

# 拉伸载荷作用下无限大板中三角孔 - 裂纹问题

刘宝良, 闫相桥

(哈尔滨工业大学 航天学院, 150001 哈尔滨, yanxiangqiao406@163.com)

**摘要:** 针对 Bueckner 原理普遍化, 提出了一种求解远方载荷作用下无限大板中孔边裂纹问题的数值方法. 通过把适于单一裂纹的 Bueckner 原理扩充到远方载荷作用下无限大板中孔边裂纹问题, 将原问题分解为承受远方载荷不含孔边裂纹的均匀问题和在远方不承受载荷但在裂纹面上和孔的表面上承受面力的问题. 算例说明本数值方法对分析无限大板中孔边裂纹问题既简单又非常有效, 进而利用这种数值方法研究了拉伸载荷作用下无限大板中三角孔 - 裂纹问题. 通过改变孔的几何参数与无限大板中心裂纹问题的应力强度因子比较, 揭示了孔的几何参数对应力强度因子的影响, 发现孔对源于它的裂纹的应力强度因子具有屏蔽效应和放大效应, 这种屏蔽效应和放大效应随着孔的几何参数而变化.

**关键词:** 孔; 裂纹; 应力强度因子; 边界元; 裂尖单元; 位移不连续

**中图分类号:** O343.3

**文献标志码:** A

**文章编号:** 0367-6234(2011)07-0051-06

## Triangle hole-crack problem in infinite plate in tension

LIU Bao-liang, YAN Xiang-qiao

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China, yanxiangqiao406@163.com)

**Abstract:** By extending Bueckner's principle suited for a crack to a hole crack problem in infinite plate in tension, here, the original problem (the hole crack problem in infinite plate in tension) is divided into a homogeneous problem (the one without hole crack) subjected to remote loads and a hole crack problem in an unloaded body with applied tractions on the surfaces of hole and crack. Numerical results illustrate that the approach is very simple and effective for analyzing the hole crack problem in infinite plate in tension and by which a crack emanating from a triangle hole in infinite elastic plate in tension is analyzed in detail. The effect of hole geometry parameters on the stress intensity factors is revealed. It is found that a hole has a shielding and an amplifying effect on the stress intensity factors of crack emanating from the hole, and the shielding and amplifying effects varied with hole geometry parameters.

**Key words:** hole; crack; stress intensity factor; boundary element; crack-tip element; displacement discontinuity

由于孔边应力集中, 孔边很可能起源裂纹. 因此, 很多研究者<sup>[1]</sup>专注于孔边裂纹问题. 对单轴载荷作用下无限大板中源于圆孔的分支裂纹问题, 其典型解答由 Bowie<sup>[2]</sup>和 Newman<sup>[3]</sup>获得. 对单轴载荷作用下无限大板中源于椭圆孔的对称分支裂纹问题, Newman 利用边界配置法、Nisitani 等<sup>[4]</sup>利用体力法获得其数值解答. 对双轴载荷作用下无限大板中源于圆孔的分支裂纹, Tweed 等

利用 Mellin Transform Technique 获得其解答. 对单轴载荷作用下无限大板中源于三角孔或方孔分支裂纹问题, Murakami<sup>[5]</sup>利用体力法获得其数值解. 对内部压力载荷作用下无限大板中源于圆孔的分支裂纹问题, Newman 利用边界配置法获得其典型解答.

为此, 通过把 Bueckner 原理普遍化, 本文提出了一种求解远方载荷作用下无限大板中孔边裂纹问题的数值方法, 通过把适于单一裂纹的 Bueckner 原理<sup>[6]</sup>扩充到远方载荷作用下无限大板中孔边裂纹问题, 将原问题分解为承受远方载

收稿日期: 2010-03-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672046).

作者简介: 闫相桥(1959—), 男, 教授, 博士生导师.

荷不含孔边裂纹的均匀问题,和在远方不承受载荷但在裂纹面上和孔的表面上承受面力的问题.于是,以应力强度因子作为参量的问题可以通过考虑后者来解决,而利用文献[7]最近提出的杂交位移不连续法,这种孔边裂纹问题是很容易数值求解的.算例说明本数值方法对分析无限大板中孔边裂纹问题既简单又非常有效.进而利用这种数值方法研究了拉伸载荷作用下无限大板中三角孔-裂纹问题.本文通过改变孔的几何参数,通过与无限大板中心裂纹问题的应力强度因子比较,揭示了孔的几何参数对应力强度因子的影响.发现孔对源于它的裂纹的应力强度因子具有屏蔽效应(shielding effect)和放大效应(amplifying effect).这种屏蔽效应和放大效应随着孔的几何参数而变化.

## 1 Bueckner 原理普遍化

Bueckner 利用叠加原理得到一种重要结果,称为 Bueckner 原理.由外部载荷引起的裂纹的应力强度因子,可以通过考虑无外部载荷作用但裂纹面上承受面力的裂纹问题来确定,该面力与无裂纹几何体在外部载荷作用下在裂纹所在位置处产生的应力大小相等方向相反.

在这里,尝试将适于单一裂纹的 Bueckner 原理扩充到扩充到远方载荷作用下无限大板中孔边裂纹问题.为此,将原问题分解为承受远方载荷( $\sigma_{xx}^\infty, \sigma_{yy}^\infty, \sigma_{xy}^\infty$ )不含孔边裂纹的均匀问题,和在远方不承受载荷但在裂纹面上和孔的表面上承受面力的问题.在裂纹面上承受的面力与承受远方载荷不含孔边裂纹的均匀问题在该裂纹所在位置处产生的应力大小相等方向相反,即

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \sigma_{xx}^\infty \sin \phi \sin \phi - 2\sigma_{xy}^\infty \sin \phi \cos \phi + \\ \sigma_{yy}^\infty \cos \phi \cos \phi, \\ \sigma_{ns} = (\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty) \sin \phi \cos \phi + \\ \sigma_{xy}^\infty (\cos \phi \cos \phi - \sin \phi \sin \phi). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\phi$ 为裂纹面相对于 $x$ 轴的方位角; $\gamma$ 为把孔的表面上任意一点相对于 $x$ 轴的方位角,则作用于改点处的面力为

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \sigma_{xx}^\infty \sin \gamma \sin \gamma - 2\sigma_{xy}^\infty \sin \gamma \cos \gamma + \\ \sigma_{yy}^\infty \cos \gamma \cos \gamma, \\ \sigma_{ns} = (\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty) \sin \gamma \cos \gamma + \\ \sigma_{xy}^\infty (\cos \gamma \cos \gamma - \sin \gamma \sin \gamma). \end{cases} \quad (2)$$

当然,由式(2)定义的面力随孔的表面点不同而变化.

于是,以应力强度因子作为参量的问题可以通过考虑后者来解决,而利用 Yan<sup>[7]</sup>最近提出的杂交位移不连续法,这种孔边裂纹问题是很容易数值求解的.

## 2 杂交位移不连续法

### 2.1 常位移不连续单元

无限大平面体中在位置 $|x| < a, y = 0$ 处具有常位移不连续量 $D_i = (D_x, D_y)$ 的定义为

$$\begin{cases} D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+), \\ D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+). \end{cases} \quad (3)$$

式中: $|x| < a, y = 0$ .

此问题的解答是由 Crouch 等<sup>[8]</sup>获得的,位移场和应力场为

$$\begin{cases} u_x = D_x [2(1-v)F_3(x, y) - yF_5(x, y)] + \\ D_y [- (1-2v)F_2(x, y) - yF_4(x, y)], \\ u_y = D_x [(1-2v)F_2(x, y) - yF_4(x, y)] + \\ D_y [2(1-v)F_3(x, y) - yF_5(x, y)]. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2GD_x [2F_4(x, y) + yF_6(x, y)] + \\ 2GD_y [-F_5(x, y) + yF_7(x, y)], \\ \sigma_{yy} = 2GD_x [-yF_6(x, y)] + \\ 2GD_y [-F_5(x, y) - yF_7(x, y)], \\ \sigma_{xy} = 2GD_x [-F_5(x, y) + yF_7(x, y)] + \\ 2GD_y [-yF_6(x, y)]. \end{cases} \quad (5)$$

式中 $G$ 和 $\nu$ 分别为材料剪切模量和泊松比, Crouch 等利用式(4), (5)建立了常位移不连续边界元法.

### 2.2 裂尖位移不连续单元

基于式(4)~(5),提出了裂尖位移不连续单元(可分为左、右裂尖位移不连续单元)以模拟裂尖附近的应力奇异场.

对于左裂尖位移不连续单元,其位移不连续函数可取为

$$D_x = H_s \left( \frac{a_{\text{tip}} + \xi}{a_{\text{tip}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad D_y = H_n \left( \frac{a_{\text{tip}} + \xi}{a_{\text{tip}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

式中: $H_s$ 和 $H_n$ 分别为裂尖单元中点处的切相和法向位移不连续量; $a_{\text{tip}}$ 为裂尖单元长度的1/2.在这里注意到裂尖位移不连续单元与常位移不连续单元具有相同的未知量,即2个,但由式(6)定义的位移不连续函数可以模拟裂尖附近的位移场,从而可以模拟裂尖附近的应力奇异性.

基于式(4)~(5),根据微积分学的理论易于求得由式(6)定义的裂尖位移不连续函数引起的在点 $(x, y)$ 处的位移场和应力场为

$$\begin{cases} u_x = H_s[2(1-v)B_3(x,y) - yB_5(x,y)] + H_n[-(1-2v)B_2(x,y) - yB_4(x,y)], \\ u_y = H_s[(1-2v)B_2(x,y) - yB_4(x,y)] + H_n[2(1-v)B_3(x,y) - yB_5(x,y)]. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2GH_s[2B_4(x,y) + yB_6(x,y)] + 2GH_n[-B_5(x,y) + yB_7(x,y)], \\ \sigma_{yy} = 2GH_s[-yB_6(x,y)] + 2GH_n[-B_5(x,y) - yB_7(x,y)], \\ \sigma_{xy} = 2GH_s[-B_5(x,y) + yB_7(x,y)] + 2GH_n[-yB_6(x,y)]. \end{cases} \quad (8)$$

2.3 杂交位移不连续法的实施及其说明

Crouch 等利用式(4)~(5)建立了常位移不连续边界元法. 可类似地利用式(7)~(8)针对裂尖单元建立边界元方程, 进而把常位移不连续单元和裂尖位移不连续单元有机地结合在一起以建立一种对平面裂纹问题很有效的边界元法. 在该边界元方法的实施过程中, 左、右裂尖位移不连续单元分别置于裂纹的左、右裂尖处, 而常位移不连续单元则分布于除了裂尖位移不连续单元占据的位置之外的整个裂纹面及其它边界. 称这种边界元法为杂交位移不连续法.

杂交位移不连续法不同于 Scavia<sup>[9]</sup>提出的杂交边界元法. 当利用 Scavia 提出的杂交边界元法分析分支裂纹问题时, 计算量是巨大的. 而利用杂交位移不连续法, 可以既简单而又准确地处理分支裂纹问题<sup>[10-11]</sup>.

Pan<sup>[12]</sup>指出“常位移不连续法只适于无限大板中裂纹问题”. 本文发现杂交位移不连续法不仅适于分析无限大板裂纹问题<sup>[13-17]</sup>而且适于处理有限大板中复杂裂纹问题<sup>[18-19]</sup>.

孔洞裂纹问题、多裂纹问题一直是断裂力学中的重要课题. 利用杂交位移不连续法可以准确地处理这些问题<sup>[20-22]</sup>.

2.4 应力强度因子的计算公式

线弹性裂纹分析的主要目标是确定裂纹尖端的应力强度因子  $K_I$  和  $K_{II}$ . 基于裂尖附近的位移场, 有

$$K_I = -\frac{\sqrt{2\pi}GH_n}{4(1-v)\sqrt{a_{tip}}},$$

$$K_{II} = -\frac{\sqrt{2\pi}GH_s}{4(1-v)\sqrt{a_{tip}}}. \quad (9)$$

3 数值算例

下面通过 2 个数值算例说明本文提出的数值方法对分析无限大板中孔边裂纹问题既简单又非常有效.

**例 1** 拉伸载荷作用下无限大板中椭圆孔分支裂纹问题, 如图 1 所示. 对此裂纹问题, 关于  $x$  轴对称性条件是可以利用的. 考虑下列情况

$$\begin{aligned} c/a &= \{0.02, 0.05, 0.10, 0.20, 0.50, 1.00\}, \\ b/a &= \{0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.50, 2.00, 4.00\}. \end{aligned}$$

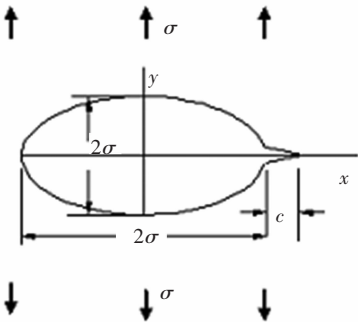


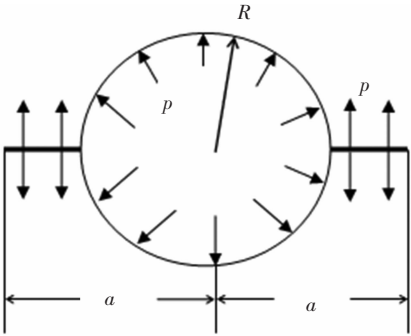
图 1 拉伸载荷作用下无限大板中椭圆孔分支裂纹问题

关于边界单元的划分, 在 1/2 椭圆孔上划分具有大致相同尺寸的 400 个单元, 在其他边界上按照所有单元具有大致相同尺寸的限制条件划分. 计算得到的归一化应力强度因子 (SIFs normalized by  $\sigma\sqrt{\pi c}$ ) 如表 1 所示. 为了比较起见, 表 1 列出了文献[1]报道的数值计算结果. 由表 1 可见本数值结果与文献[1]报道的数值计算结果非常一致.

表 1 拉伸载荷作用下无限大板中椭圆孔分支裂纹问题的归一化应力强度因子

| c/a  | b/a     |         |                     |         |         |                    |         |         |                    |         |
|------|---------|---------|---------------------|---------|---------|--------------------|---------|---------|--------------------|---------|
|      | 0.25    | 0.50    | 0.50 <sup>[1]</sup> | 0.75    | 1.0     | 1.0 <sup>[1]</sup> | 1.5     | 2.0     | 2.0 <sup>[1]</sup> | 4.0     |
| 0.05 | 4.533 9 | 4.013 8 | 4.043               | 3.437 3 | 3.003 5 | 3.037              | 2.460 4 | 2.154 4 | 2.180              | 1.686 6 |
| 0.10 | 3.315 7 | 3.248 5 | 3.256               | 3.013 1 | 2.759 3 | 2.772              | 2.363 8 | 2.106 6 | 2.120              | 1.660 4 |
| 0.20 | 2.392 5 | 2.456 5 | 2.460               | 2.443 3 | 2.368 8 | 2.374              | 2.171 6 | 1.999 4 | 2.007              | 1.630 0 |
| 0.50 | 1.594 3 | 1.637 0 | 1.640               | 1.686 3 | 1.723 7 | 1.728              | 1.745 8 | 1.720 0 | 1.726              | 1.549 1 |
| 1.00 | 1.227 8 | 1.244 6 | 1.248               | 1.270 9 | 1.302 2 | 1.306              | 1.362 8 | 1.405 0 | 1.410              | 1.422 1 |

**例 2** 内部压力作用下无限大板圆孔分支裂纹问题,如图 2 所示. 对此裂纹问题,关于  $x$  轴和  $y$  轴对称性条件是可以利用的. 考虑下列情况为

$$a/R = \{1.02, 1.04, 1.06, 1.08, 1.10, 1.15, 1.20, 1.25, 1.30, 1.40, 1.50, 1.60, 1.80, 2.00, 2.20, 2.50, 3.00\}.$$


**图 2** 内部压力载荷作用下无限大板中圆孔分支裂纹问题

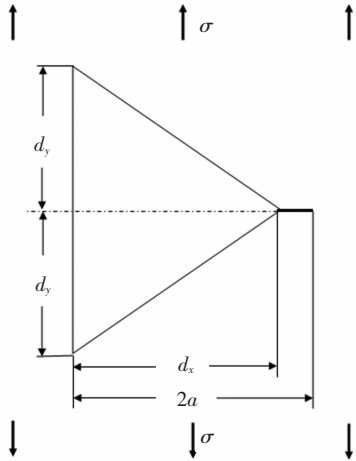
关于边界单元的划分,在  $1/4$  圆孔上划分具有大致相同尺寸的 200 个单元,在其他边界上按照所有单元具有大致相同尺寸的限制条件划分. 计算得到的归一化应力强度因子 (SIFs normalized by  $\sigma \sqrt{\pi a}$ ) 如表 2 所示. 为了便于比较,表 2 列出了文献[1] 报道的数值计算结果. 由表 2 可见本数值结果与文献[1] 报道的数值计算结果非常一致.

**表 2** 内部压力作用下无限大板圆孔分支裂纹问题的归一化应力强度因子

| $a/R$ | 归一化应力强度因子 |         |
|-------|-----------|---------|
|       | 本文        | 文献 [1]  |
| 1.02  | 0.296 3   | 0.305 8 |
| 1.04  | 0.412 3   | 0.418 3 |
| 1.06  | 0.491 5   | 0.495 8 |
| 1.08  | 0.551 7   | 0.555 1 |
| 1.10  | 0.599 9   | 0.602 5 |
| 1.15  | 0.687 8   | 0.689 8 |
| 1.20  | 0.747 9   | 0.749 4 |
| 1.25  | 0.791 6   | 0.792 9 |
| 1.30  | 0.824 7   | 0.825 9 |
| 1.40  | 0.871 1   | 0.872 3 |
| 1.50  | 0.901 6   | 0.902 9 |
| 1.60  | 0.922 8   | 0.924 2 |
| 1.80  | 0.949 6   | 0.951 3 |
| 2.00  | 0.965 1   | 0.967 0 |
| 2.20  | 0.974 7   | 0.976 8 |
| 2.50  | 0.983 2   | 0.985 5 |
| 3.00  | 0.989 9   | 0.992 7 |

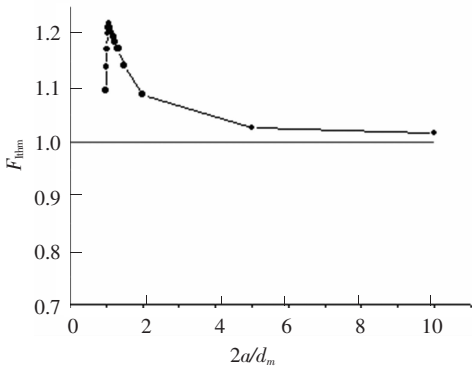
4 数值结果与讨论

利用提出的求解无限大板中孔 - 裂纹问题的数值方法,详细分析了拉伸载荷作用下无限大板三角孔 - 裂纹问题,如图 3 所示. 为了方便起见,首先考虑  $d_y = d_x = d$  情况. 若此种三角孔 - 裂纹问题的应力强度因子在数学上用  $K_{\text{th}}(a/d)$  表示,则它与中心裂纹问题(长度是  $2a$ ) 的应力强度因子( $K_{\text{lec}}$ ) 的比率( $F_{\text{th}}$ ) 为

$$F_{\text{th}} = K_{\text{th}}(a/d)/K_{\text{lec}} = K_{\text{th}}(a/d)/(\sigma \sqrt{\pi a}). \quad (10)$$


**图 3** 拉伸载荷作用下无限大板中三角孔 - 裂纹问题的示意图

式(10)称为归一化应力强度因子(normalized SIFs). 对于此种三角孔 - 裂纹问题,计算得到的归一化应力强度因子如图 4 所示.



**图 4** 拉伸载荷作用下无限大板中三角孔 - 裂纹问题的归一化应力强度因子

为了讨论方便引入一个参数  $a_d = 2a/d$ . 从图 4 可见:

- 1) 随着  $a_d$  的增加(亦即随着三角孔尺寸  $d$  的减小),  $F_{\text{th}}$  快速单调增加,并且在某一值  $a_d = a_{dm}$  处,  $F_{\text{th}}$  达到其最大值  $F_{\text{thm}}$ . 在这里,  $a_{dm} = 1.08$ ,  $F_{\text{thm}} = 1.219 6$ .
- 2)  $a_d$  的继续增加导致  $F_{\text{th}}$  开始快速减小,随后慢慢减小. 当  $a_d$  足够大时(亦即三角孔尺寸  $d$  相对于裂纹长度  $a$  足够小时),  $F_{\text{th}}$  几乎等于 1 (亦

即  $F_{lth}$  几乎等于  $K_{lcc}$ ).

因此, 可以看出三角孔对源于它的裂纹的应力强度因子具有放大效应 (amplifying effect), 但在本研究范围内, 未发现屏蔽效应 (shielding effect). 在趋势上, 应该也存在屏蔽效应.

通过变化三角孔的长细比  $d_y/d_x$ , 进而研究了三角孔的几何参数对应力强度因子的影响. 为此, 又考虑了 3 种情况:  $d_y/d_x = 0.5, d_y/d_x = 1.5$  和  $d_y/d_x = 2.0$ . 在这里, 三角孔 - 裂纹问题的应力强度因子在数学上可仍然用  $K_{lth}$  表示, 令其与中心裂纹问题 (长度是  $2a$ ) 应力强度因子的比率 ( $F_{lth}$ ), 则

$$F_{lth} = K_{lth}/K_{lcc} = K_{lth}/(\sigma \sqrt{\pi a}). \quad (11)$$

也称为归一化应力强度因子. 对于  $d_y/d_x = 0.5, d_y/d_x = 2.0$  及  $d_y/d_x = 1.0$  情况, 计算得到的归一化应力强度因子如图 5 所示. 发现对于  $b_y/b_x = 2.0$  情况, 屏蔽效应的确存在. 在这里, 重点讨论它的放大效应. 上面引入的无量纲参数  $a_{dm}$  和  $F_{lthm}$  如表 3 所示. 鉴于在已研究的  $d_y/d_x$  范围内,  $F_{lthm}$  随着  $d_y/d_x$  明显地变化, 又考虑了 2 种情况:  $d_y/d_x = 2.5$  和  $d_y/d_x = 3.0$ , 其  $a_{dm}$  和  $F_{lthm}$  计算结果也如表 3 所示.  $F_{lthm}$  随着  $d_y/d_x$  的变化如图 6 所示. 从表 3 和图 6 可作结论为: 随着  $d_y/d_x$  增大  $F_{lthm}$  而增加, 在  $d_y/d_x = 2.5$  时,  $F_{lthm}$  基本上达到其最大值.

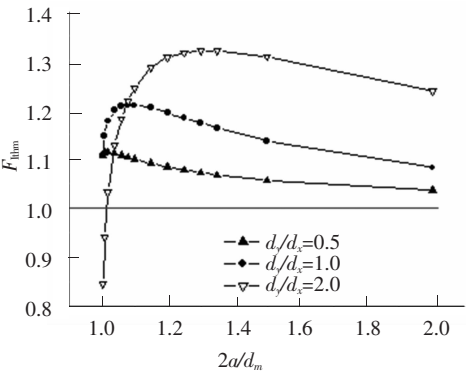


图 5 拉伸载荷作用下无限大板中三角孔 - 裂纹问题的归一化应力强度因子

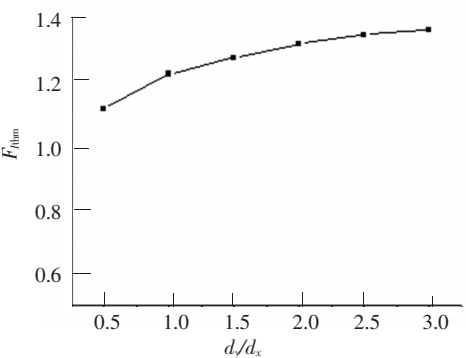


图 6  $F_{lthm}$  随着  $d_y/d_x$  的变化

表 3 无量纲参数  $a_{dm}$  和  $F_{lthm}$  随着  $d_y/d_x$  变化

| $d_y/d_x$ | $a_{dm}$ | $F_{lthm}$ |
|-----------|----------|------------|
| 0.5       | 1.02     | 1.110 7    |
| 1.0       | 1.08     | 1.219 6    |
| 1.5       | 1.20     | 1.270 4    |
| 2.0       | 1.30     | 1.312 5    |
| 2.5       | 1.40     | 1.341 9    |
| 3.0       | 1.53     | 1.355 8    |

5 结 论

1) 提出了求解无限大板孔边裂纹应力强度因子的一种数值方法, 算例说明本数值方法既简单又非常有效.

2) 利用这种数值方法研究了拉伸载荷作用下无限大板中三角孔 - 裂纹问题. 通过改变孔的几何参数, 与无限大板中心裂纹问题的应力强度因子比较, 揭示了孔的几何参数对应力强度因子的影响. 发现孔对源于它的裂纹的应力强度因子具有屏蔽效应和放大效应.

3) 随着  $d_y/d_x$  增大,  $F_{lthm}$  而增加, 在  $d_y/d_x = 2.5$  时,  $F_{lthm}$  基本上达到其最大值.

4) 在  $d_y/d_x = 2.5, a_{dm} = 1.4$  时,  $F_{lthm} = 1.341 9$ .

5) 对于一个中心裂纹板, 通过在裂纹板中割去一个三角孔, 使得三角孔的尺寸满足条件  $d_y/d_x = 2.5, a_{dm} = 1.4$ , 则可利用三角孔的放大效应来降低裂纹板的破坏载荷高达 34%.

参考文献:

[1] MURAKAMI Y. Stress Intensity Factors Handbook [M]. New York: Pergamon Press, 1987.

[2] BOWIE O L. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole [J]. J Math Phys, 1956(35): 60 - 71.

[3] Jr. NEWMAN J C. An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries [C]//National Aeronautics and Space Administration. Washington, DC: IEEE, 1971: 1 - 45.

[4] NISITANI H, ISIDA M. Simple procedure for calculating  $K_I$  of a notch with a crack of arbitrary size and its application to non-propagating fatigue crack [C]//Proceedings of the Joint JSME-SESA Conf On Experimental Mechanics. [S.l.]: [s.n.], 1982: 150 - 155.

[5] MURAKAMI Y. A method of stress intensity factor calculation for the crack emanating from an arbitrarily shaped hole or the crack in the vicinity of an arbitrarily

- shape hole [J]. Trans Japan Soc Mech Engrs, 1978, 44(378): 423–432.
- [6] BUCKNER H F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation [J]. ASME Appl Mech, 1958(80): 1225–1230.
- [7] YAN X. An efficient and accurate numerical method of SIFs calculation of a branched crack [J]. ASME J Appl Mech, 2005, 72(3): 330–340.
- [8] CROUCH S L, STARFIELD A M. Boundary Element Method in Solid Mechanics, with Application in Rock Mechanics and Geological Mechanics [M]. London: Geore Allon & Unwin, 1983: 1–220.
- [9] SCAVIA C. A numerical technique for the analysis of cracks subjected to normal compressive stresses [J]. Int J Num Methods Eng, 1992(33): 929–942.
- [10] YAN X. Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack tip displacement discontinuity elements [J]. Mechanics Research Communications, 2005, 32(4): 375–384.
- [11] YAN X. A numerical analysis of stress intensity factors at bifurcated cracks [J]. Engineering Failure Analysis, 2006, 13(4): 629–637.
- [12] PAN E. A general boundary element analysis of 2-D linear elastic fracture mechanics [J]. Int J Fract, 1997(88): 41–59.
- [13] YAN X. Analysis of the interference effect of arbitrary multiple parabolic cracks in plane elasticity by using a new boundary element method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192 (47/48): 5099–5121.
- [14] YAN X. A numerical analysis of perpendicular cracks under general in-plane loading with a hybrid displacement discontinuity method [J]. Mechanical Research Communications, 2004(31): 175–183.
- [15] YAN X. Interaction of arbitrary multiple cracks in an infinite plate [J]. J Strain Analysis for Engineering Design, 2004(39): 237–244.
- [16] YAN X. An effective boundary element method for analysis of crack problems in a plane elastic plate [J]. Appl Math Mech, 2005(26): 814–822.
- [17] YAN X. A numerical analysis of cracks emanating from a square hole in a rectangular plate under biaxial loads [J]. Eng Fracture Mech, 2004 (71): 1615–1623.
- [18] YAN X. A numerical analysis of cracks emanating from an elliptical hole in a 2-D elasticity plate [J]. European J of Mechanics-A, 2006, (25): 142–153.
- [19] YAN X. Cracks emanating from circular hole or square hole in rectangular plate in tension [J]. Eng Fracture Mech, 2006, 73(12): 1743–1754.
- [20] YAN X. Microdefect interacting with a finite main crack [J]. J Strain Analysis for Engineering Design, 2005(40): 421–430.
- [21] YAN X. A brief evaluation of approximation methods for microcrack shielding problems [J]. ASME J Appl Mech, 2006, 73(4): 694–696.
- [22] YAN X. An effective numerical approach for multiple void-crack interaction [J]. ASME J Appl Mech, 2006, 73(4): 525–535.

(编辑 张 红)