶二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为最佳屏蔽二进阵列偶，则它们的复合乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为$(m+n)$维 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m \times N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，其能量效率为 $\eta = \eta_2$.

证明　其证明与定理 1 的证明类似.

定理 7　设$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为二维 $M_1 \times M_2$ 阶最佳二进阵列偶，$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为二维 $N_1 \times N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，且 M_1, N_1 互素，M_2, N_2 互素，则它们的周期乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为二维 $M_1N_1 \times M_2N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，其能量效率 $\eta = \eta_2$.

证明　其证明与定理 2 的证明类似.

推论 4　设 $\boldsymbol{X}_1$ 为二维 $M_1 \times M_2$ 阶最佳二进阵列，$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为二维 $N_1 \times N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，且 M_1, N_1 互素，M_2, N_2 互素，则它们的周期乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为二维 $M_1N_1 \times M_2N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，其能量效率 $\eta = \eta_2$.

证明　$\boldsymbol{X}_1$ 为最佳二进阵列，则$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_1)$为最佳二进阵列偶，根据定理 7 可证.

例 2　二进阵列偶$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为最佳二进阵列偶，$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为几乎最佳屏蔽二阵列偶，其中：

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{Y}_1 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & + & - \\ - & + & + \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ - & + & - \\ 0 & + & + \end{bmatrix}.$$

则它们的复合乘积阵列偶(X_3,Y_3)与周期乘积阵列偶(X_4,Y_4)均为几乎最佳屏蔽二进阵列偶.

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & + & - \\ - & + & + \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & + & - \\ - & + & + \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & + & - \\ - & + & + \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ + & - & - \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ - & + & - \\ 0 & + & + \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & + & - \\ 0 & + & + \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ - & + & - \\ 0 & + & + \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & + \\ + & - & + \\ 0 & - & - \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_4 = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & + & + & + \\ - & + & + & - & + & + \\ - & + & - & + & - & + \\ - & + & - & - & + & - \\ - & - & + & + & + & - \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & 0 & 0 & - \\ - & - & - & + & + & + \\ 0 & + & + & 0 & + & + \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & + \\ - & + & - & - & + & - \\ 0 & - & + & 0 & + & - \end{bmatrix}.$$

定理 8　设$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1)$为二维 $M_1 \times M_2$ 阶最佳屏蔽二进阵列偶，$(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)$为二维 $N_1 \times N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，且 M_1, N_1 互素，M_2, N_2 互素，则它们的周期乘积阵列偶$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为二维 $M_1N_1 \times M_2N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶，其能量效率 $\eta = \eta_1\eta_2$.

证明　其证明与定理 2 的类似，能量效率的证明与定理 4 的类似.

定理 9　设($\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{Y}_1$)为二维 $M_1 \times M_2$ 阶几乎最佳二进阵列偶,($\boldsymbol{X}_2$,$\boldsymbol{Y}_2$)为二维 $N_1 \times N_2$ 阶最佳屏蔽二进阵列偶,且 M_1,N_1 互素,M_2,N_2 互素,则它们的周期乘积阵列偶($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$)为二维 $M_1N_1 \times M_2N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶,其能量效率 $\eta = \eta_2$.

证明　其证明与定理 2 类似,能量效率的证明与定理 5 的类似.

例 3　二进阵列偶($\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{Y}_1$)为几乎最佳屏蔽二进阵列偶,($\boldsymbol{X}_2$,$\boldsymbol{Y}_2$)为最佳屏蔽二阵列偶,其中:$\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} - & + \\ + & + \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Y}_1 = \begin{bmatrix} - & 0 \\ + & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & - \\ - & - & + \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Y}_2 = \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix}$,则它们的复合乘积阵列偶($\boldsymbol{X}_3$,$\boldsymbol{Y}_3$)与周期乘积阵列偶($\boldsymbol{X}_4$,$\boldsymbol{Y}_4$)均为几乎最佳屏蔽二进阵列偶.

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & + & + \\ + & + & - \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & - \\ - & - & + \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & - \\ - & + & + \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & - \\ - & - & + \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} - & 0 & - \\ - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_4 = \begin{bmatrix} - & + & - & + & - & + \\ + & - & - & + & - & - \\ + & - & - & - & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ - & - & + & + & + & - \\ - & - & + & - & - & + \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_4 = \begin{bmatrix} - & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 10　设序列偶(s,s^*)为几乎最佳屏蔽二进序列偶,长度为 N_1N_2,N_1,N_2 互素,经折叠变换可得二维 $N_1 \times N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$);相反,二维 $N_1 \times N_2$ 阶几乎最佳屏蔽二进阵列偶($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$),N_1,N_2 互素,经折叠变换可得几乎最佳屏蔽二进序列偶(s,s^*).

证明　其证明与定理 3 的证明类似.

4　结　论

1)复合乘积法可以构造出高体积高维的最佳离散信号;周期乘积法可以构造出高阶高体积的最佳离散信号;折叠法可以构造出同体积高维或低维的最佳离散信号.

2)利用 3 种构造方法可以构造出大量的几乎最佳二进阵列偶、几乎最佳屏蔽二进阵列偶,不但保证了其良好循环相关特性,还使其体积不受 $4t^2$ 的束缚,为工程的应用提供更广泛的选择范围.

参考文献:

[1] CALABRO D, WOLF J K. On the synthesis of two-dimensional arrays with desirable correlation properties [J]. IEEE Information And Control, 1968(11): 537 - 560.

[2] ZHANG Xiyong, GUO Hua, HAN Wenbao. Nonexistence of a kind of generalized perfect binary array[C]//Proceedings 4th International Conference on Sequences and Their Applications. Beijing, China: SETA, 2006: 304 - 312.

[3] 赵晓群,何文才,王仲文,等. 最佳二进阵列偶理论研究[J]. 电子学报, 1999, 27(1): 34 - 37.

[4] ANTWEILER M M, BOMER L, LUKE H D. Perfect ternary arrays[J]. IEEE Trans Information Theory, 1990, 36(3): 696 - 705.

[5] 贾彦国, 郭继山, 崔莉, 等. 最佳三进阵列偶构造方法[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(4): 814 - 816.

[6] 蒋挺, 毛飞, 赵成林, 等. 几乎最佳二进阵列偶理论研究[J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1817 - 1820.

[7] ZHANG Li, LIU Yaju, LI Dongming. The spectrum characters of almost perfect binary array pair[C]//Proceddings 8th International Conference on Electronic Measurement and Instruments. Xi'an, China: ICEMI, 2007: 4687 - 4691.

[8] JIANG Ting, ZHAO Chenglin, ZHUO Zheng. Perfect punctured binary array pairs[C]//Proceedings IEEE International Symposium on Communications and Information Technologies. Sapporo, Japan: ISCIT, 2004: 987 - 990.

[9] 毛飞, 吴宇, 周正. 新型最佳周期循环相关阵列信号理论研究[J]. 吉林大学学报, 2008, 20(6): 558 - 565.

(**编辑**　张　红)