

频域法在分数阶混沌系统计算中的局限性分析

王 茂, 孙光辉, 魏延岭

(哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 150080 哈尔滨, guanghuisun@hit.edu.cn)

摘 要: 基于分数阶积分算子在频域内的响应, 分析了频域近似法在分数阶混沌系统计算中的局限性. 频域近似法只能在期望的频带范围内实现与实际系统的近似, 而在高频与低频段都存在着较大的误差. 因此, 当其应用到分数阶混沌系统计算时存在着很大的局限性, 甚至得到与预估-校正算法完全不同的结论. 通过对分数阶 Chen 系统的仿真, 验证了该结论的正确性.

关键词: 频域近似法; 预估-校正算法; 分数阶系统; 混沌系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2011)05-0008-05

Limitations of frequency domain approximation in the calculation of fractional order chaotic systems

WANG Mao, SUN Guang-hui, WEI Yan-ling

(Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China, guanghuisun@hit.edu.cn)

Abstract: Based on the frequency response of the fractional integral operator, this work analyses the limitations of frequency domain approximation algorithm in the calculation of fractional order chaotic systems. The frequency domain approximation algorithm can approach to the original system in desired frequency band, but in the low and high frequency band there are large errors. Therefore, there are some limitations in the calculation of fractional chaotic system. Comparing with the predictor-corrector algorithm, totally different conclusions can be got by the frequency domain approximation algorithm. Taking the fractional Chen system as an example, numerical simulation results verify the effectiveness of our results.

Key words: frequency domain approximation; predictor-corrector algorithm; fractional-order system; chaotic system

分数阶微分方程作为整数阶微分方程的推广, 虽然已有 300 多年的历史, 但由于缺乏实际的应用背景, 一直处于纯粹理论研究阶段. 近几十年来, 随着分数阶计算技术的发展, 其在应用数学、医疗、材料、信息科学等很多学科得到了广泛的发展^[1-2]. 此外, 混沌作为非线性科学研究的热点之一, 近年来得到了快速的发展^[3-4]. 将分数阶系统和混沌相结合, 能进一步提高混沌系统的保密性能, 增加破译难度. 为此, 人们相继提出了各种各样的分数阶混沌系统^[5-6]及相关的控制和同步方

法^[7-8].

在分数阶计算方面目前主要有 2 种方法, 一种是基于时域的预估-校正算法^[9-11], 另一种是基于频域的近似方法. 而频域近似方法又可以分为 2 类, 一类是基于连分式展开和插值(continued fraction expansions and interpolation techniques)的近似方法, 以 Carlson^[12]和 Matsuda^[13]算法为代表; 而另一类是基于曲线拟合及辨识技术(curve fitting or identification techniques)的近似方法, 以 Oustaloup^[14]和 Chareff^[15]算法为代表. 然而无论何种方法, 都是在期望频带范围内的一种近似处理, 而这种近似在一定程度上都会影响对分数阶系统的分析与计算, 当频域近似法应用到分数阶

收稿日期: 2010-04-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60804002).

作者简介: 王 茂(1964—), 男, 教授, 博士生导师.

混沌系统计算时,甚至无法判断系统是否存在混沌^[16].

文献[16]认为有限的直流增益使得频域近似方法改变了系统原有的平衡点及其稳定性,并使得其在仿真时存在局限性. 本文受其启发,通过分析频域近似法积分算子的 bode 图,发现虽然在期望频带范围内,频域法能很好的逼近真实的频率响应,但是无论在低频还是高频段都存在着较大的误差. 正是由于这个误差导致了频域法在计算时存在一定的局限性,而并非仅仅由文献[16]所述的有限直流增益导致了该局限性. 当应用频域近似法判断系统是否存在着混沌吸引子,以及控制混沌系统时,该局限性导致所得到的结果与真实情况存在着较大差异.

1 分数阶微积分

1.1 分数阶微积分的定义

目前为止,分数阶微积分定义有多种不同的方式,如 Grünwald-Letnikov 定义, Riemann-Liouville 定义(R-L 定义), Caputo 定义, Sequential 定义, Nishimoto 定义等,在研究过程中采用最多的是 Riemann-Liouville 定义,因此它的理论也被研究得相对深入和广泛. R-L 微分定义为^[17]

$${}_a D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau.$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, $n-1 < r < n$. 虽然 R-L 定义可以简化分数阶导数的计算,但是必须指定未知解在初始值处分数阶导数的值,考虑到实际物理系统中分数阶导数的意义不是很明确,引入 Caputo 导数. 首先定义 α 阶 R-L 积分算子 J^α , 如下所示:

$$J^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} y(\tau) d\tau, \alpha > 0.$$

则 α 阶 Caputo 微分算子 D_t^α 定义为

$$D_t^\alpha y(t) = J^{m-\alpha} y^{(m)}(t), \alpha > 0.$$

其中 $m = [\alpha]$ 为 α 的整数部分. 为了简化计算,文中假设 α 均满足 $0 < \alpha < 1$.

1.2 分数阶微积分的计算

目前,分数阶微分方程的计算主要有 2 种方法. 一种是基于时频域转换的算法,另一种是数值的预估-校正算法.

时频域转换主要采用整数阶拟合分数阶的方式,利用求解整数阶的方法来计算. 工程上一般是在感兴趣的频段内通过求解频域的 S^α , 得到频域的展开形式,再将频域形式转化为时域的整数阶状态方程^[15]. 以 Chareff 方法为例,在 laplace 域

内,当传递函数为 $H(s) = 1/s^\alpha$ 时,在 bode 图上就是 1 条以 -20α dB/decade 为斜率的曲线. 如图 1 所示,其中系统阶次 $\alpha = 0.5$,实线为真实的频率响应,其它的 2 条曲线分别为误差为 1 dB 和 3 dB 的近似频率响应曲线. 依据 Chareff 方法^[15],通过确定曲线拟和的最大误差 y dB, 转折频率 P_T 、以及频带范围 $\omega = [\omega_{\min} \ \omega_{\max}]$, 就可以得到传递函数的近似形式为

$$H(s) = \frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + s/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1 + s/p_i)}.$$

其中 $N = 1 + [\log(\omega_{\max}/p_0)/\log(ab)]$. 例如当 $y = 2$ dB, $P_T = 1$, $\omega = [0.01 \ 100]$, $\alpha = 0.9$ 时

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{0.242 \ 6 \ s^2 + 52.575 \ 6 \ s + 67.499 \ 3}{0.1 \ s^3 + 36.154 \ 9 \ s^2 + 77.893 \ 3 \ s + 1}.$$

文献[17]给出了一系列近似的表.

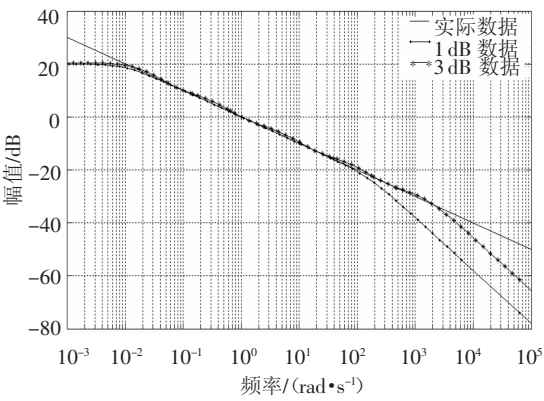


图 1 分数阶积分 $1/s^{0.5}$ 的频域响应

预估-校正算法中常采用的是基于 Adams-Bashforth-Moulto 预估-校正方法^[9-11],其计算方法表述如下.

考虑微分方程

$$D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), 0 \leq t \leq T.$$

其初值为 $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1$, 与其等价的 Volterra 积分方程为

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

令 $h = T/N, t_n = nh, n = 0, 1, \dots, N \in \mathbf{Z}^+$, 首先进行 Adams-Bashforth 预估可得如下的预估公式:

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)).$$

其中 $b_{j,n+1} = h^\alpha ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha)/\alpha$, 然后再进行 Adams-Moulton 校正

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \cdot$$

$$f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)).$$

其中:

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0; \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n; \\ 1, & j=n+1. \end{cases}$$

1.3 分数阶系统的稳定性

考虑具有以下形式的线性分数阶系统:

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

其中 $\alpha_i \in (0, 1]$. 假定 M 是 α_i 分母的最小公倍数, 其中 $\alpha_i = v_i/u_i$, $(u_i, v_i) = 1$, $u_i, v_i \in \mathbf{Z}^+$, 定义矩阵

$$\Delta(\lambda) \triangleq \begin{pmatrix} \lambda^{M\alpha_1} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda^{M\alpha_2} - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda^{M\alpha_n} - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

由文献[16]可知, 如果 $\Delta(\lambda)$ 的所有特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)| \geq \pi/2M$, 则系统是渐进稳定的.

而针对非线性形式的分数阶系统

$$D^q X = f(X).$$

若系统矩阵 $A = (\partial f / \partial X) |_{X=X_w}$ 的所有特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)| > q\pi/2$, 则系统是渐进稳定的, 其中 X_w 为计算 $f(X) = 0$ 得到的系统的平衡点.

2 频域近似方法的局限性分析

从频域近似方法中积分算子的频域 bode 图分析入手, 分析了频域近似方法的局限性.

考虑具有以下形式的分数阶混沌系统:

$$D_t^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

其中 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x})]^T$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, 将算子 $1/s^\alpha$ 用频域方法近似为

$$\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{b_p s^p + \cdots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0}.$$

则式(1)就可以表示为

$$a_m \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{x} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} \mathbf{x} + a_0 \mathbf{x} = b_p \frac{d^p}{dt^p} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \cdots +$$

$$b_1 \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + b_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

通过计算可知式(2)的平衡点满足方程

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\mathbf{x}.$$

其中 $\mathbf{g} = a_0/b_0$ 被称之为直流增益^[16]. 由于 $\mathbf{g}$ 是有限的, 系统(1)的平衡点将由 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ 转变为 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\mathbf{x}$, 相对应的平衡点的稳定性也发生了改变^[16]. 本文在此基础上, 从积分算子的频率响应入手, 由图 1 可知, 有限的直流增益 $\mathbf{g}$ 使得频域近似方法所得到的频率响应在低频段与真实响应存在着较大的误差.

相对应图 1 的高频段, 由于 $s^p \gg s^{p-1}$, 所以 $1/s^\alpha$ 的频域表达式又可以表示为

$$\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{b_p s^p + \cdots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0} \approx \frac{b_p s^p}{a_m s^m} \approx \frac{b_p}{a_m s^{m-p}}.$$

由于一般的频域近似方法满足 $m \in \mathbf{N}, p \in \mathbf{N}$ 且 $m-p \geq 1$, 所以, 在高频段频域, 近似方法所得到的近似频率响应与真实响应同样存在着较大的误差.

此外, 从 bode 图中关于 -20α dB/decade 为斜率的曲线描述可以发现, 随着系统阶次 α 从 1 到 0 逐渐减小, 系统的低频误差将逐渐减小, 而高频误差则逐渐增大. 也就是说在系统阶次较接近 1 时, 主要是低频段的近似引起的误差占据主导地位, 而随着系统阶次越来越接近 0, 高频的误差将越来越明显.

至此有以下结论: 在一定的误差范围内, 以及适当频带范围 $\omega = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, 频域近似方法都能很好的逼近真实的频率响应. 但是在频带范围之外, 无论是低频还是高频, 频域近似方法都存在较大的误差. 正是由于这个误差的存在, 使得频域近似方法在分数阶系统计算中存在着一定局限性, 限制了频域法在混沌系统控制中的应用.

3 仿真实例

采用与文献[16]相同的分数阶 Chen 系统为例, 来验证本文关于频域法局限性的分析. 同时说明并非仅仅由于文献[16]所述的有限直流增益导致了该局限性的产生. 分数阶 Chen 系统可以表示为

$$\frac{d^q x}{dt^q} = a(y - x),$$

$$\frac{d^q y}{dt^q} = (c - a)x + cy - xz,$$

$$\frac{d^q z}{dt^q} = xy - bz.$$

其中 a, b, c 为常值参数. 对于不同的 a, b, c 参数,

文献[18]已经通过数值算法证明:在系统阶次为0.3时,Chen系统仍然能够呈现出混沌运动.当选择系统参数 $(a,b,c)=(40,3,28)$,系统阶次 $q=0.9$ 时,Chen系统能够表现出类似Lorenz系统的混沌吸引子,如图2所示.其中,仿真采用的是预估-校正算法.

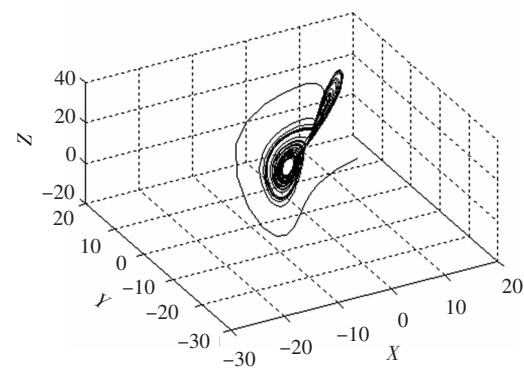


图2 分数阶Chen系统的混沌吸引子

根据1.3节关于分数阶系统的稳定性理论,当参数 a,b,c 取以上参数时,系统能够呈现出混沌系统的最低阶次为0.88^[16].换句话说,当系统阶次低于0.88时,指数为2的鞍点将会渐进的趋于稳定.系统将会稳定于该鞍点.图3描述了当系统阶次为0.8时,采用预估-校正算法得到的状态响应.

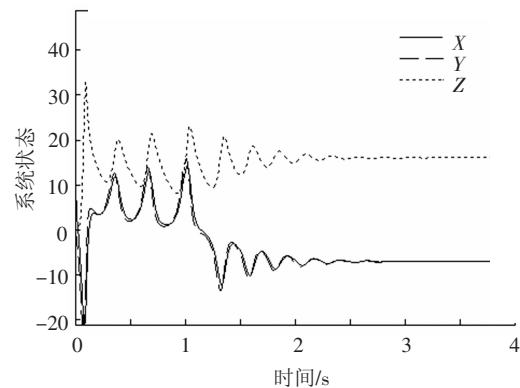


图3 Chen系统的状态响应(预估-校正算法)

作为对比,采用频域近似的Chareff方法所得到的仿真如图4所示.从图4可知,对于相同的初始条件及系统阶次 $q=0.8$,Chareff方法虽然相比预估-校正算法收敛速度较慢,但是最终还是能够得到与预估校正算法相同的结论,即当系统阶次小于0.88时趋于稳定.

此外,为验证上节关于频域法的局限性,仿照文献[16],当系统阶次 $q=0.3$ 时,取Chareff方法的参数 $\gamma=2\text{ dB}$, $P_T=0.01$, $\omega=[0.01\ 100]$,可得到如下近似公式:

$$(1/s^{0.3}) \approx (2.5143s^4 + 84.7114s^3 + 286.147s^2 + 105.4824s + 3.8986)/(0.0645s^5 + 10.0869s^4 + 158.347s^3 + 273.9713s^2 +$$

$$52.245s + 1).$$

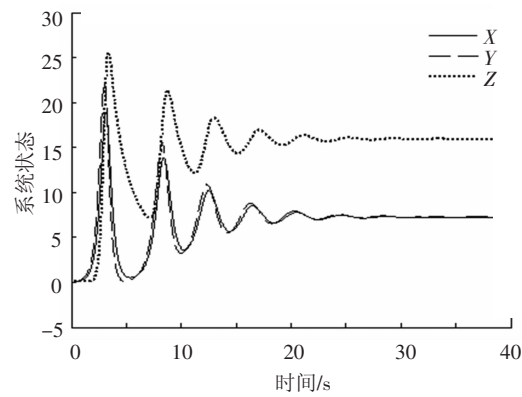


图4 Chen系统的状态响应(Chareff算法)

由此可以得到系统前0.3s的状态响应如图5所示.从图5可以看出系统呈现出类似整数阶Chen系统的混沌行为.

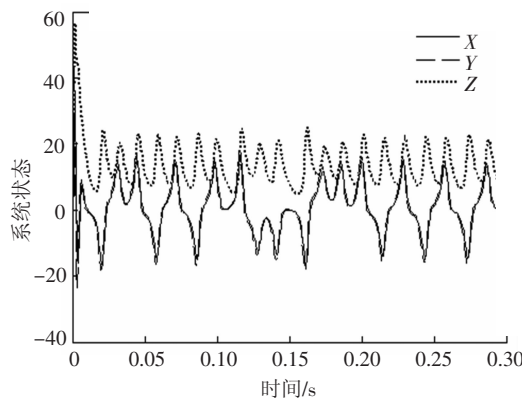


图5 系统阶次为0.3时Chen系统的状态响应(Chareff法仿真结果)

上述的仿真结果吻合了文献[16]的结论,但是由上节关于频域法的局限性分析可知:频域法在判断系统是否有因混沌现象而存在的不足,不仅仅是由于有限直流增益引起的,高频段存在的误差也同样起着重要的作用.而且随着系统阶次越来越接近0,高频段的误差越来越占据主要地位.为了验证上述结论,保持相同的直流增益,而取较大的上限频率来近似微分算子 $1/s^{0.3}$,即取Chareff方法中的 $\omega=[0.01\ 1\ 000]$,其它保持不变,可以得到以下的近似公式:

$$(1/s^{0.3}) \approx (0.009373s^5 + 2.83s^4 + 85.777s^3 + 286.537s^2 + 105.4957s + 3.899)/(0.000052s^6 + 0.073s^5 + 10.21s^4 + 158.56s^3 + 274.01s^2 + 52.25s + 1).$$

得到系统前4s的状态响应如图6所示.从图6可以看出,在不改变Chareff方法的直流增益基础之上,仅仅加大感兴趣频段的上限截止频率,以减少高频段的误差,同样可以得到如同预估-校正算法相同的结论.这就很好的验证了上节关

于频域近似方法的局限性分析,从而扩展了文献[16]的结论,为进一步加强分数阶系统在工程中的应用打下了良好的基础。

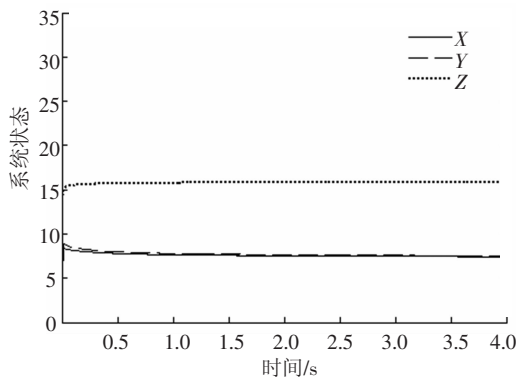


图 6 Chen 系统的状态响应(Chareff 法中
 $\omega = [0.01, 1\ 000]$)

4 结 论

本文从分数阶系统积分算子的 bode 图出发,分析了频域近似法的局限性.通过分析发现,频域近似法在给定的误差范围内、在期望的频带范围内可以满足近似计算的要求,但是在低频和高频段都存在着较大的误差,且该误差不会随系统阶次的变化而变小,而是随着系统阶次的减小,低频段的误差减小,而高频的误差增大.恰恰是由于该误差的存在,使得频域近似法在分数阶混沌系统的计算和仿真中存在一定的局限性,而并非仅仅由于文献[16]所述的有限直流增益,导致频域法在判断系统是否存在混沌现象中存在着不足.最后通过对分数阶混沌 Chen 系统的仿真说明了该结论的正确性。

参考文献:

- [1] HUNGENAHALLY S. Fractional discriminant functions; emulation of real-index-order receptive fields for vision systems[C]//Systems, Man and Cybernetics: IEEE International Conference on Intelligent Systems for 21st Century. Piscataway: IEEE, 1995: 22–25.
- [2] OUSTALOU A. Fractional order sinusoidal oscillators: Optimization and their use in highly linear FM modulation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1981, 28(10): 1007–1009.
- [3] 申立群, 王茂. 一类不确定参数混沌系统的鲁棒跟踪控制[J]. 电机与控制学报, 2007, 11(4): 380–383.
- [4] 陈红. 多涡卷混沌吸引子同步的双控制器[J]. 电机与控制学报, 2008, 12(2): 190–194.
- [5] LI Chunguang, CHEN Guanrong. Chaos in the fractional order Chen system and its control [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22(3): 549–554.
- [6] GRIGORENKOL I, GRIGORENKO E. Chaotic dynamics of the fractional lorenz system [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91(3): 034101.
- [7] 张成芬, 高金峰, 徐磊. 分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统中的混沌现象及二者的异结构同步[J]. 物理学报, 2007, 56(9): 5124–5130.
- [8] 邵仕泉, 高心, 刘兴文. 两个耦合的分数阶 Chen 系统的混沌投影同步控制[J]. 物理学报, 2007, 56(12): 6815–6819.
- [9] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/2/3/4): 3–22.
- [10] DIETHELM K, FORD N J. Analysis of fractional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2002, 265(2): 220–248.
- [11] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. Detailed error analysis for a fractional adams method [J]. Numerical Algorithms, 2004, 36(1): 31–52.
- [12] CARLSON G E, HALIJAK C A. Approximation of fractional capacitors $1/s^n$ by regular Newton process [J]. IEEE Transactions on Circuit Theory, 1964, 11(2): 210–213.
- [13] MATSUDA K, FUJII H. $H(\infty)$ optimized wave-absorbing control analytical and experimental results [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1993, 16(6): 1146–1153.
- [14] OUSTALOU A, LEVRON F, MATHIEU B, et al. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I: fundamental Theory and Applications, 2000, 47(1): 25–39.
- [15] CHAREFF A, SUN H H, TSAO Y Y, et al. Fractal system as represented by singularity function [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(9): 1465–1470.
- [16] TAVAZOEI M S, HAERI M. Limitations of frequency domain approximation for detecting chaos in fractional order systems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69(4): 1299–1320.
- [17] AHMAD W M, SPROTT J C. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 16(2): 339–351.
- [18] LU J G, CHEN G. A note on the fractional order Chen system [J]. Chaos Solitons Fractals, 2006, 27(3): 685–688.

(编辑 张 宏)