

升力式再入飞行器多约束多阶段弹道优化设计

黄育秋, 何麟书

(北京航空航天大学 宇航学院, 100191 北京, huangyuqiu13@163.com)

摘要: 结合再入飞行器实际任务需要, 以升力式再入飞行器机动突防弹道优化设计为研究目的, 给出了多约束多阶段弹道优化模型, 研究了弹道优化数值解法理论, 将该多约束多阶段优化问题的多个阶段弹道优化模型统一于1个优化算法; 采用直接法+序列二次规划法解该优化问题, 得到了满足相应约束的再入机动突防弹道. 仿真结果表明, 采用该方法能够进行升力式再入飞行器的再入机动突防弹道的优化设计, 并具有较好的效果.

关键词: 再入飞行器; 多约束多阶段弹道优化; 机动突防; 直接法; 序列二次规划

中图分类号: V412

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2011)07-0144-05

Multi-constraints and multi-phases trajectory optimization of lift reentry vehicle

HUANG Yu-qiu, HE Lin-shu

(Dept. of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 100191 Beijing, China, huangyuqiu13@163.com)

Abstract: In this paper, a maneuvering penetration optimization for trajectory of lift reentry vehicle is researched. At first, a model for this problem is proposed and its trajectory optimization theory is studied, and then the multi-constraints and multi-phases trajectory optimization is unified in an optimization algorithm. The direct method and sequential quadratic programming algorithm are used to solve the trajectory optimization problem, and finally the maneuvering penetration optimization trajectory which satisfies corresponding constraint is obtained. The simulation results show that the model proposed in this paper is reasonable and feasible with good results.

Key words: reentry vehicle; multi-constraints and multi-phases trajectory optimization model; maneuvering penetration; direct method; sequential quadratic programming

传统的弹道式再入飞行器和弹道-升力式再入飞行器存在两大缺点, 即存在造成再入器及其有效载荷损伤的着陆冲击过载和由于各种干扰造成的不易控制的大落点散布^[1]. 升力式再入飞行器的出现有效的克服了这两种缺点, 是航天技术取得的巨大进步. 升力式再入飞行器和传统的再入飞行器相比, 升力式再入飞行器升力的增大和可调整, 大大增加了飞行器机动飞行的能力. 平缓的再入段和大范围的机动飞行能力, 使升力式再入飞行器水平着陆到指定机场跑道和实现全球快速打击成为可能, 正因为如此, 升力式再入飞行器具有重要的经济和军事意义.

1940年末到1950年初, 苏联进行了Silbervogel飞行器的风洞试验, 并积累丰富的试验数据. 1960年中期, Mikyan设计局设计了自己的升力式再入飞行器Mig-105. 最近, 俄罗斯已秘密研制了新型再入机动飞行的白杨-M导弹^[2].

由于升力式再入飞行器的飞行速度较快, 飞行空域较大, 飞行环境复杂, 其弹道优化需要考虑控制、动压、过载、气动热等限制, 成为总体设计中的1个难点. 且随着导弹防御系统的日臻完善, 再入飞行器的弹道设计还必须考虑实际作战需求. 再入飞行器要顺利地飞向目标, 必须能够避开勿入区域, 突破敌方拦截区域, 且经过设定路径点, 如图1所示.

勿入区域是指由于地理或政治等原因, 再入飞行器不得飞入的领空. 路径点是指为了搜索目

收稿日期: 2010-06-18.

作者简介: 黄育秋(1968—), 女, 博士研究生;

何麟书(1938—), 男, 教授, 博士生导师.

标或制导导航等需求而设定的弹道必经地理位置.再入飞行器必须精确飞经此点,且时间可不作约束.拦截区域是指敌方拦截弹等的杀伤范围.在拦截导弹杀伤区域内,拦截弹可以捕获再入飞行器,预测其飞行弹道,并实施拦截.在此拦截区域内,再入飞行器可进行一定的规避机动,以降低敌方对弹道的预测精度,减小拦截概率.再入飞行器的规避机动可根据拦截导弹的飞行能力和敌方拦截态势等选择适当时机进行^[2-3].

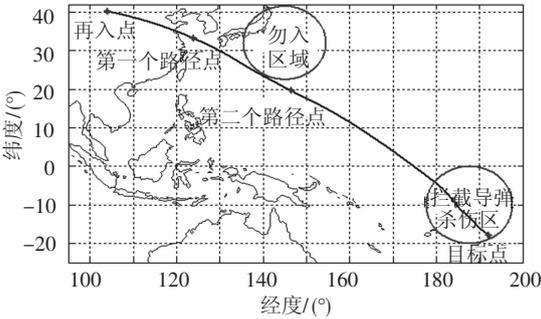


图1 突防弹道示意

由图1可见,考虑突防约束情况下,再入飞行器的再入机动突防弹道主要分为:飞抵第1个路径点阶段、绕过勿入区域飞抵第2个路径点阶段、滑翔至敌方导弹拦截区阶段、拦截区内机动飞行至目标上空阶段、下压攻击目标阶段.在这些限制条件下,升力式再入飞行器的再入机动突防弹道优化设计实际上是1个复杂的多约束多阶段弹道优化问题.

本文首先建立了升力式再入飞行器再入机动突防的多约束多阶段弹道优化模型,研究了飞行器轨迹优化问题的数值解法.在此基础上选择直接法将该轨迹优化问题转化成参数优化问题,而后采用序列二次规划法来解该参数优化问题,最后采用C++语言编写了优化算法,在特定参数下,进行了仿真分析.

1 复杂多约束多阶段弹道优化模型

1.1 飞行器再入动力学模型

考虑地球自转和地球扁率的情况下,再入飞行器的动力学模型为^[1]

$$\dot{V} = -(X - P \cos \alpha) / m + g'_r \sin \gamma + g_{\omega_e} (\sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \cos \phi \sin \psi) + \omega_e^2 r \cos \phi (\sin \gamma \cos \phi - \cos \gamma \sin \phi \sin \psi),$$

$$\dot{\gamma} = (Y + P \sin \alpha) \cos \sigma / mV + g'_r \cos \gamma / V + Vr \cos \gamma / 2\omega_e \cos \phi \cos \psi + (g_{\omega_e} / V) (\cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \cos \phi \sin \psi) + \omega_e^2 r \cos \phi / V (\cos \gamma \cos \phi + \sin \gamma \sin \phi \sin \psi),$$

$$\dot{\psi} = (Y + P \sin \alpha) \sin \sigma / mV \cos \gamma + (g_{\omega_e} /$$

$$V \cos \gamma) \cos \phi \cos \psi - (V/r) \cos \gamma \cos \psi \tan \phi + 2\omega_e (\cos \phi \sin \psi \tan \gamma - \sin \phi) - (\omega_e^2 r / V \cos \gamma) \cos \psi \sin \phi \cos \phi,$$

$$\dot{r} = V \sin \gamma,$$

$$\dot{\theta} = V \cos \gamma \cos \psi / r \cos \phi,$$

$$\dot{\phi} = V \cos \gamma \sin \psi / r.$$

其中: V 、 γ 、 ψ 、 r 、 θ 、 ϕ 、 σ 、 α 、 P 、 X 、 Y 、 ω_e 、 g'_r 、 g_{ω_e} 、 m 分别为飞行器相对地球的速度、飞行路径角、航向角、地心距、经度、纬度、倾斜角、攻角、推力、气动阻力、气动升力、地球自转角速度、引力加速度在地心矢径 r 上的投影、引力加速度在地球自转角速度 ω_e 上的投影、飞行器质量.航向角 ψ 是速度矢量 V 在当地水平面上的投影线顺时针与纬度切线正东方向的夹角.

1.2 机动突防弹道约束模型

升力式再入飞行器的飞行环境非常复杂,涉及诸多实际问题,弹道设计时必须综合考虑诸多实际约束,同时其机动突防弹道还需考虑如图1中的突防约束,下面将分别阐述.

1) 终端约束.升力式再入飞行器是一种远程精确制导武器,用以摧毁敌方高价值目标.终端约束用以表示其攻击目标时的状态等,相应的终端约束取为

$$h(t_f) = 0, \quad |\gamma(t_f)| \geq C_1,$$

$$V(t_f) \geq C_2, \quad \alpha(t_f) = C_3.$$

其中: h 为距地高度; t_f 为飞行器飞行总时间,是一优化参数; C_1 、 C_2 、 C_3 为根据打击需要而给定的常数.同时,给定了地面目标的具体地理位置时,相应的终端位置约束为

$$\theta(t_f) = \theta_f, \quad \phi(t_f) = \phi_f.$$

其中 θ_f 表示目标经度, ϕ_f 表示目标纬度.

2) 控制量约束.由于飞行器结构与姿态控制系统设计的限制,飞行器飞行时的攻角不能过大,且变化不能过于剧烈,以免飞行失控.同理,为了满足飞行器的控制要求,其攻角与倾侧角的大小及其变化率也应加以限制.

$$|\alpha(t)| \leq C_4, t_0 \leq t \leq t_f,$$

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq C_5, t_0 \leq t \leq t_f,$$

$$|\sigma(t)| \leq C_6, t_0 \leq t \leq t_f,$$

$$|\dot{\sigma}(t)| \leq C_7, t_0 \leq t \leq t_f.$$

其中: t_0 为飞行器再入初始时刻,可取为零; α 表示攻角变化率; σ 表示倾侧角变化率; $C_4 \sim C_7$ 为给定常数.

3) 动压约束.动压极值主要取决于热防护材料强度与气动控制铰链矩.从防热系统设计来说,飞行器表面均采用耐高温绝热材料,以保证飞

飞行器飞行过程中内部结构所受到的加热量最小和在高温加热时保持应有的气动外形. 这些材料直接面对来流作用, 因此, 动压必须限制在一定范围内, 以确保表面绝热材料结构不受破坏. 气动控制铰链力矩随动压的增加而增大, 动压也应保证不超过控制气动操纵面所要求的最大铰链力矩所允许的动压. 同时对动压加以限制也可以在一定程度上保证飞行器侧向飞行稳定.

因此, 为了满足升力式再入飞行器的结构设计与控制要求, 相应的动压 q 约束为

$$q(t) = \rho V^2 / 2 \leq C_8, t_0 \leq t \leq t_f.$$

式中 C_8 为给定常数.

4) 法向过载约束. 法向过载最大值主要取决于飞行器的结构强度和弹载设备的承受范围. 为了满足临近空间飞行器的结构设计要求, 相应的法向过载 n_y 约束为

$$|n_y(t)| = \left| \frac{P \cdot \sin \alpha + Y}{m \cdot g} \right| \leq C_9, t_0 \leq t \leq t_f.$$

式中 C_9 为给定常数.

5) 气动热约束. 升力式再入飞行器的长时间大气层内高速飞行将产生非常高的气动加热率与壁温. 由于升力式再入飞行器一般采用小攻角飞行, 气动加热最严重的部位为飞行器的鼻头与翼前缘. 为了便于研究, 弹道优化时可以仅考虑鼻头气动热问题. 为确保气动热不超过壁面材料容忍限度, 飞行器鼻头驻点热流与壁温约束取作

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\text{conv}}(t) &\leq C_{10}, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \\ T_w(t) &\leq C_{11}, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \end{aligned}$$

其中 C_{10} 、 C_{11} 为给定常数.

6) 突防约束. 如前所述, 由于导弹防御系统的出现, 升力式再入飞行器的弹道优化必须考虑实际作战需求. 升力式再入飞行器要顺利地飞向目标, 必须能够避开勿入区域, 突破敌方拦截区域, 且经过设定路径点.

为避免进入敌方领空或拦截范围, 飞行器不得进入勿入区域飞行, 将此约束取为

$$\sqrt{(\theta(t) - C_{12})^2 + (\phi(t) - C_{13})^2} \geq C_{14}.$$

其中 $0 \leq t \leq t_f$. 拦截导弹杀伤区可取作地理约束, 即

$$\sqrt{(\theta(t) - C_{15})^2 + (\phi(t) - C_{16})^2} \leq C_{17}.$$

其中 $t_{M0} \leq t \leq t_{Mf}$. 此杀伤区内的机动形式可以设定为“S”形侧向程序机动, 相应的倾侧角变化规律取为

$$\sigma(t) = \sigma_1(t_{M0}) + a_1 \sin(4\pi t / T_M). \quad (1)$$

其中: $t_{M0} \leq t \leq t_{Mf}$; $T_M = (t_{Mf} - t_{M0})$, t_{M0} 表示飞行器飞入拦截导弹杀伤区的时刻, 是一优化参数, t_{Mf}

表示程序机动结束时刻, 也指俯冲段开始时刻, 是一优化参数. 式(1)中, 等号右端第 1 项为未加入姿态扰动时的倾侧角变化规律; 第 2 项为相应的姿态扰动, a_1 为机动幅值, 即飞行器在导弹拦截区域内进行 2 个最大幅度为 a_1 的正弦机动.

为了保证升力式再入飞行器准确经过指定路径点, 将路径点约束取为

$$\begin{aligned} \theta(t_{\text{pass}1}) &= C_{18}, \quad \phi(t_{\text{pass}1}) = C_{19}, \\ \theta(t_{\text{pass}2}) &= C_{20}, \quad \phi(t_{\text{pass}2}) = C_{21}. \end{aligned}$$

其中 $t_{\text{pass}1}$ 、 $t_{\text{pass}2}$ 分别表示经过第 1 个、第 2 个路径点的时刻, 是优化参数. 以上公式中 $C_{12} \sim C_{21}$ 为给定常数^[3].

同时, 现代防空武器的有效拦截高度多在 30 km 以下. 因此, 为了更好地突破敌方防空火力网, 飞行器在俯冲攻击之前, 飞行高度也应予以限制, 即 $h \geq 30 \text{ km}$, $t_0 \leq t \leq t_{D0}$. 其中 t_{D0} 为俯冲前某特定时刻.

2 飞行器轨迹优化理论

多阶段优化问题是指, 优化模型包含多个状态阶段, 各阶段之间依靠时间、状态量衔接, 并同时优化. 多约束多阶段优化问题可将多个阶段的弹道优化模型统一于 1 个优化算法下, 同时进行解算, 从而提高了优化模型的通用性. 本文采用直接法将该轨迹优化问题转化成参数优化问题, 而后采用序列二次规划法来解该参数优化问题, 下面将阐述其相关理论.

2.1 轨迹优化问题的一般描述

轨迹优化问题一般可以描述为, 确定容许控制 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 和参量 $p \in \mathbf{R}^{n_p}$, 使得由 1 个微分方程组确定的系统, 从给定的初始状态过渡到终端状态, 并使性能指标函数 J 达到最小, 同时满足规定的约束. 其数学描述如下^[4-8]:

$$J = \Phi(x(t_f), p) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, p, t) dt. \quad (2)$$

满足

$$\dot{x} = f(x, u, p, t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3)$$

$$c(x, u, p, t) = 0, \quad (4)$$

$$d(x, u, p, t) \leq 0, \quad (5)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (6)$$

$$\psi(x(t_f), p) = 0. \quad (7)$$

其中 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, 表示系统的状态变量, t 表示时间变量. 标量性能指标函数 J , 由末值型性能指标函数 $\Phi(x(t_f), p)$ 和积分型性能指标函数组成, 其被积函数为 $L(x, u, p, t)$, 并且积分是从 t_0 时刻到 t_f 时刻. 方程组(3)表示系统状态方程, 方程组

(4) 表示状态变量、控制变量和参量的等式约束, 方程组(5) 表示状态变量、控制变量和参量的不等式约束, 方程组(6) 表示状态变量的初始条件, 方程组(7) 表示状态变量和参量的终端条件.

2.2 参数化过程

1) 划分时间区间 $[t_0, t_f]$ 为 N 个子区间, 节点为 t_i , 即 $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f$.

2) 控制变量的参数化. 在每个子区间 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) 里, 将控制变量近似为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i). \quad (8)$$

其中: $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^m$, 表示在 t_i 时刻的控制变量值; $\mathbf{u}_{i+1} \in \mathbf{R}^m$, 表示在 t_{i+1} 时刻的控制变量值. 利用分段线性近似方程(8), 未知的控制变量 $\mathbf{u}(t)$ 被 $m(N + 1)$ 个未知的控制参数 $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N$ 代替, 因此, 所有的未知参数可以组成 1 个向量 $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^{m(N+1)+n_p}$.

3) 价值函数、约束函数的参数化. 假设给定了 1 个猜测的控制输入量和参量, 即 $\bar{\mathbf{u}}$, 在初始条件方程(6) 下, 从 t_0 时刻到 t_f 时刻积分状态方程组(3), 得到的状态变量随时间的变化历程可以表示为 $\mathbf{x}(\bar{\mathbf{u}}, t)$, 也就是说, 利用控制输入量和参量可以唯一地确定状态量, 进而得到价值函数 J 以及约束 c, d, ψ , 据此约束可以离散成 1 个等式约束向量 $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^{n_c(N+1)+n_f}$ 和不等式约束向量 $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^{n_d(N+1)}$.

用上述的参数化策略, 有限维的最优控制问题, (即方程组(2) ~ (7)) 被近似化为有限维的非线性规划问题^[9-10], 即

$$\begin{aligned} & \min J(\bar{\mathbf{u}}). \\ & \text{s. t.} \\ & \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad \mathbf{h}(\bar{\mathbf{u}}) \leq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

2.3 序列二次规划法

方程(9) 所表示的非线性规划问题可以采用如下序列二次规划方法求解:

$$\begin{aligned} & \min 0.5 \mathbf{d}^T \mathbf{B}^k \mathbf{d} + \nabla J(\bar{\mathbf{u}}^k)^T \mathbf{d}. \\ & \text{s. t.} \\ & \nabla \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{u}}^k)^T \mathbf{d} + \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{u}}^k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e. \\ & \nabla \mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{u}}^k)^T \mathbf{d} + \mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{u}}^k) \leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m. \\ & \bar{\mathbf{u}}^{k+1} = \bar{\mathbf{u}}^k + \mathbf{d}^k. \end{aligned}$$

其中梯度向量 $\nabla J(\bar{\mathbf{u}}^k)^T, \nabla \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{u}}^k)^T, \nabla \mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{u}}^k)^T$ 可以通过差分的方法求得, 且有

$$\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^k + \frac{\mathbf{y}^k (\mathbf{y}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{s}^k} - \frac{\mathbf{B}^k \mathbf{s}^k (\mathbf{s}^k)^T \mathbf{B}^k}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k}.$$

式中:

$$\mathbf{s}^k = \bar{\mathbf{u}}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}^k,$$

$$\mathbf{y}^k = \begin{cases} \mathbf{y}^k, & (\mathbf{s}^k)^T \mathbf{y}^k \geq 0.2 (\mathbf{s}^k)^T \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k; \\ \theta^k \mathbf{y}^k + (1 - \theta^k) \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^k &= \nabla J(\bar{\mathbf{u}}^{k+1}) - \nabla J(\bar{\mathbf{u}}^k) + \sum_{i=1}^{m_e} \lambda_i^{k+1} [\nabla \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{u}}^{k+1}) - \\ & \nabla \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{u}}^k)] + \sum_{i=m_e+1}^m \lambda_i^{k+1} [\nabla \mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{u}}^{k+1}) - \nabla \mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{u}}^k)]. \\ \theta^k &= \frac{0.8 (\mathbf{s}^k)^T \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k - (\mathbf{s}^k)^T \mathbf{y}^k}. \end{aligned}$$

矩阵 \mathbf{B}^k 的初值 \mathbf{B}^0 一般取为单位阵, 即 $\mathbf{B}^0 = \mathbf{I}^{[11-14]}$. 其算法流程如图 2 所示.

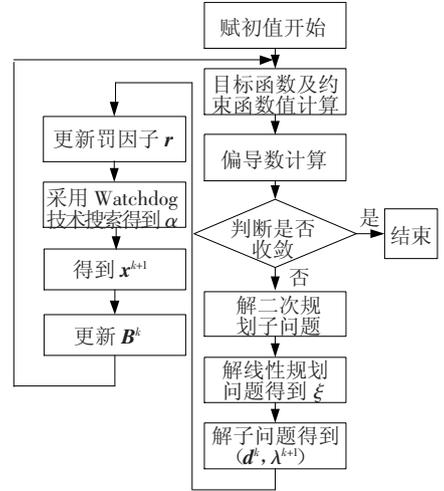


图 2 算法流程

3 仿真分析

取突防约束如表 1 所示.

表 1 突防约束

名称	经度/(°)	纬度/(°)	半径/(°)
再入点	104.083 3	40.162 5	
第 1 个路径点	123.976 6	33.182 2	
勿入区域	145.000 0	32.000 0	9.5
第 2 个路径点	146.448 0	19.612 3	
拦截导弹杀伤区	187.650 2	-10.056 9	10.0
目标点	192.144 3	-17.838 0	

利用 1 节中的模型和 2 节中的优化方法得到仿真结果如图 3 ~ 8 所示.

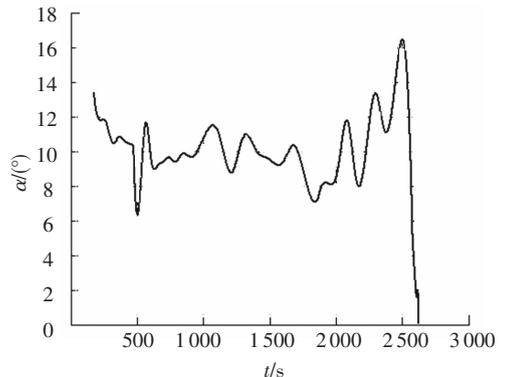


图 3 攻角度变化曲线

图 7 给出了升力式再入飞行器的最优三维突防弹道, 图 8 给出了最优弹道的地表投影. 可见, 升力式再入飞行器从发射点出发, 精确地通过了第 1

个路径点,顺利绕过勿入区域,到达了设定的第2个路径点,突入了拦截导弹杀伤区,以“S”形机动弹道在拦截导弹杀伤区内飞行以提高突防概率,最

终精确命中了目标.同时可以发现,滑翔段飞行高度保持在30 km以上,满足了突防高度要求.

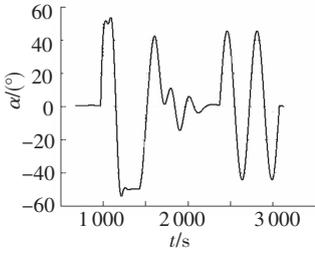


图4 倾侧角变化曲线

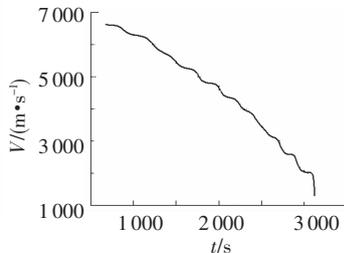


图5 速度变化曲线

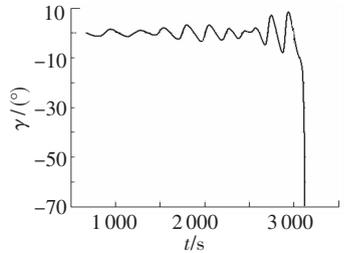


图6 飞行路径角变化曲线

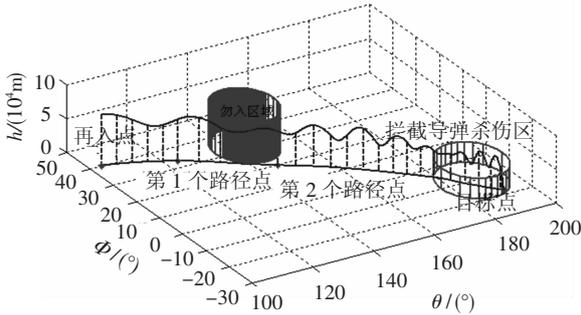


图7 三维机动突防弹道

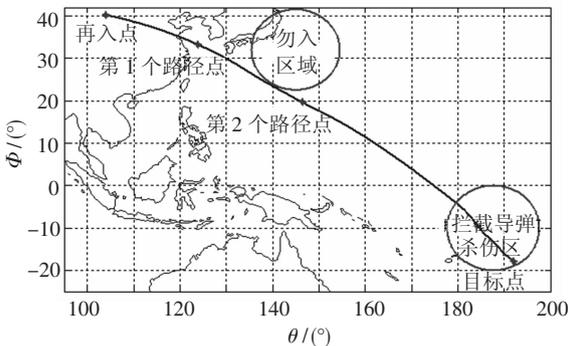


图8 经纬度曲线

4 结论

本文以升力式再入飞行器机动突防弹道优化设计为研究目的,首先给出了该问题的多约束多阶段弹道优化模型,研究了弹道优化数值解法理论,将该多约束多阶段优化问题的多个阶段弹道优化模型统一于1个优化算法.采用直接法将该轨迹优化问题转化成参数优化问题,而后采用序列二次规划法来解该参数优化问题,得到了满足相应约束的再入机动突防弹道.通过本文的研究可以看出采用本文的方法能够进行升力式再入飞行器的再入机动突防弹道的优化设计,并具有较好的效果.

参考文献:

[1] 赵汉元. 飞行器再入动力学和制导[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 1997: 382 - 384.
 [2] 李瑜,杨志红,崔乃刚. 助推-滑翔导弹弹道优化研究[J]. 宇航学报, 2008, 29(1): 67 - 69.
 [3] 李瑜. 助推-滑翔导弹弹道优化与制导方法研究

[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.
 [4] BRAIN C F. Some tools for the direct solution of optimal control problems [J]. Advances in Engineering Software, 1998, 29(1): 45 - 61.
 [5] LEWALLEN J M, TAPLEY B D, WILLIAMS S D. Iteration procedures for indirect trajectory optimization methods[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1968, 5(3): 321 - 327.
 [6] VINH N X, CHERN J S, LIN C F. Phugoid oscillations in optimal reentry trajectories [J]. Acta Astronautica, 1981, 8: 311 - 324.
 [7] JACKSON M C, STRAUBE T M, Fill T J, et al. Onboard determination of vehicle glide capability for the shuttle abort flight manager (SAFM)[C]//IEEE Aerospace and Electronic Systems Society, Core Technologies for Space Systems Conference. Colorado Springs: [s. n.], 2002.
 [8] Gath P F. CAMTOS-a software suite combining direct and indirect trajectory optimization methods[D]. Stuttgart: University of Stuttgart, 2002: 10 - 28.
 [9] de O PANTOJA J F O, MAYNE D Q. A sequential quadratic programming algorithm for discrete optimal control problems with control inequality constraints [C]//Proceedings of the 28th conference on decision and control. Tampa, FL: [s. n.], 1989, 1: 353 - 357.
 [10] BARRON R L, CHICK C M. Improved indirect method for air-vehicle trajectory optimization [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(3): 643 - 652.
 [11] BETTS J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 193 - 207.
 [12] SHIPPEY B M. Trajectory optimization using collocation and evolutionary programming for constrained nonlinear dynamical systems [D]. Arlington: University of Texas, 2008.
 [13] VINH N X, LU P. Chebyshev minim ax problems for skip trajectories [J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1988, 36(1): 179 - 197.
 [14] YONG E, TANG G J, CHEN L. Three-dimensional optimal trajectory for global range of CAV [C]//1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics. Piscataway: IEEE, 2006: 1396 - 1400.

(编辑 张宏)