

地月三体问题下 L1 - 地球低能转移轨道设计

张汉清, 李言俊

(西北工业大学 航天学院, 710072 西安, hanqing. leben@ gmail. com)

摘 要: 针对地月拉格朗日 L1 点流形无法到达地球附近的问题, 介绍了基于扰动流形的 L1 - 地球转移轨道设计方法, 首先构造了扰动流形的参数化形式, 通过搜索四维参数空间, 给出了多种经过数值优化的转移轨道, 在总结数值仿真结果的基础上提出采用轨道角动量定性分析轨道转移机理的方法, 明确了 L1 - 地球转移轨道的设计应以降低轨道角动量为目标, 克服了以往优化方法搜索的盲目性, 揭示了转移轨道所依据的动力学特征, 最后给出了基于轨道转移机理设计的低能转移轨道, 证明了该方法的有效性.

关键词: 圆型限制性三体问题; 拉格朗日点; 转移轨道; 扰动流形

中图分类号: V412

文献标志码: A

文章编号: 0367 - 6234(2011)05 - 0084 - 05

Design of L1-Earth low energy transfer trajectory in earth-moon three-body problem

ZHANG Han-qing, LI Yan-jun

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi'an, China, hanqing. leben@ gmail. com)

Abstract: To deal with the problem that the stable/unstable manifolds of Earth-Moon Lagrange L1 point can not come close to earth, this paper first introduces the trajectory design method based on disturbance manifolds. The parameterized form of disturbance manifolds is constructed, and by searching through four dimensional parameter space, many numerically optimized transfer trajectories are obtained. Then based on the simulation data, a technique of using angular momentum to explain the transfer mechanism is proposed, which suggests that the design of L1-Earth transfer trajectory should aim at reducing angular momentum, and reveals the dynamics behind the transfer trajectories. Finally, an optimized L1-Earth low energy transfer trajectory is presented, that verifies the efficiency of this method.

Key words: circular restricted three-body problem; lagrange point; transfer trajectory; disturbance manifolds

地月系拉格朗日 L1 点位于地球和月球之间, 是圆形限制性三体问题(CR3BP)模型下距地球最近的动平衡点^[1], 该点附近的周期轨道不受大气阻力影响, 没有空间碎片、原子氧等侵袭, 空间物资运输方便, 且非常适于进一步的深空探测^[2], 是建立太空基地和星际航行港的最佳选择.

在空间飞行任务的历史中, 利用拉格朗日点已完成了 6 项任务, 所有的都是在日地系统中展开的, 这一方面是由于日地系统中 L1 点流形能够

到达地球附近, 探测器可以方便地切入流形, 使得转移轨道的设计较简单. 在地月系统中, L1 点流形无法到达地球附近, 因此需要采用新的方法来设计转移轨道, Belbruno 等^[3]在 1987 年用数值方法发现了借助太阳引力的地月低能转移轨道, 后来发展成为弱稳定边界理论. W. S. Koon 等^[4]应用不变流形理论在一定意义上证明了二维情况下地月低能转移轨道的存在. F. B. Zazzera 等^[5]基于 Lambert 弧拼接方法得到了地球 - L1 转移轨道, 现有的数值优化方法基本上是“摸黑”搜索低能量转移轨道^[6-8], 对轨道的转移机理缺乏认识.

本文介绍了基于扰动流形的地月 L1 点和地球停泊轨道之间转移轨道的设计方法, 给出了多种经过数值优化的转移轨道, 然后在总结仿真结

收稿日期: 2010 - 03 - 02.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60575013); 航天支撑基金资助项目(N7CH0009); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20060699024).

作者简介: 张汉清(1980—), 男, 博士研究生;
李言俊(1943—), 男, 教授, 博士生导师.

果的基础上提出了采用轨道角动量来分析轨道转移机理的方法,揭示了转移轨道所依据的动力学特征,最后给出了基于轨道转移机理设计的低能转移轨道.

1 扰动流形方法

由L1点Lyapunov轨道($A_x = 10\,470\text{ km}$, $A_y = 31\,068\text{ km}$)向地球200 km停泊轨道的转移为例说明设计方法,由于CR3BP的对称性,地球向L1点Lyapunov轨道的转移为转移轨道沿 x 轴的镜像.由CR3BP动力学^[9-10]知,处在L1点Lyapunov轨道上的探测器只需要很小的机动力便可进入L1点不稳定流形并零消耗地沿流形滑动,由于L1点不稳定流形不能到达地球附近,因此可以设法在流形上某处进行轨道机动,这种机动可以视作对原不稳定流形的速度扰动,这里将扰动后不稳定流形的演化称为扰动流形.若以探测器离开Lyapunov轨道的时刻为零时刻算起,设速度扰动施加的时刻为 Δt ,扰动大小为 Δv_1 ,扰动方向与轨道速度方向的夹角为 α ,则可将扰动流形表示为 $W_{L_1,\text{dis}}(\Delta t, \Delta v_1, \alpha)$,由于流形上的每条轨道可以按其离开Lyapunov轨道的时刻 t 参数化,则扰动流形上的轨道可以表示为 $l_{L_1,\text{dis}}(t, \Delta t, \Delta v_1, \alpha)$,因为引入速度扰动可使扰动流形到达距地球更近的位置,因此通过适当选择参数 $(\Delta t, \Delta v_1, \alpha)$ 可使扰动流形与200 km地球停泊轨道相切,然后再选择合适的参数 t ,在流形上找到1条与停泊轨道相切的轨道,这样探测器就可以沿着该轨道从Lyapunov轨道出发经过2次轨道机动转移到地球停泊轨道,第1次机动 Δv_1 使探测器离L1点不稳定流形进入扰动流形,第2次机动 Δv_2 使探测器由扰动流形转移到地球停泊轨道.

为计算扰动流形,需首先将L1点不稳定流形积分 Δt 时长,得到一系列状态向量,设其形式为 (x, y, v_x, v_y) ,则在施加大小为 Δv 、方向为 α 的扰动后得到的状态向量为

$$\left(x, y, \frac{\Delta v(v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha)}{\sqrt{|v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha|^2 + |v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha|^2}} + v_x, \frac{\Delta v(v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha)}{\sqrt{|v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha|^2 + |v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha|^2}} + v_y\right).$$

对这一系列扰动状态向量进行积分,便可得到扰动流形.为计算探测器在切入地球停泊轨道时所需的第2次机动 Δv_2 大小,需将切入点状态向量(设为 X_r)由地月会合坐标系变换到惯性坐标系下

$$X_{\text{in}} = R(t)X_r,$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -\sin t & -\cos t & \cos t & -\sin t \\ \cos t & -\sin t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

其中, X_{in} 为切入点在地月质心惯性系下状态向量, t 为轨道机动时刻,则

$$\Delta v_2 = |X_{\text{in}}^{\text{vel}} - v_{\text{po}}, v_{\text{po}} = \sqrt{GM/(R+h)}.$$

其中: $X_{\text{in}}^{\text{vel}}$ 为 X_{in} 的速度分量; v_{po} 为停泊轨道的轨道速度; R 为地球半径; h 为轨道高度,这里取作200 km.

2 数值搜索结果

由于地月三体问题的非线性,下面对L1-地球转移轨道进行数值求解,根据扰动流形上轨道的通用形式 $l_{L_1,\text{dis}}(t, \Delta t, \Delta v_1, \alpha)$,算法分为如下步:

1) 根据实际探测任务和探测器性能指标对四维参数空间 $(t, \Delta t, \Delta v_1, \alpha)$ 进行降维或约束,确定优化算法的参数搜索空间.

2) 以 $l_{L_1,\text{dis}}$ 到地心的最近距离 $d_{\text{min}}(l_{L_1,\text{dis}})$ 为优化算法的目标函数.

3) 粗搜索.在搜索空间内均匀选择采样点,寻找满足 $d_{\text{min}}(l_{L_1,\text{dis}}) < 20\,000\text{ km}$ 的参数组合.

4) 精搜索.以上面得到的参数组合作为迭代初值,应用序列二次规划(SQP)优化算法,微调1个或多个参数,得到满足 $d_{\text{min}}(l_{L_1,\text{dis}}) = R + h$ 的轨道.

下面针对几种情况具体讨论转移轨道的数值搜索结果.

2.1 Δv_1 机动方向与轨道速度方向相反的情况

Δv_1 全部用于减小探测器动能,表1列出了所得到的3条转移轨道的相关轨道参数,其中 ΔT 为转移轨道的飞行时间.

表1 反向机动的转移轨道参数

$\Delta v_1 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\Delta v_2 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\Delta t / \text{d}$	$\Delta T / \text{d}$
1 640	2 539	32.83	35.17
1 572	2 587	118.97	129.50
1 513	2 614	72.65	76.32

该类轨道与F. B. Zazzera基于Lambert弧拼接方法所得到的转移轨道类似,具有飞行时间较短的优点,对于地球到L1点的转移轨道,在实际任务中 Δv_2 通常由运载火箭提供,而 Δv_1 需由探测器本身提供,由于探测器本身携带的燃料有限,因此希望 Δv_1 尽可能小,由表1看出,该类轨道 Δv_1 较大,实现起来较困难.

2.2 Δv_1 机动方向与轨道速度方向一致的情况

该情况下, Δv_1 将使探测器动能增加,图1(a)

显示了在($t = 0, \Delta v_1 = 180.4, \alpha = 0$)时, $d_{\min}$ 随机动时间 Δt 变化的曲线, 可看出由于三体问题的非线性, 轨道距地心的最近距离随机动时间剧烈变化, 并且没有明显规律, 取曲线上 $d_{\min}$ 等于停泊轨道半径的点 p , 其对应的转移轨道如图 1(b) 所示, 表 2 总结了该类轨道的相关参数, 该类轨道借助于增大的动能到达了月球附近, 充分利用月球的引力作用使转移总能量消耗显著降低, 另外该类轨道 Δv_1 较小, 但转移时间较长.

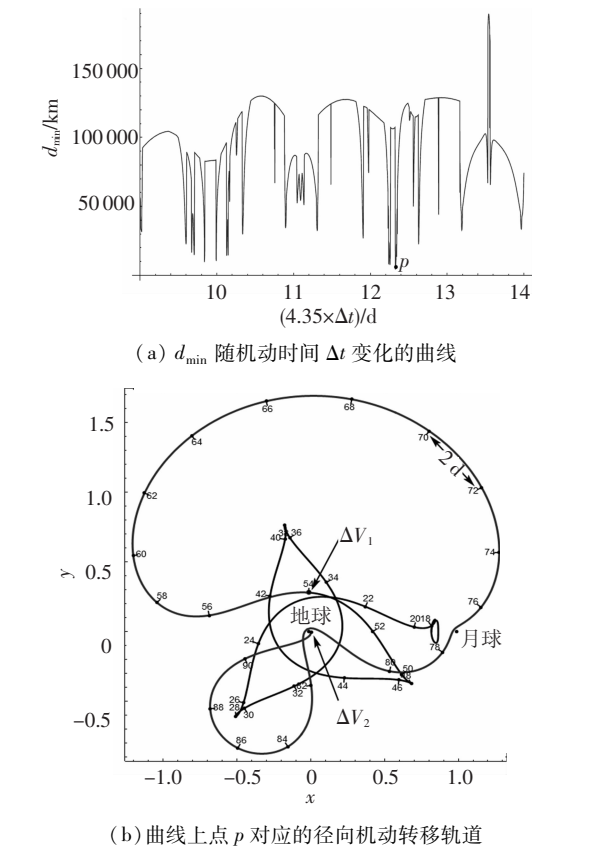


图 1 $d_{\min}$ 的变化曲线及点 p 的径向机动转移轨道

表 2 径向机动的转移轨道参数

$\Delta v_1 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\Delta v_2 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\Delta t / \text{d}$	$\Delta T / \text{d}$
180.4	2 976	53.62	90.48
206.0	2 884	114.70	155.50
187.0	2 932	148.60	192.30

2.3 机动时间 Δt 较长的情况

Δt 较长也意味着总飞行时间较长, 因此探测器有可能充分利用 CR3BP 轨道动力学特征, 从而得到总能量消耗较小的转移轨道, 表 3 总结了该类轨道的相关参数. 从表中看出, 该类轨道中确实有总 Δv 较小的情况, 但也发现飞行时间较长并不总意味着能量消耗较小.

表 3 飞行时间较长的转移轨道参数

$\Delta v_1 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\Delta v_2 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\Delta t / \text{d}$	$\Delta T / \text{d}$
202	2 876	180.1	215.2
193	3 014	168.7	210.4
247	3 064	182.3	271.5

3 转移轨道机理分析

第 2 节的参数空间数值搜索和优化方法并没有反映转移轨道内在的动力学原理, 搜索过程具有相当的盲目性, 并且由于三体问题的非线性和混沌效应, 盲目地搜索并不总是能得到满足条件的优化轨道. 通过对大量数值仿真结果的分析, 发现虽然在 CR3BP 会合坐标系下探测器相对于原点的角动量不再守恒, 但其取值依然存在一定的规律, 并且是理解 L1 - 地球转移轨道的关键. 首先设探测器某时刻的状态向量为 (x, y, v_x, v_y) , 相对于坐标原点的角动量为 h , 探测器到原点的距离为 d , 则

$$h = v_y x - v_x y, d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

为了说明角动量变化的规律, 选取 3 条 Jacobi 能量相同而初始角动量不同的轨道, 求取轨道上每一点所对应的 (d, h) 值, 并将其绘制在 $d - h$ 平面, 得到的 $d - h$ 曲线如图 2 所示.

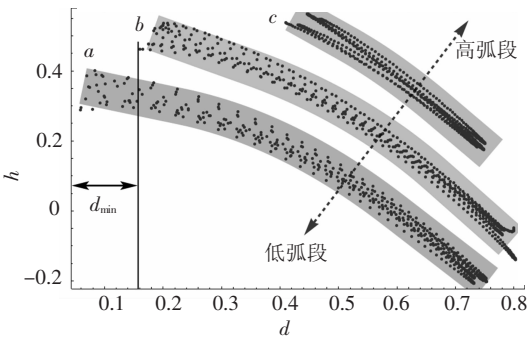


图 2 三条角动量不同的轨道对应的 $d - h$ 曲线

由轨道的 $d - h$ 曲线图看出, 同 1 轨道上每 1 点的角动量随离原点距离的增大而减小, 并且 $d - h$ 点均处于 1 个弧形区域内, 随着轨道初始角动量的增大, $d - h$ 曲线所处的弧段逐渐缩短并向上移动, 轨道所能达到的距地球最近的距离 $d_{\min}$ 变大. 图 3 显示了 3 条初始角动量相同但 Jacobi 能量不同的轨道所对应的 $d - h$ 曲线, 可看出即使 Jacobi 能量不同, 3 条轨道的 $d - h$ 曲线却基本重合, 并具有相同的 $d_{\min}$ 值. 根据此算例和大量数值仿真数据, 可以得到以下的结论:

- 1) 轨道 $d - h$ 曲线所处弧段与 $d_{\min}$ 值有对映关系, 若要使轨道能够到达地球附近, 其 $d - h$ 曲线必须处在相应弧段内;
- 2) 轨道 $d_{\min}$ 值越小, 则其 $d - h$ 曲线所处弧段越低, 对应的角动量越小;
- 3) L1 不稳定流形上的轨道普遍具有大角动量, 其 $d - h$ 曲线处于较高弧段, 因此 $d_{\min}$ 值较大, 无法到达地球附近.

由以上分析可以看出, 为使探测器由 L1 不稳

定流形转移到地球附近, 必须使 $d-h$ 曲线由高弧段转移到低弧段。显然, 可行的方法是降低轨道角动量, 一旦探测器处于低弧段内, 它便能沿该弧段滑行到达地球附近。观察第 2 节采用优化算法所得到的各种转移轨道, 可发现其轨道机动无一不是通过降低角动量来完成 L1 不稳定流形到地球停泊轨道的转移。

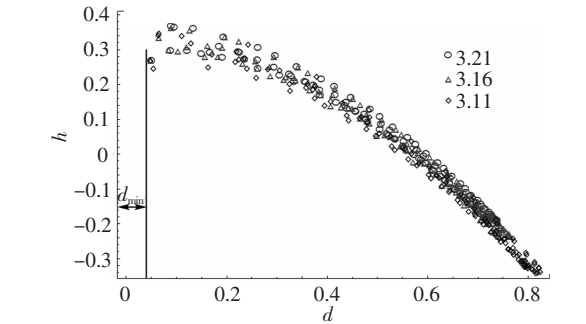


图 3 角动量相同而 Jacobi 能量不同的轨道对应的 $d-h$ 点

降低角动量得到转移轨道的原理, 也可通过分析简化二体模型看出, 由于 L1 - 地球转移轨道本身的特点, 在探测器飞向地球的轨道段可将月球引力视作一种小摄动, 探测器仍近似遵循二体模型轨道动力学, 为使探测器能到达地球附近, 其轨道必须满足一定条件, 设二体模型下探测器在惯性坐标系内的角动量为 $\boldsymbol{h}$, 能量为 C , 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{r}, \\ C = |\boldsymbol{v}|^2/2 - 1/|\boldsymbol{r}|. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为探测器速度向量, $\boldsymbol{v}_\perp$ 为 $\boldsymbol{v}$ 在垂直于探测器 - 地球连线方向上的分量, $\boldsymbol{r}$ 为探测器位置向量, 探测器在轨道近地点时有

$$\boldsymbol{v}_\perp = |\boldsymbol{v}|.$$

代入式(1)可解得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}_{\text{peri}}| &= \frac{2 C h}{\sqrt{2 C h^2 + 1} - 1}, \\ |\boldsymbol{r}_{\text{peri}}| &= \frac{\sqrt{2 C h^2 + 1} - 1}{2 C}. \end{aligned}$$

其中 $|\boldsymbol{v}_{\text{peri}}|$ 为探测器近地点速度, $|\boldsymbol{r}_{\text{peri}}|$ 为近地距。将 $|\boldsymbol{r}_{\text{peri}}|$ 对 $|\boldsymbol{h}|$ 求导得

$$\frac{\partial |\boldsymbol{r}_{\text{peri}}|}{\partial |\boldsymbol{h}|} = \frac{|\boldsymbol{h}|}{\sqrt{1 + 2 C |\boldsymbol{h}|^2}} > 0, \quad \boldsymbol{h} \neq 0.$$

于是, $|\boldsymbol{r}_{\text{peri}}|$ 为 $|\boldsymbol{h}|$ 的单调增函数, 也就是说, 在能量 C 不变的情况下, 若要使轨道近地距等于地球停泊轨道半径, 则角动量 $\boldsymbol{h}$ 的绝对值必须减小到一定程度, 根据惯性坐标系到旋转坐标系的变换公式, 旋转坐标系下的角动量也必需相应降低。

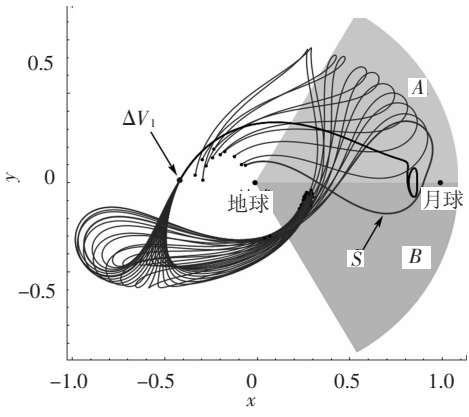
4 基于转移机理的转移轨道设计

根据降低角动量的方法不同, L1 - 地球转移

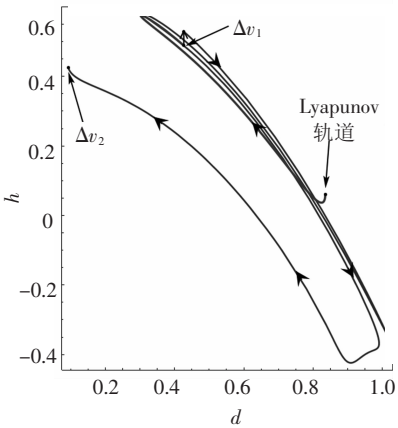
轨道设计可归为如下 2 类:

1) 人工降低角动量。这种方法纯粹依靠变轨机动力来降低轨道角动量, 对于大小相同的速度增量 Δv_1 , 其作用的位置距地球越远, 且方向垂直于探测器 - 地球连线时, 改变角动量的效果越明显, 该类轨道的优点是总的转移时间较短, 轨道稳定性较好, 但相对下述第 2 类轨道总 Δv 增量稍大。

2) 借助月球引力降低角动量。数值仿真表明, 当探测器飞越月球附近时, 轨道角动量将受月球引力的影响而改变, 例如图 4(a) 显示了 $t = 9.7$ 、 $\Delta t = 25.7$ 、 $\Delta v_1 = 100$ 时, α 在 $(0, 2\pi)$ 之间变化时得到的一族轨道, 图 4(b) 显示了其中 1 条轨道 s 的 $d-h$ 曲线, 可以看出探测器飞离月球越近, 月球引力对角动量的影响越显著, 进一步分析发现探测器从图 4(a) 中 A 区域飞越月球时角动量将降低, 从 B 区域飞越月球时角动量将增大。



(a) 月球引力对一族转移轨道的影响



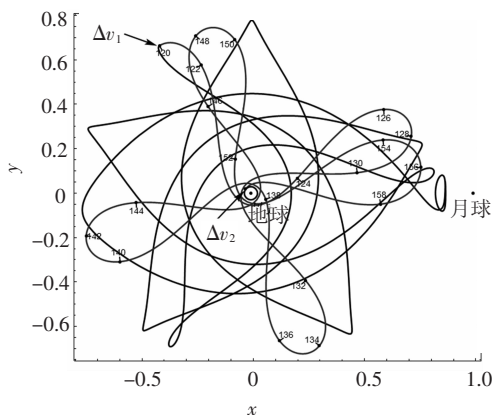
(b) 轨道 s 的 $d-h$ 曲线

图 4 月球引力对一族转移轨道的影响及其中 1 条轨道 s 的 $d-h$ 曲线

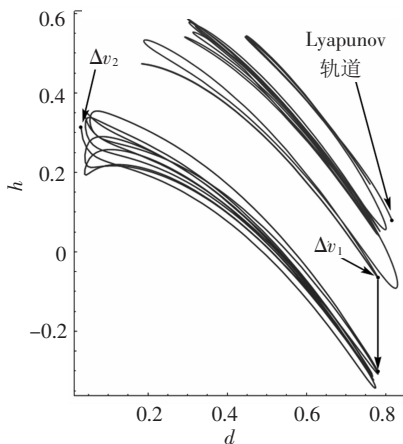
基于以上原理, 可设计转移轨道使其尽可能多地穿越 A 区域, 并且尽可能少地穿越 B 区域, 从而使角动量下降到需要的水平, 得到接近地球的转移轨道。该类轨道的优点是充分利用月球引力

加速作用,总能量消耗较小,但由于该类轨道依赖于和月球精确的相对位置关系,微小的轨道误差便可能使探测器完全偏离预定轨道(如图 1(a)所示),因此对轨道测量和控制精度要求较高。

以上 2 种方法并不相互排斥,因此可结合起来设计最优转移轨道,首先采用方法 1) 确定施加 Δv_1 的位置和方向,然后采用方法 2) 结合优化算法得到 Δv_1 的大小,最后计算得到 Δv_2 . 图 5 显示了结合 2 种方法设计的转移轨道以及对应的 $d-h$ 曲线,轨道机动不但本身能降低角动量,而且使转移轨道 2 次穿越 A 区域,充分利用月球引力作用,该轨道具有能耗较小且稳定性较高的优点,但转移时间较长。



(a) 转移轨道



(b) $d-h$ 曲线

图 5 结合 2 种方法设计的转移轨道及其对应的 $d-h$ 曲线, 总 $\Delta v = 3\,136\text{ m/s}$, $\Delta T = 159\text{ d}$

5 结 论

本文介绍了基于扰动流形的 L1 - 地球转移轨道设计方法,给出了各种经过数值优化的转移轨道,在总结数值仿真结果的基础上提出了采用

轨道角动量分析轨道转移机理的方法,利用该方法可以克服数值优化方法在大范围参数空间搜索的盲目性,极大的降低计算量并提高轨道设计效率,能对轨道的转移机理进行定性的分析,类似地,该方法同样可以用来分析和设计地月低能转移轨道. 本文是在平面模型下对设计方法进行论述的,但所介绍的方法也可扩展到三维模型下,这时轨道角动量是一空间矢量,设计方法应以减小该矢量模值为目标。

参考文献:

- [1] KOON W S, LO M W, MARSDEN J E, *et al.* Dynamical systems, the three-body problem and space mission design[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 2007.
- [2] 徐明. 平动点轨道的动力学与控制研究综述[J]. 宇航学报, 2009, 30(4): 1299 - 1313.
- [3] BELBRUNO E A, MILLER J K. Sun-perturbed earth-to-moon transfers with ballistic capture[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1993, 16(4): 770 - 775.
- [4] KOON W S, LO M W, MARSDEN J E, *et al.* Low energy transfer to the moon[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2001, 81(1/2): 63 - 73.
- [5] ZAZZERA F B, TOPPUTO F, MASSARI M. Assessment of mission design Including utilization of libration points and weak stability boundaries, final report, ESTEC contract No. 18147/04/NL/MV [R]. Politecnico di Milano: ESTEC, 2004.
- [6] BOOKLESS J, MCLNNEIS C. Control of lagrange point orbits using solar sail propulsion[J]. Acta Astronautica, 2008, 62: 159 - 176.
- [7] ANDREU M A. The quasi-bicircular problem[D]. PhD thesis. Universitat de Barcelona, 1999.
- [8] LI Mingtao, ZHENG Jianhua. The optimization of transfer trajectory for small amplitude halo orbits[J]. Measurement and Control, 2008, 41(3): 81 - 84.
- [9] HOWELL K C, BECKMAN, PATTERSON C, *et al.* Representations of invariant manifolds for applications in three body systems [J]. Journal of the Astronautical Sciences, 2006, 54(1): 69 - 93.
- [10] ANDERSON R L, LO M W, BORN G H. Application of local lyapunov exponents to maneuver design and navigation in the three-body problem [C]//AAS/AIAA. Astrodynamics Specialist Conference Big Sky, AAS 03 - 569. Montana: Jet Propulsion Laboratory, 2003: 1 - 18.

(编辑 张 宏)