

具双时滞的 Nicholson 果蝇系统的动力学性质

张向华^{1,2}

(1. 哈尔滨工业大学 理学院, 150001 哈尔滨, hljzhangxianghua@163.com; 2. 黑龙江科技学院 理学院, 150027 哈尔滨)

摘要: 为更好地维护生态系统和谐与稳定, 研究了具双时滞的 Nicholson 果蝇动力系统的稳定性. 对系统在正平衡点附近的稳定性, 局部 Hopf 分支的存在性, 发生条件、Hopf 分支的方向, 分支周期解的稳定性以及分支随参数变化其周期解的周期变化进行了讨论. 然后通过数值模拟有力地支撑了前面分析得到的理论结果, 并且得到在正平衡点附近 Hopf 分支的全局存在性. 用分支理论解释了生态系统得以循环不息的原因.

关键词: 平衡点; 稳定性; 周期解; Hopf 分支

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2011)06-0070-06

Dynamical analysis in Nicholson blowflies system with two delays

ZHANG Xiang-hua^{1,2}

(1. School of Science, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China, hljzhangxianghua@163.com;

2. Science of College, Heilongjiang Institute Science and Technology, 150027 Harbin, China)

Abstract: In order to maintain the harmony and stability of ecosystems, in this paper, the stability of Nicholson's blowflies model with time delay was investigated. The distribution of the characteristic roots, the stability of the equilibrium, the existence of Hopf bifurcation and its conditions were discussed. Meanwhile, some simulations were carried out, which supported the theoretical results obtained previously and the global existence of Hopf bifurcation near the positive equilibrium point was got. At last, the reasons of circulating ecosystems were explained by the bifurcation theory.

Key words: equilibrium point; stability; periodic solutions; Hopf bifurcation

方程

$$N'(t) = pN(t - \tau)e^{-\alpha N(t - \tau)} - \delta N(t) \quad (1)$$

是由 Gurney 等在文献[1]中用来描述 Nicholson's 果蝇动力学系统的. 其中 $N(t)$ 表示其数量, p 表示最大生产率, $\frac{1}{\alpha}$ 表示果蝇在最大变化率时繁殖的数目, δ 表示成年果蝇的死亡率, t 表示时间. 方程(1)正平衡点的全局吸引和振动行为^[2]已有广泛讨论. 对于方程(1)具有时间周期参数^[3]和离散的 Nicholson's 方程也进行了广泛的研究^[4-5], 文献[6]对带有扩散项的 Nicholson's 方程及其行波解进行了研究. Kulenovic 证明了当 $p > \delta e^2$ 时, 当且仅当 $\delta \tau e^{\alpha \tau} \left[\log \frac{p}{\delta} - 1 \right] > \frac{1}{e}$ 方程(1)的解在

正平衡点 $N^* = \frac{1}{\alpha} \log \frac{p}{\delta}$ 处振动.

在生物学上更关心方程(1)的稳定性以及持续振荡, 以时滞 τ 为参数, 运用局部 Hopf 分支理论以及全局 Hopf 分支理论^[7]讨论了方程(1)稳定周期振动的存在性. 在 $p > \delta e^2$ 时, 随着 τ 的增大, 正平衡点 $N^* = \frac{1}{\alpha} \log \frac{p}{\delta}$ 的稳定性发生了突变且发生了 Hopf 分支. 若令 $x(t) = \alpha N(t)$, 则方程(1)变为

$$x'(t) = px(t - \tau) \exp(-x(t - \tau)) - \delta x(t). \quad (2)$$

文献[5]指出, 为了更接近于实际, 会引入一个具时滞的线性项 $Hx(t - \sigma)$, 这是一个捕捞项, 从生态系统的稳定和可持续经济的角度上讲, 幼体不应在捕捞的范围内, 所以用 σ 表示从幼体发育到可以捕捞的时间. H 表示捕捞的强势系数. 这

样方程(2)就变为

$$x'(t) = px(t - \tau)e^{-x(t-\tau)} - \delta x(t) - Hx(t - \sigma). \tag{3}$$

1 Nicholson 动力系统正平衡点的稳定性和局部 Hopf 分支的存在性

通过文献[8]方法来研究方程(3)正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性.

当 $\frac{p}{\delta + H} > 1$ 时, $x^* = a = \ln \frac{p}{\delta + H}$ 为系统的正平衡点.

令 $y(t) = x(t) - a$, 方程(3)化为

$$y'(t) = p[y(t - \tau) + a] + e^{-x(t-\tau)-a} - \delta(y(t) + a) - H[y(t - \sigma) + a]. \tag{4}$$

则式(4)在 $y = 0$ 处的线性化方程为

$$y'(t) = (\delta + H)(1 - a)y(t - \tau) - \delta y(t) - Hy(t - \sigma).$$

进而式(4)的特征方程为

$$\lambda + \delta + He^{-\lambda\sigma} + (\delta + H)(a - 1)e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{5}$$

对于单时滞情况,即当 $\sigma = 0$ 时, 式(3)变为

$$x'(t) = px(t - \tau)\exp(-x(t - \tau)) - (\delta + H)x(t). \tag{6}$$

由文献[9]有下面的结果.

- 引理 1** $\alpha'_k(\tau_k) > 0$.
- 定理 1** 对于方程(6)有
- i) 如果 $(\delta + H) < p \leq (\delta + H)e^2$, 那么 $x = x^* = a$ 是渐近稳定的;
 - ii) 如果 $p > (\delta + H)e^2$,那么对于 $\tau \in [0, \tau_0)$ 平衡点 $x = x^* = a$ 是渐近稳定的,当 $\tau > \tau_0$ 时,平衡点 $x = x^* = a$ 是不稳定的;
 - iii) 如果 $p > (\delta + H)e^2$,那么当 $\tau = \tau_k(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 时,方程(6)的平衡点 $x = x^* = a$ 经历 Hopf 分支.

现在考虑双时滞情况,令 $\tau = \tau^* \in [0, \tau_0)$, $\sigma > 0$,并且设 $\lambda = i\omega(\sigma)$ ($\omega > 0$) 是特征方程(5)的根,则有下列的方程

$$\begin{cases} H\cos \omega\sigma = -\delta - (\delta + H)(a - 1)\cos \omega\tau^*, \\ H\sin \omega\sigma = \omega - (\delta + H)(a - 1)\sin \omega\tau^*. \end{cases} \tag{7}$$

进而有

$$\omega^2 - 2\omega A\sin \omega\tau^* + 2\delta A\cos \omega\tau^* + \delta^2 - H^2 + A^2 = 0. \tag{8}$$

其中 $A = (\delta + H)(a - 1)$,可证得方程(8)至多有限个正根. 若方程(8)有正根,不失一般性,设其有 N 个正根,记为 $\omega_i(i = 1, 2, \cdots, N)$,注意到方

程(7),通过计算得到 $\sigma_i^j(i = 1, 2, \cdots, N, j = 1, 2, \cdots)$,并定义

$$\sigma_0 = \sigma_{i_0}^{(0)} = \min_{i \in \{1, 2, \cdots, N\}} \{ \sigma_i^{(0)} \} \quad \omega = \omega_0.$$

令 $\lambda(\sigma) = \alpha(\sigma) + i\omega(\sigma)$ 是方程(5)满足使得 $\alpha(\sigma_k^{(j)}) = 0, \omega(\sigma_k^{(j)}) = \omega_0$ 的根. 由计算得

$$\lambda' = \frac{\lambda^2 + \lambda\delta + \lambda Ae^{-\lambda\tau^*}}{1 + (\lambda + \delta + Ae^{-\lambda\tau^*})\sigma - A\tau^* e^{-\lambda\tau^*}}.$$

有

$$\alpha'(\sigma_0) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

其中 $A = (\delta + H)(a - 1), \Delta_1 = [1 + \delta\sigma_0 + A(\sigma_0 - \tau^*)\cos \omega_0\tau^*]^2 + [\omega_0\sigma_0 - A(\sigma_0 - \tau^*)\sin \omega_0\tau^*]^2$, $\Delta_2 = -\omega_0^2 + A\tau^*\omega_0^2\cos \omega_0\tau^* + A\tau^*\omega_0\delta\sin \omega_0\tau^* + A\omega_0\sin \omega_0\tau^*$.

从而得

引理 2 如果 $\Delta_2 \neq 0$,那么 $\alpha'(\sigma_0) \neq 0$.

再根据文献[8]中关于超越方程根分布情况的引理,得

- 定理 2** 假设 $p > (\delta + H)e^2$,且 $\tau = \tau^* \in [0, \tau_0)$,有
- i) 对 $\forall \sigma \in [0, \sigma_0)$,特征方程(5)的所有根都具有负实部,因此,方程(3)的平衡点 $x = x^* = a$ 是渐近稳定的;
 - ii) 若 $\alpha'(\sigma_0) \neq 0$,则当 $\sigma = \sigma_0$ 时式(3)在平衡点 $x = x^* = a$ 处经历 Hopf 分支;
 - iii) 满足(ii)的条件,通过适当地选择参数方程可能产生稳定性开关.

2 局部 Hopf 分支的性质

应用中心流形和规范型理论,参考 Has-sard^[10]方法研究 Hopf 的性质.

设 $\tau = \tau^* \in [0, \tau_0)$ 以及 $\tau^* < \sigma_0$, 这样有 $\frac{\tau^*}{\sigma_0} < 1$,令 $\frac{\tau^*}{\sigma_0} = \sigma^*$ 及 $t = \sigma t$. 为方便仍用原来的符号,则方程(4)变为

$$y(t) = \sigma \{ p[y(t - \sigma^*) + a]e^{-y(t-\sigma^*)-a} - \delta[y(t) + a] - H[y(t - 1) + a] \}. \tag{9}$$

令 $\sigma = \sigma_0 + \mu, (\mu \in R)$,在 $\mu = 0$ 时方程(9)经历 Hopf 分支,这样(9)变为

$$y'(t) = (\sigma_0 + \mu) \{ -(\delta + H)(\alpha - 1)y(t - \sigma^*) - \delta y(t) - Hy(t - 1) + (\delta + H)\frac{(a - 2)}{2}y^2(t - \sigma^*) - (\delta + H)\frac{(a - 3)}{6}y^3(t - \sigma^*) + o(y^4) \}. \tag{10}$$

对于 $\varphi \in C = C([-1, 0], R)$, 令

$$L_\mu \varphi = -(\sigma_0 + \mu)[(\delta + H)(a - 1) \cdot \varphi(-\sigma^*) + \delta \varphi(0) + H\varphi(-1)], \quad (11)$$

和

$$f(\mu, \varphi) = (\sigma_0 + \mu)[(\delta + H) \frac{(a-2)}{2} \varphi^2(-\sigma^*) - (\delta + H) \frac{a-3}{6} \varphi^3(-\sigma^*) + o(\varphi^4(-\sigma^*))]. \quad (12)$$

由 Riesz 表示定理, 存在有界变差函数 $\eta(\theta, \mu)$, 其中 $\theta \in [-1, 0]$ 使得

$$L_\mu \varphi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \varphi(\theta), \text{ for } \varphi \in C.$$

这里

$$\eta(\theta, \mu) =$$

$$\begin{cases} (\sigma_0 + \mu)[\delta + (\delta + H)(a - 1) + H] & \theta = -1, \\ (\sigma_0 + \mu)[\delta + (\delta + H)(a - 1)] & -1 < \theta \leq -\sigma^*, \\ (\sigma_0 + \mu)\delta & -\sigma^* < \theta < 0, \\ 0 & \theta = 0 \end{cases}$$

对于 $\varphi \in C$, 定义

$$A(\mu)\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, \mu) \varphi(t) & \theta = 0, \end{cases}$$

以及

$$R(\mu)\varphi = \begin{cases} 0 & \theta \in [-1, 0), \\ f(\mu, \varphi) & \theta = 0. \end{cases}$$

这时式(10)可以表示为

$$\dot{y}_t = A(\mu)y_t + R(\mu)y_t, \quad (13)$$

这里 $y_t = y(t + \theta)$, ($\theta \in [-1, 0]$). 对于 $\psi \in C^1([0, 1], R)$, 定义

$$A^*\psi(S) = \begin{cases} -\frac{d\psi(S)}{dS} & S \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, 0)\psi(-t) & S = 0. \end{cases}$$

对于 $\varphi \in C^1([-1, 0], R)$ 和 $\psi \in C^1([0, 1], R)$, 定义双线性积分

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi,$$

这里 $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$, $A^*(0)$ 和 $A(0)$ 是共轭算子. 由前面的讨论知 $\pm i\omega_0\sigma_0$ 为 $A(0)$ 的特征值. 可证明 $q(\theta) = e^{i\omega_0\sigma_0\theta}$ 为 $A(0)$ 对应于特征值 $i\omega_0\sigma_0$ 的特征向量, 且 $q^*(s) = De^{i\omega_0\sigma_0 s}$ 是 A^* 对应于特征值 $-i\omega_0\sigma_0$ 的特征向量.

更进一步有

$$\langle q^*, q \rangle = 1, \quad \langle q^*, \bar{q} \rangle = 0,$$

其中

$$\bar{D} = (1 + \tau^*(a - 1)(\delta + H)e^{-i\omega_0\tau^*} + H\sigma_0 e^{-i\omega_0\sigma_0})^{-1}.$$

下面用文献[10]中的记号计算当 $\mu = 0$ 时, 式(10)在中心流形 C_0 上的限制. 设 y_t 为 $\mu = 0$ 时式(10)的解. 定义

$$z(t) = \langle q^*(\theta), y_t \rangle \text{ 和 } w(t, \theta) = y_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\},$$

在中心流形 C_0 上有

$$w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta),$$

z 和 $\bar{z}$ 为中心流形 C_0 在 q^* 和 $\bar{q}^*$ 方向上的坐标. 并且若 y_t 是实的, 则 w 也是实的. 对于方程(10)的解 $y_t \in C_0$, 由 $\mu = 0$ 得

$$\dot{z}(t) = i\omega_0\sigma_0 z + \langle q^*(\theta),$$

$$f(w + 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}) \rangle =$$

$$i\omega_0\sigma_0 z + \bar{q}^*(0)f(w(z, \bar{z}, 0) + 2\text{Re}\{z(t)q(0)\}) \stackrel{\text{def}}{=} i\omega_0\sigma_0 z + \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}).$$

再将上式写为

$$\dot{z}(t) = i\omega_0\sigma_0 z(t) + g(z, \bar{z}),$$

这里

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (14)$$

由式(10)和(13)得

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{y}_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q} = \\ &\begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{g(z, \bar{z})q(\theta)\} & \theta \in [-1, 0) \\ Aw - 2\text{Re}\{g(z, \bar{z})q(\theta)\} + f_0 & \theta = 0 \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &Aw + H(z, \bar{z}, \theta), \end{aligned}$$

这里

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (15)$$

将上述相应的级数展开并比较相应的系数, 可得

$$\begin{aligned} (A - 2i\omega_0\sigma_0)w_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta), \\ Aw_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta), \dots \end{aligned} \quad (16)$$

注意到 $y_t = w(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$ 和 $q(\theta) = e^{i\omega_0\sigma_0\theta}$, 可得

$$y(t - \sigma^*) = ze^{-i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + \bar{z}e^{i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + w(z, \bar{z}, -\sigma^*),$$

其中

$$\begin{aligned} w(z, \bar{z}, -\sigma^*) &= w_{20}(-\sigma^*) \frac{z^2}{2} + \\ &w_{11}(-\sigma^*) z\bar{z} + w_{02}(-\sigma^*) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

因此

$$f_0(z, \bar{z}) = \sigma_0(\delta + H) \left[\frac{(a-2)}{2} \gamma^2(t - \sigma^*) - \right]$$

$$\begin{aligned} & \frac{(a-3)}{6} y^3(t-\sigma^*)] + o(y^4(t-\sigma^*)) = \\ & \sigma_0 \frac{(\delta+H)(a-2)}{2} [e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} z^2 + e^{2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} \bar{z}^2 + 2z\bar{z} + \\ & 2e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} w_{11}(-\sigma^*) z^2 \bar{z} + e^{2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} w_{20}(-\sigma^*) \bar{z}^2] - \\ & \frac{\sigma_0(\delta+H)(a-3)}{2} e^{-i\omega_0\sigma_0\sigma^*} z^2 \bar{z} + \dots = \\ & f_z \frac{z^2}{2} + f_{z\bar{z}} z\bar{z} + f_{\bar{z}z} \frac{\bar{z}^2}{2} + f_{z\bar{z}} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \end{aligned}$$

由该关系式和式(14)得

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = \\ \bar{q}^*(0) \{ & \frac{\sigma_0(\delta+H)(a-2)}{2} e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} z^2 + \sigma_0(\delta+ \\ & H)(a-2) z\bar{z} + \frac{\sigma_0(\delta+H)(a-2)}{2} e^{2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} \bar{z}^2 + \\ & [\frac{\sigma_0(\delta+H)(a-2)}{2} (2e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} w_{11}(-\sigma^*) + \\ & e^{2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} w_{20}(-\sigma^*)) - \frac{\sigma_0(\delta+H)(a-3)}{2} \cdot \\ & e^{-i\omega_0\sigma_0\sigma^*}] z^2 \bar{z} \} + \dots \end{aligned}$$

利用 $\bar{q}^*(0) = \bar{D}$, 并同式(11)比较系数得

$$\begin{aligned} g_{20} &= \bar{D} \sigma_0 (\delta+H)(a-2) e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*}, \\ g_{11} &= \bar{D} \sigma_0 (\delta+H)(a-2), \\ g_{02} &= \bar{D} \sigma_0 (\delta+H)(a-2) e^{2i\omega_0\sigma_0\sigma^*}, \\ g_{21} &= \bar{D} [\sigma_0 (\delta+H)(a-2) (2e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} \cdot \\ & w_{11}(-\sigma^*) + e^{2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} w_{20}(-\sigma^*)) - \\ & \sigma_0 (\delta+H)(a-3) e^{-i\omega_0\sigma_0\sigma^*}], \end{aligned}$$

因此, 对于 $\theta \in [-1, 0)$,

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -\bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) - q^*(0) \bar{f}_0 \bar{q}(\theta) = \\ & -g(z, \bar{z}) q(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z}) \bar{q}(\theta). \end{aligned}$$

与式(15)比较系数得

$$\begin{aligned} H_{20}(\theta) &= -g_{20} q(\theta) - \bar{g}_{02} \bar{q}(\theta), \\ H_{11}(\theta) &= -g_{11} q(\theta) - \bar{g}_{11} \bar{q}(\theta). \end{aligned}$$

将该关系式代入式(16)可得

$$w'_{20} = 2i\omega_0 \sigma_0 w_{20} g_{20} e^{i\omega_0\sigma_0\theta} + \bar{g}_{02} e^{-i\omega_0\sigma_0\theta}.$$

对上面方程关于 ω_0 求解得

$$w_{20} = -\frac{g_{20}}{i\omega_0 \sigma_0} e^{i\omega_0\sigma_0\theta} - \frac{\bar{g}_{02}}{3i\omega_0 \sigma_0} e^{-i\omega_0\sigma_0\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\sigma_0\theta}. \quad (17)$$

类似地有

$$w_{11} = \frac{g_{11}}{i\omega_0 \sigma_0} e^{i\omega_0\sigma_0\theta} - \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_0 \sigma_0} e^{-i\omega_0\sigma_0\theta} + E_2, \quad (18)$$

其中 E_1 和 E_2 为常量且可以通过下面的形式求得

$$H(z, \bar{z}, \theta) = -2\text{Re} \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) + f_0,$$

有

$$H_{20} = -g_{20} - \bar{g}_{02} + \sigma_0(\delta+H)(a-2) e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*},$$

$$H_{11} = -g_{11} - \bar{g}_{11} + \sigma_0(\delta+H)(a-2).$$

从式(16)和 A 的定义可得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{20}(\theta) &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta) [-\frac{g_{20}}{i\omega_0 \sigma_0} e^{i\omega_0\sigma_0\theta} - \\ & \frac{\bar{g}_{02}}{3i\omega_0 \sigma_0 \theta} e^{-i\omega_0\sigma_0\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\sigma_0\theta}] = 2i\omega_0 \sigma_0 [\frac{ig_{20}}{\omega_0 \sigma_0} \cdot \\ & \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0 \sigma_0 \theta} + E_1] + g_{20} + \bar{g}_{02} - f_{z^2} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{11}(\theta) &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta) [-\frac{ig_{11}}{\omega_0 \sigma_0} e^{i\omega_0\sigma_0\theta} + \\ & \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0 \sigma_0 \theta} e^{-i\omega_0\sigma_0\theta} + E_2] = -g_{11} q(0) + \bar{g}_{11} \bar{q}(0) - f_{z\bar{z}}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } E_1 = \frac{f_{z^2}}{2i\omega_0 \sigma_0 - \int_{-1}^0 e^{2i\omega_0\sigma_0\theta} d\eta(\theta)},$$

$$E_2 = -\frac{f_{z\bar{z}}}{\int_{-1}^0 d\eta(\theta)}, f_{z^2} = \sigma_0(\delta+H)(a-2) e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*}, f_{z\bar{z}} = \sigma_0(\delta+H)(a-2).$$

从 $\eta(\theta)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{(\delta+H)(a-2) e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*}}{2i\omega_0 + (\delta+H)(a-1) e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + \delta + H e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*}}, \\ E_2 &= \frac{a-2}{a}. \end{aligned}$$

将 E_1 和 E_2 分别代入式(17)和(18)中, 得

$$\begin{aligned} w_{20}(-\sigma^*) &= \frac{ig_{20}}{\omega_0 \sigma_0} e^{-i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0 \sigma_0} e^{i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + \\ & \frac{(\delta+H)(a-2) e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*}}{2i\omega_0 + (\delta+H)(a-1) e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + \delta + H e^{-2i\omega_0\sigma_0\sigma^*}}, \\ w_{11} &= -\frac{ig_{11}}{\omega_0 \sigma_0} e^{i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + \frac{i \cdot \bar{g}_{11}}{\omega_0 \sigma_0} e^{i\omega_0\sigma_0\sigma^*} + \frac{a-2}{a}. \end{aligned}$$

由上面分析知 g_{ij} 可以由模型的各个参数表示. 进一步有

$$\begin{aligned} C_1(0) &= \frac{i}{2\omega_0 \sigma_0} \left(g_{11} g_{20} - 2 |g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}, \\ \mu_2 &= -\frac{\text{Re}\{C_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\sigma_0)\}}, \beta_2 = 2\text{Re}\{C_1(0)\}, \\ T_2 &= -\frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2(\text{Im}\{\lambda'(\sigma_0)\})}{\omega_0}. \end{aligned}$$

定理3 Hopf 分支的方向由 μ_2 决定, 分支周期解的稳定性由 β_2 决定, T_2 决定分支周期解的周期变化, 具体情况如下

i) 当 $\mu_2 > 0$ 时, Hopf 分支是上临界的, 当 $\mu_2 < 0$ 时, Hopf 分支是下临界的;

ii) 当 $\beta_2 > 0$ 时, 分支周期解是不稳定的, 当 $\beta_2 < 0$ 时, 分支周期解在中心流形上的限制是渐近稳定的;

iii) 当 $T_2 > 0$ 时, 分支周期解的周期随参数递

增,当 $T_2 < 0$ 时分支周期解的周期随参数递减.

3 数值模拟

例 1 $p = 38, \delta = 1, H = 2, \tau = \tau^* = 0.3, \sigma > 0$, 那么模型(3)变为

$$x'(t) = 38x(t-0.3)e^{-x(t-0.3)} - x(t) - 2x(t-\sigma). \quad (19)$$

σ 取不同的数值时, 观察式(19)如何变化.

在 $\tau^* = 0.3 \in [0, 0.649\ 139)$ 时, 得 $\sigma_0 = 0.391\ 2$, 从图 1 可以看出, 当 $\sigma = 0.1 \in [0, 0.391\ 2)$ 时, 模型(19)在正平衡点处是渐近稳定的. 当 $\sigma = 0.4$ 时, 得 $c_1(0) = -0.240\ 9 - 0.220\ 5i, \mu_2 = -0.082\ 7, \beta_2 = -0.481\ 8, T_2 = 0.025\ 8$, 如图 2 所示的模型(19)在正平衡点附近产生的分支周期解是稳定的, Hopf 分支是下临界的, 分支周期解的周期随参数的增加而递增. 从图 3 可以看出, 在 $\sigma = 0.75$ 时, 正平衡点又一次变成渐近稳定的, 当 $\sigma = 1.5$ 时, 得 $c_1(0) = -0.003\ 8 - 0.583\ 4i, \mu_2 = 0.106\ 0, \beta_2 = -0.007\ 6, T_2 = 0.164\ 4$. 图 4 所示的模型(19)在正平衡点附近产生的周期解是稳定的, Hopf 分支是上临界的, 分支周期解的周期随参数的增加而递增. 并且从这几幅图可以观察到稳定性开关, 从图 5, 6 可以看出, 当 σ 继续增加时稳定性开关消失.

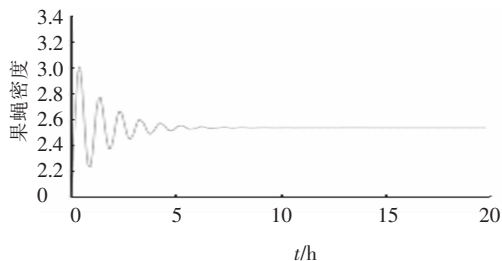


图 1 $\tau=0.3, \sigma=0.1$

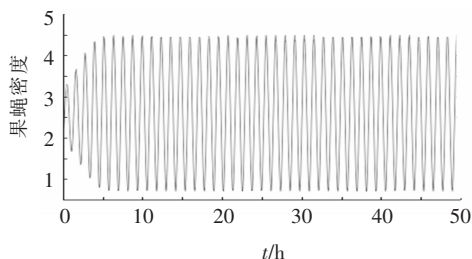


图 2 $\tau=0.3, \sigma=0.4$

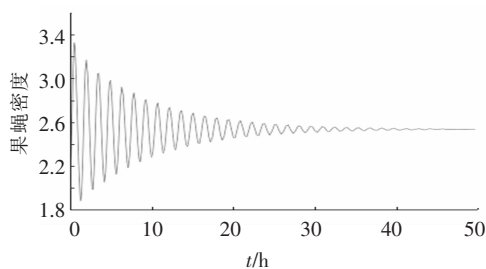


图 3 $\tau=0.3, \sigma=0.75$

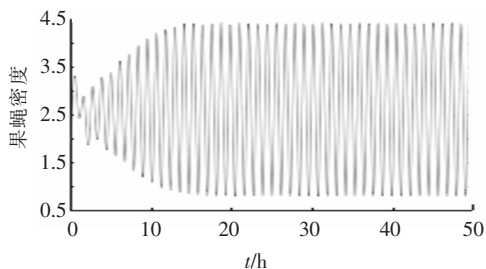


图 4 $\tau=0.3, \sigma=1.5$

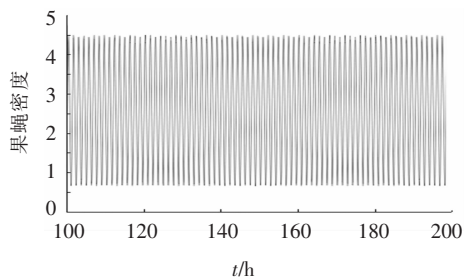


图 5 $\tau=0.3, \sigma=3.5$

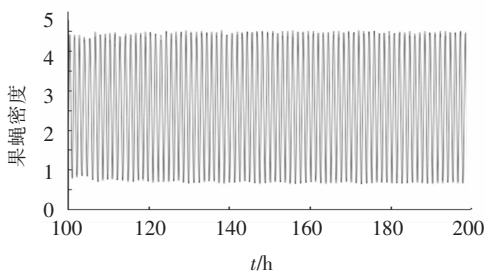


图 6 $\tau=0.3, \sigma=4$

图 7 为以 σ 为参数利用 MATLAB - DDE - BIFTOOL 软件得到的分支图, 从图 7 可以看出, 当 $\sigma > 22.143\ 5$ 时模型在正平衡点附近总会产生周期解.

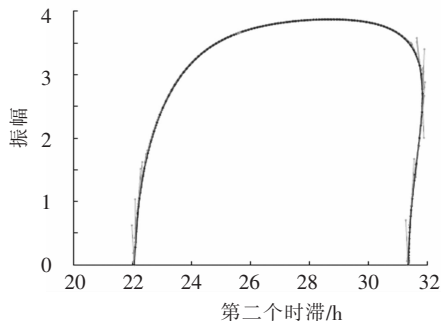


图 7 $\tau=0.3, \sigma=22.143\ 5$

从以上各图得到的结果有力地支持了前面两部分得到的理论结果.

4 结 语

通过对具双时滞的 Nicholson 果蝇动力系统的稳定性研究, 得到了正平衡点的稳定性、Hopf 分支的存在性以及正平衡点附近局部 Hopf 分支发生

的条件;并且运用了中心流形及规范型的理论讨论了在正平衡点附近局部 Hopf 分支的计算公式,以此讨论了局部 Hopf 分支的性质. 通过数值模拟,验证前面得到的理论结果,并得到了在正平衡点附近分支周期解的大范围存在性. 从以上的分析和实验可以看出,只有对生命体的成长过程加以保护,而且保护的时间足够长,才能使种群系统得以循环往复,生生不息. 生态系统亦如此.

参考文献:

- [1] GURNEY M S, BLYTHE S P, NISBEE R M. Nicholson's blowflies revisited[J]. *Nature*, 1980, 287:17 - 21.
- [2] KULENOVI M R S, LADAS G, SFICAS Y G. Global attractivity in Nicholson's blowflies[J]. *Appl Anal*, 1992, 43:109 - 124.
- [3] WENG P, LIANG M. Existence and global attractivity of periodic solution of a model in population dynamics[J]. *Acta Math Appl Sinica (English Ser)*, 1996 (12):427 - 434.
- [4] KOCIC V L J, LADAS G. Oscillation and global attractivity in a discrete model of Nicholson's blowflies[J].

Appl Anal, 1990, 38:21 - 31.

- [5] BEREZANSKY L, BRAVERMAN E, IDELS L. Nicholson's blowflies differential equations revisited: main results and open problems[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34:1405 - 1417.
- [6] WU J. Theory and applications of partial functional differential equations[M]. *Applied Mathematical Sciences* 119. New York: Springer, 1996:65 - 70.
- [7] HALE J. Theory to functional differential equations[M]. New York: Springer, 1977:20 - 180.
- [8] RUAN S, WEI J. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations[J]. *Dynam Cont Discr Impul Sys Series A: Math Anal*, 2003, 10: 863 - 874.
- [9] WEI J, LI Y. Hopf bifurcation analysis in a delayed Nicholson blowflies equation[J]. *Nonlinear Analysis*, 2005, 60: 1357 - 1367.
- [10] HASSARD B, KAZARINOFF N, WAN Y H. Theory and application of Hopf bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981:2 - 310.

(编辑 刘 彤)

(上接第 64 页)

参考文献:

- [1] 叶祖达. 生态城市 - 从概念到规划管理实施[J]. *城市规划*, 2008, 32(8): 15 - 20.
- [2] 刘京, 朱岳梅. 论城市与建筑环境的互动关系[J]. *建筑科学*, 2006, 22(6A): 10 - 12.
- [3] 汤慧君. 广州城市规划的气候条件分析[J]. *经济地理*, 2004, 24(4): 490 - 493.
- [4] 刘京, 姜安玺, 王琨, 等. 城市局地 - 建筑耦合气候, 舒适性及能量评价模型的开发与应用[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2006, 38(1): 38 - 40.
- [5] 朱岳梅, 刘京, 荻岛理, 等. 城市冠层模型的扩展与验证[J]. *建筑科学*, 2007, 23(2): 84 - 87.
- [6] SHAO Jiaotao, LIU Jing, ZHAO Jianing, *et al.* Field measurement of the convective heat transfer coefficient on vertical external building surfaces using naphthalene sublimation method[J]. *Journal of Building Physics*, 2010, 33(4): 307 - 326.
- [7] 香川治美, 林徹夫, 谷本潤, 等. 芝生植栽が都市熱環境に及ぼす影響に関する研究第 1 報 土壤の含水状態を考慮した芝生植栽の蒸発発散特性の定量的特定[J]. *日本建築学会計画系論文集*, 1998, 507(5): 7 - 12.
- [8] 近藤純正. 水面のバルク輸送係数[J]. *水文刃水資源学会誌*, 1992, 5(3): 50 - 55.

- [9] DAUDET F A, SILVERSTRE J, FERREIRA M I, *et al.* Leaf boundary layer conductance in a vineyard in Portugal[J]. *Agri Forest Met*, 1986, 89: 255 - 267.
- [10] 荻島理, 谷本潤, 片山忠久, 等. 二相系熱水分同時移動方程式による数値実験に基づく土壤物性値の同定都市熱環境評価のための地表面からの蒸発量の簡易計算手法に関する研究(第 2 報)[J]. *日本建築学会計画系論文集*, 2001, 540: 67 - 72.
- [11] 月松孝司, 片山忠久, 谷本潤, 等. 降水後の人工被覆面における蒸発比減衰モデルの提案(その 3) 蒸発比減衰モデルの改良[C]//日本建築学会学術講演梗概集, 郡山: 日本建築学会, 2000, D - 2: 351 - 352.
- [12] 王丽勉, 秦俊, 陈必胜, 等. 屋顶花园对建筑微气候的影响[J]. *中国农学通报*, 2006(2): 236 - 238.
- [13] 北京市规划委员会. DBJ 11 - 602 - 2006[S]. 北京: 中国标准出版社, 2007:10 - 12.
- [14] 李兆坚, 江亿, 魏庆芄. 北京市某住宅楼夏季空调能耗调查分析[J]. *暖通空调*, 2007, 37(4): 46 - 51.
- [15] 佟华, 刘辉志, 桑建国, 等. 城市人为热对北京热环境的影响[J]. *气候与环境研究*, 2004, 9(3): 409 - 421.
- [16] 中国气象局气象信息中心气象资料室. 中国建筑热环境分析专用气象数据集[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.
- [17] 中华人民共和国建设部. GB/T 50378 - 2006 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006:32.

(编辑 赵丽莹)