

饱和切换系统鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制

王 茂, 樊友高, 邱剑彬, 顾 玥

(哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 150001 哈尔滨, wangmao0451@sina.com)

摘 要: 研究一类具有饱和输入的多胞不确定性离散切换系统, 在平均驻留时间切换方式下的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制问题. 基于参数依赖间断切换 Lyapunov 函数和几个基本引理, 通过求解 LMI 最优问题, 设计出在平均驻留时间切换信号下, 使闭环系统达到局部指数稳定的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制器. 仿真结果表明了所提设计方法的有效性.

关键词: 切换系统; 参数依赖 Lyapunov 函数; 饱和执行器; 平均驻留时间

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2011)07-0012-07

Robust H_∞ static output feedback control of saturated uncertain discrete-time switched systems

WANG Mao, FAN You-gao, QIU Jian-bin, GU Yue

(Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China, wangmao0451@sina.com)

Abstract: The static output feedback control problem is studied for a class of discrete-time switched linear systems with polytopic uncertainties subject to actuator saturations. Based on a parameter-dependent discontinuous switched Lyapunov function and some basic lemmas, a switched robust H -infinity static output-feedback controller is designed to guarantee the locally exponential stability of the resulting closed-loop system under average dwell-time switching scheme by using a convex optimization problem subject to linear matrix inequalities (LMI) constraints. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed design approach.

Key words: switched systems; parameter-dependent Lyapunov function; actuator saturation; average dwell-time

切换系统是一类非常重要的混杂系统, 它由若干个子系统及作用在这些子系统切换规则构成^[1-2], 切换规则确定某个子系统何时被激活. 近年来对它的分析与控制设计引起了学者们的广泛关注, 文献[3]对近年来切换系统的研究内容和成果进行了综述. 研究切换系统的主要分析工具有多 Lyapunov 函数法^[1], 驻留时间和平均驻留时间法^[4]. 文献[4]提出的平均驻留时间法是一种非常有效的慢切换控制方法, 这种切换方法已经广泛的应用于切换系统的稳定性分析与控制器

设计里^[5]. 在实际工程系统中, 不确定性和执行器饱和问题是极其普遍的.

近年来, 为了解决实际问题, 处理不确定性和饱和问题越来越得到学者的重视. 其中对不确定性的处理, 文献[6]通过引入附加矩阵, 获得与系统中不确定参数相关联的 Lyapunov 函数, 以减小设计的保守性. 对于饱和问题的处理, 也取得了一些重要的研究成果^[7-8]. 以文献[7]为代表的局部分析方法, 能够充分利用饱和特性, 使得控制规律具有更低的保守性, 该方法被广泛应用于含饱和输入输出的切换系统分析和设计中^[9-11].

然而, 目前在切换系统研究领域, 同时考虑不确定性和饱和问题的文章鲜有报道. 特别是用平

收稿日期: 2010-07-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60904050).

作者简介: 王 茂(1965—), 男, 教授, 博士生导师.

均驻留时间方法来设计具有饱和输入的不确定离散切换系统的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制的文章还未见报道。

本文针对一类具有饱和输入的多胞不确定性离散切换系统,基于文献[7]对饱和问题的处理方法,设计出在平均驻留时间切换信号下,使闭环系统局部指数稳定的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制器。结果转化为 LMI,从而将抗饱和和静态输出反馈控制问题转化为 LMI 约束的凸优化问题,便于使用 MATLAB 仿真软件求解。

1 问题描述及预备知识

本文考虑的是一类含饱和输入的参变凸多面体不确定性离散切换系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{1\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\omega}(k) + \\ \quad \mathbf{B}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\text{sat}(\mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{L}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{2\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\omega}(k). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 为系统状态向量; $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为控制输入向量; $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^{n_y}$ 是系统测量输出向量; $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^{n_z}$ 是受控输出; $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}^{n_\omega}$ 为外部干扰,且定义 $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{n_\omega} : \|\boldsymbol{\omega}(k)\|_2^2 \leq \beta\}$; $\text{sat}(\cdot)$ 为标准饱和函数,即 $\text{sat}(u_i(k)) = \text{sgn}(u_i(k))\min\{1, |u_i(k)|\}$; 切换信号 $\delta(k)$ 简称为 δ , 是 1 个分段的时间常值函数,并在有限集 $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, N\}$ 中取值, $N \geq 2$ 为子系统个数。对于切换信号 $\delta(k)$, 当 $k \in [k_p, k_{p+1})$ 时, 切换序列 $\{x(k_0); (s_0, k_0), \dots, (s_p, k_p), \dots | s_p \in \mathcal{T}, p = 0, 1, \dots\}$ 表示第 s_p 个子系统被激活。 $\boldsymbol{\theta}(k) = [\theta_1(k) \ \dots \ \theta_M(k)]$ 是时变有界参数。此外, 当 $\delta(k) = i \in \mathcal{T}$ 时, 假设不确定系统矩阵 $[\mathbf{A}_i \ \mathbf{B}_i] \in \mathbf{R}_i$ 。其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= [\mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) \ \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) \ \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\theta}(k))], \\ \mathbf{A}_2 &= [\mathbf{L}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) \ \mathbf{D}_{1i}(\boldsymbol{\theta}(k)) \ \mathbf{D}_{2i}(\boldsymbol{\theta}(k))]. \end{aligned}$$

$\mathbf{R}_i$ 是 1 个给定的在第 i 个子系统上的由 M 个顶点组成的有界的凸多面体区域, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \{[\mathbf{A}_i \ \mathbf{A}_2] = \\ &\sum_{m=1}^M \boldsymbol{\theta}_m(k) [\mathbf{A}_{im} \ \mathbf{B}_{im} \ \mathbf{C}_{im} \ \mathbf{L}_{im} \ \mathbf{D}_{1im} \ \mathbf{D}_{2im}]; \\ &\sum_{m=1}^M \boldsymbol{\theta}_m(k) = 1, \boldsymbol{\theta}_m(k) \geq 0, i \in \mathcal{T}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

为方便表示, 记 $m \in S \triangleq \{1, 2, \dots, M\}$ 。

定义 1 在切换信号 $\delta(k)$ 作用下, 系统(1)的平衡点 $\mathbf{x}^* = 0$ 是指指数稳定的, 如果 $\mathbf{x}(k)$ 满足

$$\|\mathbf{x}(k)\| \leq \chi \cdot \zeta^{(k-k_0)} \|\mathbf{x}(k_0)\|, \forall k \geq k_0.$$

其中 $\chi > 0, 0 < \zeta < 1$ 且不确定性满足式(2)。

定义 2 对任意时刻 $k_u > k_v \geq k_0$, 用 $N_{\delta(k)}(k_v, k_u)$ 来表示在时间段 $[k_v, k_u]$ 上切换信号 $\delta(k)$ 的切换次数。如果存在 $N_0 \geq 0, T_a > 0$ 满足

$$N_{\delta(k)}(k_v, k_u) \leq N_0 + \frac{(k_u - k_v)}{T_a}.$$

则称 T_a 为平均驻留时间, N_0 称为抖颤界。通常, 选取 $N_0 = 0$ 。

给定如下静态输出反馈控制律:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_{\delta(k)}\mathbf{y}(k) = \mathbf{K}_{\delta(k)}\mathbf{C}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k). \quad (3)$$

则闭环系统为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{1\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\omega}(k) + \\ \quad \mathbf{B}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\text{sat}(\mathbf{K}_{\delta(k)}\mathbf{C}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k)), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{L}_{\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{2\delta(k)}(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\omega}(k). \end{cases} \quad (4)$$

定义 3 对任意给定 $\gamma > 0$ 且 $0 < \sigma < 1$, 如果系统(4)在零初始条件下对任意非零 $\boldsymbol{\omega} \in l_2[0, +\infty)$ 和所有合适的不确定参数满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sigma)^k \mathbf{z}^T(k)\mathbf{z}(k) < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\omega}^T(k)\boldsymbol{\omega}(k).$$

则闭环系统(4)是鲁棒指数稳定的且具有给定的 H_∞ 干扰抑制度 γ 。

给定矩阵 $\mathbf{F}_i \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}, i \in \mathcal{T}$, $f_{i\kappa}$ 表示矩阵 $\mathbf{F}_i$ 的第 κ 行, 定义对称多面体

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}_i) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_x} : |f_{i\kappa}\mathbf{x}| \leq 1, \kappa \in [1, n_u]\}.$$

对于所有的 $k \geq 0$, 如果 $\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}_i\mathbf{x}(k)$ 不在饱和区域, 则 $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{L}(\mathbf{F}_i)$ 。

定义 $\mathbf{R}^{n_x}$ 的子集为

$$\varepsilon(\mathbf{P}, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_x} : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \rho, \rho > 0\}. \quad (5)$$

其中, $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ 是正定矩阵, $\varepsilon(\mathbf{P}, \rho)$ 表示 1 个椭球体。当且仅当

$$\rho f_{i\kappa} \mathbf{P}^{-1} f_{i\kappa}^T \leq 1, \kappa = 1, 2, \dots, n_u,$$

椭球体 $\varepsilon(\mathbf{P}, \rho)$ 包含于多面体 $\mathcal{L}(\mathbf{F}_i)$ 。

假设 Γ 为 $n_u \times n_u$ 对角矩阵集, 且该集合中矩阵的元素只有 0 或 1。则该矩阵集合 Γ 中, 共有 2^{n_u} 个矩阵组成。设 E_l 为集合 Γ 中的元素, 其中 $l = 1, 2, \dots, 2^{n_u}$, 定义 $E_l^- = \mathcal{T}_{n_u} - E_l$ 。很明显, E_l^- 也是集合 Γ 中的元素。

引理 1^[7] 给定矩阵 $\mathbf{F}_i, \mathbf{H}_i \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$, 对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_x}$, 如果 $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_i)$, 则有

$$\text{sat}(\mathbf{F}_i\mathbf{x}) \in \text{co}\{\mathbf{E}_{il}\mathbf{F}_i\mathbf{x} + \mathbf{E}_{il}^-\mathbf{H}_i\mathbf{x} : l \in [1, 2^{n_u}]\}.$$

其中 co 表示凸包。故 $\text{sat}(\mathbf{F}\mathbf{x})$ 可以表示为

$$\text{sat}(\mathbf{F}_i\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{2^{n_u}} \eta_l(k) (\mathbf{E}_{il}\mathbf{F}_i + \mathbf{E}_{il}^-\mathbf{H}_i)\mathbf{x}.$$

其中, $\sum_{l=1}^{2^{n_u}} \eta_l(k) = 1, 0 \leq \eta_l(k) \leq 1$.

引理 2^[5] 考虑离散切换系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}_{\delta(k)}(\mathbf{x}(k)), \delta(k) \in \mathcal{T}$$

给定常数 $0 < \sigma < 1, \mu > 1$, 假设存在 1 个 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}(k)) = \{V_{\delta(k)}(\mathbf{x}), \delta(k) \in \mathcal{T}\}$, 满足下列不等式:

$$\Delta V_{\delta(k)}(\mathbf{x}(k)) = V_{\delta(k)}(\mathbf{x}(k+1)) - V_{\delta(k)}(\mathbf{x}(k)) \leq -\sigma V_{\delta(k)}(\mathbf{x}(k)), \forall k \in [k_p, k_{p+1}),$$

$$V_{\delta(k_p)}(\mathbf{x}(k_p)) \leq \mu V_{\delta(k_{p-1})}(\mathbf{x}(k_p)).$$

则系统对于任意满足平均驻留时间

$$T_a \geq T_a^* = \text{ceil}\left[-\frac{\ln \mu}{\ln(1-\sigma)}\right]. \quad (6)$$

的切换信号是全局指数稳定的. 其中, 函数 $\text{ceil}(v)$ 表示返回大于或等于给定的正数 v 最近的整数.

2 鲁棒性能分析

本文目的是在平均驻留时间切换信号下, 设计系统(1)的静态输出反馈控制器并估计吸引域. 首先分析闭环系统稳定性.

由引理 1 并考虑多胞不确定性, 如式(2)所述, 闭环系统式(4)可写为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{1i}(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\omega}(k) +$$

$$\begin{bmatrix} (1-\sigma)(\bar{\mathbf{X}}_{in} + \bar{\mathbf{X}}_{in}^T - \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k))) \\ 0 \\ \mathbf{L}_i(\boldsymbol{\theta}(k))\bar{\mathbf{X}}_{in} \\ \hat{\mathbf{A}}_i(\boldsymbol{\theta}(k))\bar{\mathbf{X}}_{in} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_j(\boldsymbol{\theta}(k_p)) - \mu \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k_p)) \leq 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{in} + \bar{\mathbf{X}}_{in}^T - \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) & * \\ z_{in\kappa} & \frac{1}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (11)$$

其中 $z_{in\kappa}$ 表示矩阵 $\mathbf{Z}_{in}$ 的第 κ 行, 则闭环系统(4)在满足式(6)的切换信号下, 对于任意 $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}(\mathbf{P}_i(\boldsymbol{\theta}(0)), \alpha)$ 有 $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{E}(\mathbf{P}_i(\boldsymbol{\theta}(k)), \alpha + \beta)$, $\forall k \geq 0, \boldsymbol{\omega} \in \Phi$ 且满足

$$\|\mathbf{z}\|_{l_2} < \gamma(\|\mathbf{w}\|_{l_2} + \sqrt{\alpha}). \quad (12)$$

其中 $\mathbf{P}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{m=1}^M \theta_m(k) \mathbf{P}_{im} = \mathbf{Q}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}(k))$.

证明 假设式(9)成立, 则对任意 $i \in \mathcal{T}$, 有

$\bar{\mathbf{X}}_{in} + \bar{\mathbf{X}}_{in}^T - \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) > 0$, 故 $\bar{\mathbf{X}}_{in}$ 为非奇异矩阵.

下面证明条件(11)可保证 $\mathcal{E}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(k)), \alpha + \beta) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{H}_{in})$, 其中 $\mathbf{H}_{in} = \mathbf{Z}_{in} \bar{\mathbf{X}}_{in}^{-1}$.

由 $\mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) > 0$, 可知

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) \sum_{l=1}^{2^r} \eta_l(\mathbf{E}_l \mathbf{K}_i \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{E}_l^- \mathbf{H}_{in}) \mathbf{x}(k) = \\ & \sum_{l=1}^{2^r} \eta_l [\mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\theta}(k))(\mathbf{E}_l \mathbf{K}_i \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) + \\ & \mathbf{E}_l^- \mathbf{H}_{in})] \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{1i}(\boldsymbol{\theta}(k)) \boldsymbol{\omega}(k) = \\ & \sum_{l=1}^{2^r} \eta_l \sum_{m=1}^M \theta_m(k) \sum_{n=1}^M \theta_n(k) [\mathbf{D}_{1im} \boldsymbol{\omega}(k) + \\ & (\mathbf{A}_{im} + \mathbf{B}_{im}(\mathbf{E}_l \mathbf{K}_i \mathbf{C}_{in} + \mathbf{E}_l^- \mathbf{H}_{in})) \mathbf{x}(k)]. \quad (7) \end{aligned}$$

为方便表示, 记

$$\hat{\mathbf{A}}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{l=1}^{2^r} \eta_l [\mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\theta}(k))(\mathbf{E}_l^- \mathbf{H}_{in} + \mathbf{E}_l \mathbf{K}_i \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\theta}(k)))],$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{ilmn} = \mathbf{A}_{im} + \mathbf{B}_{im}(\mathbf{E}_l \mathbf{K}_i \mathbf{C}_{in} + \mathbf{E}_l^- \mathbf{H}_{in}).$$

则式(4)可进一步写为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}_i(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{1i}(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{L}_i(\boldsymbol{\theta}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{2i}(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\omega}(k). \end{cases} \quad (8)$$

定理 1 考虑系统(1), 对于任意给定常数 $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \sigma < 1, \mu > 1$, 如果存在 $\gamma > 0$ 和矩阵 $0 < \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k)) = \mathbf{Q}_i^T(\boldsymbol{\theta}(k)) \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{Z}_{in} \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}$, $\bar{\mathbf{X}}_{in} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$, $i \in \mathcal{T}, n \in S$, 任意给定 $(i, j) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}, i \neq j$, 满足

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ \mathbf{I} & * & * \\ \mathbf{D}_{2i}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \gamma^2 \mathbf{I} & * \\ \mathbf{D}_{1i}(\boldsymbol{\theta}(k)) & 0 & \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

$$(\bar{\mathbf{X}}_{in} - \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k)))\mathbf{Q}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}(k))(\bar{\mathbf{X}}_{in} - \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k)))^T \geq 0.$$

也就是

$$\bar{\mathbf{X}}_{in}^T \mathbf{Q}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}(k)) \bar{\mathbf{X}}_{in} \geq \bar{\mathbf{X}}_{in} + \bar{\mathbf{X}}_{in}^T - \mathbf{Q}_i(\boldsymbol{\theta}(k)). \quad (13)$$

由式(12)且 $z_{in\kappa} = \mathbf{h}_{in\kappa} \bar{\mathbf{X}}_{in}$, 则由式(11)可推出

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{in}^T \mathbf{Q}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}(k)) \bar{\mathbf{X}}_{in} & * \\ \mathbf{h}_{in\kappa} \bar{\mathbf{X}}_{in} & \frac{1}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \geq 0.$$

其中, $\mathbf{h}_{in\kappa}$ 表示矩阵 $\mathbf{H}_{in}$ 的第 κ 行. 对上式矩阵两边左乘以 $\text{diag}\{\bar{\mathbf{X}}_{in}^T, \mathbf{I}\}$, 右乘以 $\text{diag}\{\bar{\mathbf{X}}_{in}^{-1}, \mathbf{I}\}$, 则上式等价于

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}(k)) & * \\ \mathbf{h}_{in\kappa} & \frac{1}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \geq 0.$$

而 $\mathbf{Q}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \mathbf{P}_i(\boldsymbol{\theta}(k))$, 上式也就得到

$$\begin{bmatrix} P_i(\theta(k)) & * \\ h_{i\kappa} & \frac{1}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}, \kappa \in [1, n_u]. \quad (14)$$

对(14)式应用 Schur 补引理, 得

$$h_{i\kappa}^T h_{i\kappa} \leq \frac{1}{\alpha + \beta} P_i(\theta(k)), \forall i \in \mathcal{I}, \kappa \in [1, n_u]. \quad (15)$$

由式(5) 知, 任意给定

$$x(k) \in \mathcal{E}(P_i(\theta(k)), \alpha + \beta),$$

有

$$x^T(k) \frac{P_i(\theta(k))}{\alpha + \beta} x(k) \leq 1.$$

$$\begin{bmatrix} (1 - \sigma) \bar{X}_{in}^T Q_i^{-1}(\theta(k)) \bar{X}_{in} & * & * & * \\ 0 & I & * & * \\ L_i(\theta(k)) \bar{X}_{in} & D_{2i}(\theta(k)) & \gamma^2 I & * \\ \hat{A}_i(\theta(k)) \bar{X}_{in} & D_{1i}(\theta(k)) & 0 & Q_i(\theta(k+1)) \end{bmatrix} > 0.$$

对上式矩阵两边左乘以 $\text{diag}\{\bar{X}_{in}^{-T}, I, I, I\}$, 右

结合式(14), 则可推出

$$\|h_{i\kappa} x(k)\| \leq 1, \forall \kappa \in [1, p], \forall x(k) \in \mathcal{E}(P_i(\theta(k)), \alpha + \beta).$$

式(15) 即表明 $\mathcal{E}(P_i(\theta(k)), \alpha + \beta) \subseteq \mathcal{L}(H_{in})$.

下面证明, 任意给定 $x(0) \in \mathcal{E}(P_i(\theta(0)), \alpha)$ 则有 $x(k) \in \mathcal{E}(P_i(\theta(k)), \alpha + \beta), \forall k \geq 0$ 且不等式(12) 成立.

考虑参数依赖间断切换 Lyapunov 函数

$$V_{\delta(k_p)}(k) \triangleq x^T(k) Q_{\delta(k_p)}^{-1}(\theta(k)) x(k), \quad k \in [k_p, k_{p+1}) \quad (16)$$

应用不等式(13), 则式(9)可推出

乘以 $\text{diag}\{\bar{X}_{in}^{-1}, I, I, I\}$, 则上式等价于

$$\begin{bmatrix} (1 - \sigma) Q_i^{-1}(\theta(k)) & * & * & * \\ 0 & I & * & * \\ L_i(\theta(k)) & D_{2i}(\theta(k)) & \gamma^2 I & * \\ \hat{A}_i(\theta(k)) & D_{1i}(\theta(k)) & 0 & Q_i(\theta(k+1)) \end{bmatrix} > 0. \quad (17)$$

对不等式(17)应用 Schur 补引理, 得

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i^T(\theta(k)) \\ D_{1i}^T(\theta(k)) \end{bmatrix} Q_i^{-1}(\theta(k+1)) [\hat{A}_i(\theta(k)) \quad D_{1i}(\theta(k))] + \frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} L_i^T(\theta(k)) \\ D_{2i}^T(\theta(k)) \end{bmatrix} [L_i(\theta(k)) \quad D_{2i}(\theta(k))] - \begin{bmatrix} (1 - \sigma) Q_i^{-1}(\theta(k)) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0.$$

对上式矩阵两边左乘以 $[x^T(k), \omega^T(k)]$, 右乘以 $[x^T(k), \omega^T(k)]^T$ 考虑式(8), 得到

$$V_{\delta(k_p)}(k+1) - (1 - \sigma) V_{\delta(k_p)}(k) < \omega^T(k) \omega(k) - \gamma^{-2} z^T(k) z(k). \quad (18)$$

对不等式(10) 应用 Schur 补引理并考虑式(16), 可得到

$$V_{\delta(k_p)}(k_p) - \mu V_{\delta(k_{p-1})}(k_p) \leq 0. \quad (19)$$

根据引理 3 和定义 3 以及文献[12]可知, 不等式(18) ~ (19) 可保证闭环系统(8) 在零初始条件下是鲁棒指数稳定的, 且具有鲁棒 H_∞ 抑度 γ .

由式(18) 和 $x(0) \in \mathcal{E}(P_i(\theta(0)), \alpha)$, 可以得到

$$V_{\delta(k_p)}(x(k)) < (1 - \sigma) V_{\delta(k_p)}(x(0)) +$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \omega^T(i) \omega(i) \leq (1 - \sigma) \alpha + \beta < \alpha + \beta. \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^k \|z(i)\|_2^2 < \gamma^2 \left(\sum_{i=0}^k \|\omega(i)\|_2^2 + (1 - \sigma) V_{\delta(k_p)}(x(0)) \right) < \gamma^2 \left(\sum_{i=0}^k \|\omega(i)\|_2^2 + V_{\delta(k_p)}(x(0)) \right). \quad (21)$$

不等式(20) 表明, 如果 $x(0) \in \mathcal{E}(P_i(\theta(0)), \alpha)$, 则 $x(k) \in \mathcal{E}(P_i(\theta(k)), \alpha + \beta), \forall k \geq 0$. 不等式(21) 表明

$$\|z\|_{l_2} < \gamma (\|w\|_{l_2} + \sqrt{\alpha}), \forall k \geq 0.$$

故定理得证.

3 控制器设计

假设 $C_{in}(i \in \mathcal{I}, n \in S)$ 是满秩的, 且存在矩阵 $T_{in}(i \in \mathcal{I}, n \in S)$, 满足

$$C_{in} T_{in} = [I \quad 0], i \in \mathcal{I}, n \in S. \quad (22)$$

基于该假设, 可以设计出鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制器. 对于每 1 个 C_{in} , 符合式(22) 的矩阵 T_{in} 并不是唯一的. 下面给出一组特殊的 T_{in} 形式^[14]:

$$T_{in} = [C_{in}^T (C_{in} C_{in}^T)^{-1} \quad C_{in}^\perp].$$

其中 $C_{in}^\perp$ 表示矩阵 C_{in} 核空间的正交基.

定理 2 考虑系统(1), 则对于任意给定常数 $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \sigma < 1, \mu > 1$, 如果存在 $\gamma > 0$ 和矩阵 $0 < Q_{im} = Q_{im}^T \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, Z_{in} \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}, i \in \mathcal{I}, m \in S, n \in S$ 以及矩阵 $X_{in} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$,

$$\begin{bmatrix} (1 - \sigma) \times (T_{in} X_{in} + X_{in}^T T_{in}^T - Q_{im}) & * & * & * \\ 0 & I & * & * \\ L_{im} T_{in} X_{in} & D_{2im} & \gamma^2 I & * \\ A & D_{1im} & 0 & Q_{ig} \end{bmatrix} > 0, \quad (23)$$

$$Q_{im} - \mu Q_{im} \leq 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} T_{in} X_{in} + T_{in}^T X_{in}^T - Q_{im} & * \\ z_{in\kappa} & \frac{1}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (25)$$

其中

$$A = A_{im} T_{in} X_{in} + B_{im} E_l Y_i + B_{im} E_l^- Z_{in}.$$

$z_{in\kappa}$ 表示矩阵 Z_{in} 的第 κ 行, 则在满足式(6)的切换信号下, 闭环系统(1)在静态输出反馈控制器(3)作用下具有满足(12)的鲁棒 H_∞ 性能指数 γ , 且控制器增益为

$$K_i = Y_i X_{1i}^{-1}, i \in \mathcal{I} \quad (26)$$

证明 该结论源于定理1, 选择

$$\bar{X}_{in} = T_{in} X_{in}. \quad (27)$$

参数依赖 Lyapunov 矩阵形式如下

$$\begin{bmatrix} (1 - \sigma) \left((\bar{X}_{in} + \bar{X}_{in}^T) - \sum_{m=1}^M \theta_m(k) Q_{im} \right) & * & * & * \\ 0 & I & * & * \\ \sum_{m=1}^M \theta_m(k) L_{im} \bar{X}_{in} & \sum_{m=1}^M \theta_m(k) D_{2im} & \gamma^2 I & * \\ \sum_{l=1}^{2r} \eta_l \sum_{m=1}^M \theta_m(k) \hat{A}_{ilmn} \bar{X}_{in} & \sum_{m=1}^M \theta_m(k) D_{1im} & 0 & \sum_{m=1}^M \theta_g(k) Q_{ig} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{l=1}^{2r} \eta_l \sum_{m=1}^M \theta_m(k) \sum_{m=1}^M \theta_g(k) \times \begin{bmatrix} (1 - \sigma) (\bar{X}_{in} + \bar{X}_{in}^T - Q_{im}) & * & * & * \\ 0 & I & * & * \\ L_{im} \bar{X}_{in} & D_{2im} & \gamma^2 I & * \\ \hat{A}_{ilmn} \bar{X}_{in} & D_{1im} & 0 & Q_{ig} \end{bmatrix} > 0. \quad (30)$$

由式(27)及式(30)得

$$\begin{bmatrix} (1 - \sigma) \times (T_{in} X_{in} + X_{in}^T T_{in}^T - Q_{im}) \\ 0 \\ L_{im} T_{in} X_{in} \\ \hat{A}_{ilm} T_{in} X_{in} \end{bmatrix} > 0. \quad (31)$$

式(30)中

$$\hat{A}_{ilmn} = A_{im} + B_{im} (E_l K_i C_{in} + E_l^- H_{in}).$$

则

$Y_i \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}, i \in \mathcal{I}, m \in S, n \in S$ 具有以下形式

$$X_{in} = \begin{bmatrix} X_{1i} & 0 \\ X_{2in} & X_{3in} \end{bmatrix}, \quad Y_i = [Y_{1i} \quad 0].$$

且满足:

$$\begin{cases} Q_i(\theta(k)) = \sum_{m=1}^M \theta_m(k) Q_{im}, \\ Q_i(\theta(k+1)) = \sum_{m=1}^M \theta_g(k+1) Q_{ig}. \end{cases} \quad (28)$$

则不等式(11)可化为

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{in} + \bar{X}_{in}^T - \sum_{m=1}^M \theta_m(k) Q_{im} & * \\ z_{in\kappa} & \frac{1}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{m=1}^M \theta_m(k) \begin{bmatrix} \bar{X}_{in} + \bar{X}_{in}^T - Q_{im} & * \\ z_{in\kappa} & \frac{1}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (29)$$

由式(27)和(29)可知 LMI(25) 成立. 基于式(28)则不等式(9)可化为

$$\hat{A}_{ilmn} T_{in} X_{in} = A_{im} T_{in} X_{in} + B_{im} E_l K_i C_{in} T_{in} X_{in} + B_{im} E_l^- H_i T_{in} X_{in}. \quad (32)$$

由式(22)和(26), 则式(32)可化为

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ilmn} T_{in} X_{in} &= A_{im} T_{in} X_{in} + B_{im} E_l^- H_{in} \bar{X}_{in} + \\ &B_{im} E_l K_i [I \quad 0] \begin{bmatrix} X_{1i} & 0 \\ X_{2in} & X_{3in} \end{bmatrix} = \\ &A_{im} T_{in} X_{in} + B_{im} E_l K_i [X_{1i} \quad 0] + B_{im} E_l^- Z_{in} = \\ &A_{im} T_{in} X_{in} + B_{im} E_l [K_i X_{1i} \quad 0] + B_{im} E_l^- Z_{in} = \\ &A_{im} T_{in} X_{in} + B_{im} E_l [Y_{1i} \quad 0] + B_{im} E_l^- Z_{in} = \end{aligned}$$

$$A_{im}T_{in}X_{in} + B_{im}E_lY_i + B_{im}E_l^-Z_{in} = A. \tag{33}$$

由式(32)和式(33)可知,LMI(23)成立. 由式(28)可知,不等式(10)很容易推出 LMI(24)成立. 综上,定理得证.

证毕.

为了求出抗饱和的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制器,根据定理 2,可以用以下 LMI 最优问题来求解:

$$\begin{aligned} &\min_{Q_{im} > 0, X_{in}, Y_i, Z_{in}} \gamma, \\ \text{s. t. } &(23) \sim (25). \end{aligned} \tag{34}$$

4 数值仿真

考虑不确定离散切换系统(1)由以下 2 个子系统组成,其中子系统 1 上的两组顶点矩阵为

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.84 & 0.31 \\ 0.52 & 0.70 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.52 \\ 0.31 & 0.80 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.1 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = [0.8 \quad 0.2],$$

$$C_{12} = [0.7 \quad -0.1],$$

$$L_{11} = [0.4 \quad -0.1],$$

$$L_{12} = [0.6 \quad 0.3],$$

$$D_{111} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$D_{112} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.4 \end{bmatrix},$$

$$D_{211} = 1.4, \quad D_{212} = 0.9.$$

在子系统 2 上的两组顶点矩阵为

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.50 \\ 0.40 & 0.70 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.20 \\ 0 & 0.62 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.0 \end{bmatrix},$$

$$C_{21} = [0.5 \quad 0],$$

$$C_{22} = [0.5 \quad 0.1],$$

$$L_{21} = [0.5 \quad -0.2],$$

$$L_{22} = [0.6 \quad 0.5],$$

$$D_{121} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$D_{122} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$D_{221} = 0.6,$$

$$D_{222} = -1.0.$$

本例中,所选系统均为开环不稳定的,且 $n_x = 2, n_u = 1, n_z = 2, n_w = 2, N = 2$. 选取 $\alpha = 0, \beta = 100, \sigma = 0.005$ 进行仿真,通过求解 LMI 最优问题(34) 可得出系统,在不同平均驻留时间下的控制器增益和鲁棒 H_∞ 抑度 γ ,如表 1 所示.

表 1 不同平均驻留时间下的控制器增益和鲁棒 H_∞

平均驻 留时间 T_a^*	μ	鲁棒 H_∞ 抑度 γ	抑度 γ	
			控制器增益 $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$	
1	1.005	19.078 1	$\begin{bmatrix} -0.089\ 9 & -0.130\ 3 \\ -0.101\ 3 & 0.399\ 5 \end{bmatrix}$	
10	1.050	9.922 6	$\begin{bmatrix} -0.087\ 7 & -0.130\ 3 \\ -0.105\ 4 & -0.393\ 8 \end{bmatrix}$	
20	1.100	7.988 4	$\begin{bmatrix} -0.080\ 4 & -0.131\ 5 \\ -0.095\ 2 & -0.394\ 7 \end{bmatrix}$	

选取满足 $\omega(k)$ 定义的干扰信号为 $\omega(k) = 10e^{-0.03k}\sin(0.02\pi k)$,选取状态变量 x 初始值为 $x_1(0) = 3.6, x_2(0) = -2.8$,由表 1 中求得的输出反馈控制器,可以得到闭环系统的控制曲线.

图 1 为切换系统不同平均驻留时间的切换信号;图 2 为饱和输入;图 3 为闭环系统在不同平均驻留时间切换信号下的状态响应曲线.

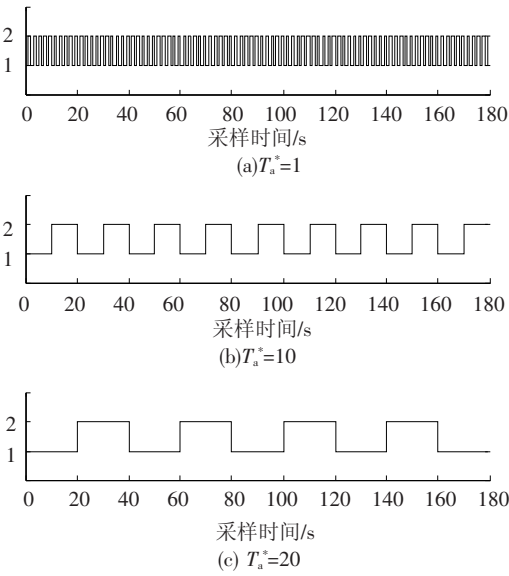


图 1 切换系统的切换信号

仿真表明,所设计的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制器可以保证闭环系统稳定.

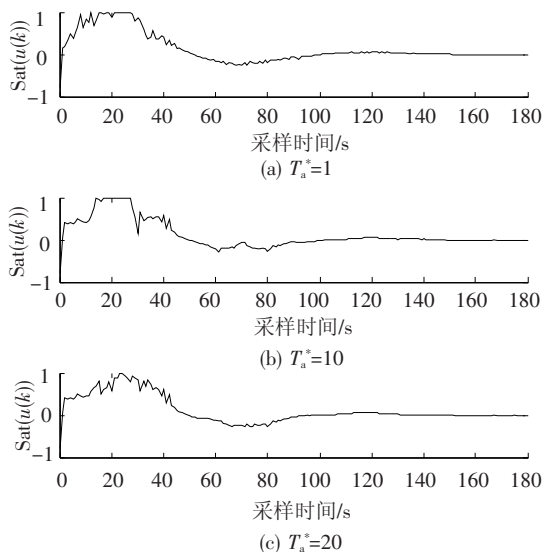


图2 不确定切换系统饱和输入曲线

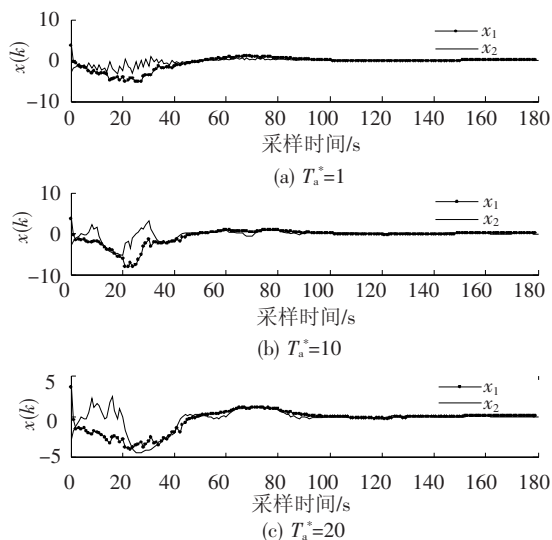


图3 闭环系统状态响应曲线

5 结 论

基于参数依赖间断切换 Lyapunov 函数以及几个基本引理,设计使饱和和不确定离散切换系统在平均驻留时间切换信号下,达到闭环局部指数稳定的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制器. 结果转化为 LMI 约束条件下的凸优化问题,通过求解 LMI 最优问题,证明了该方法的有效性.

参考文献:

[1] BRANICKY J P. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43 (4): 475 - 482.

[2] DECARLO R A, BRANICKY M S, PETTERSSON S. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems [J]. Proc of the IEEE, Special Issue on Hybrid Systems, 2000, 88(7): 1069 - 1082.

[3] SUN Z, GE S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems [J]. Automatica, 2005, 41 (2): 181 - 195.

[4] HESPANHA J P, MORSE A S. Stability of switched systems with average dwell time [C]//Proc of the 38th Conf on Decision & Control. Piscataway:IEEE, 1999, 3 (21): 2655 - 2660.

[5] ZHANG L X, BOUKAS E K, SHI P. Exponential H_∞ filtering for uncertain discrete-time switched linear systems with average dwell time: a μ -dependent approach [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2008, 18(11): 1188 - 1207.

[6] OLIVEIRA M C, BERNUSSOU J, GEROMEL J C. A new discrete-time robust stability condition [J]. Systems and Control Letters, 1999, 37(4): 261 - 265.

[7] HU T, LIN Z, CHEN B M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation [J]. Systems & Control Letters, 2002, 45(15): 97 - 112.

[8] CAO Y Y, LIN Z. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function [J]. Automatica, 2003, 39 (7): 1235 - 1241.

[9] BENZAOUIA A, SAYDY L, AKHRIF O. Stability and control synthesis of switched systems subject to actuator saturation [C]//Proc of the 2004 American Control Conf. Piscataway:IEEE, 2004, 6(17): 5818 - 5823.

[10] YU J Y, XIE G M, WANG L. Robust stabilization of discrete-time switched uncertain systems subject to actuator saturation [C]//Proc of the 2007 American Control Conf. Piscataway:IEEE, 2007: 2109 - 2112.

[11] MA Y M, YANG G H. Output feedback stabilization for switched systems subject to saturation nonlinearity [C]//Proc of the 2008 American Control Conf. Piscataway:IEEE, 2008: 1881 - 1886.

[12] QIU J B, GANG F, YANG J. Robust H_∞ static output feedback control of discrete-time switched polytopic linear systems with average dwell-time [J]. Science in China series F: Information Sciences, 2009, 52 (11): 2019 - 2031.

[13] DONG J, YANG G H. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties [J]. Systems & Control Letters, 2008, 57 (2): 123 - 131.