航天器姿态跟踪的几乎干扰解耦控制

李传江1,郭敏文1,2,马广富1

(1. 哈尔滨工业大学 控制科学与工程系,150001 哈尔滨, lichuan@hit.edu.cn; 2. 北京控制工程研究所,100190 北京)

摘 要:研究了有界干扰力矩作用下航天器姿态跟踪的几乎干扰解耦控制问题.采用修正罗德里格参数 (MRP)作为航天器的姿态描述.利用非线性系统中的微分几何理论,通过反馈线性化方法设计跟踪控制器, 使得在实现姿态跟踪的同时,实现了对系统的几乎干扰解耦控制,即在 L, 增益意义下实现了从干扰到跟踪 误差的影响任意小,并通过 Lyapunov 方法证明了干扰对跟踪误差的 L_2 增益可以通过调节相关参数实现任意 减小,同时保证了姿态跟踪误差系统是全局一致最终有界稳定的.最后进行数学仿真研究,验证了所设计的 几乎干扰解耦控制器的可行性和有效性.

关键词:姿态跟踪;几乎干扰解耦;反馈线性化;Lyapunov方法;全局一致最终有界稳定 中图分类号: V448.22 文章编号: 0367-6234(2011)09-0007-07 文献标志码:A

Spacecraft attitude tracking based on almost disturbance decoupling

LI Chuan-jiang¹, GUO Min-wen^{1,2}, MA Guang-fu¹

(1. Dept. of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China, lichuan@hit.edu.cn; 2. Beijing Institute of Control Engineering, 100190 Beijing, China)

Abstract: The problem of spacecraft attitude tracking under bounded disturbances is addressed based on almost disturbance decoupling. The modified Rodrigues Parameter (MRP) is adopted as attitude representation. A feedback linearization control scheme based on differential geometry for nonlinear systems is used to design the controller, by which the tracking and the almost disturbance decoupling performances can be easily achieved. Lyapunov theory is employed to prove that the influence of disturbances on the L_2 norm of output tracking error can be arbitrarily attenuated by changing some adjustable parameters in the controller, and that spacecraft attitude tracking system is globally uniformly ultimately bounded stable. Simulation results demonstrate the effectiveness and feasibility of the proposed control scheme.

Key words: attitude tracking; almost disturbance decoupling; feedback linearization; Lyapunov theory; global uniformly ultimately bounded stability

作为航天器系统诸多分系统的重要子系统之 一,航天器姿态控制系统直接影响着卫星的工作 性能和使用寿命.其实际在轨飞行时不可避免地 受到空间各种环境力矩(如重力梯度力矩、太阳

收稿日期: 2010-06-09.

作者简介:李传江(1978—),男,副教授;

马广富(1963一),男,教授,博士生导师.

辐射力矩、气动力矩和地磁力矩等)和非环境力 矩(如飞轮等执行机构的内部摩擦、航天器活动 部件的转动以及执行机构的安装误差等)的作 用.所有干扰力矩都会对航天器姿态控制性能产 生一定影响,因此干扰力矩的抑制问题已经成为 高精度高稳定度航天器姿态控制系统的重要研究 内容之一.

干扰解耦控制,就是对给定的系统设计控制 器,使得输出与干扰是无关的,但大多数的非线性 系统不满足可干扰解耦的充要条件^[1],无法实现 干扰解耦、针对此问题,相关学者提出了几乎干扰

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60774062);中国博士后科学 基金资助项目(20070420858);哈尔滨工业大学优秀青年 教师培养计划资助项目(HITQNJS. 2008.006);哈尔滨市 科技创新人才研究专项资助项目(2010RFQXG029).

解耦控制^[2],即设计控制器使得在 L₂ 增益意义上 干扰对输出的影响可以任意小. 几乎干扰解耦问 题首先在线性系统中提出并得到了基本解决,而 在非线性系统中一直是研究的热点之一. 国际上 提出各种方法如逆最优控制^[3],非线性 H₂ 控 制^[4-5],H₂ 自适应模糊控制^[6]以及反馈线性化和 前馈神经网络相结合的控制方法^[7]等,还有不少 针对某些特殊的非线性系统^[8-9]的研究方案,如 文献[10]针对一类不确定时滞系统,根据线性矩 阵不等式和代数 Riccati 方程设计了静态状态反 馈控制器,实现系统的鲁棒 H₂ 几乎干扰解耦,文 献[2]则通过输出反馈实现了一类带不确定输入 动态非线性系统的鲁棒几乎干扰解耦和镇定 问题.

然而采用几乎干扰解耦控制思想解决航天器 姿态控制问题的研究结果较少,几乎没有文献论 述.本文基于非线性系统的微分几何理论中的相 对阶概念,针对由修正罗德里格参数(MRP)描述 的刚体航天器姿态跟踪误差运动模型,利用反馈 线性化的方法设计跟踪控制器,实现了跟踪系统 的几乎干扰解耦控制,即从有界干扰到姿态跟踪 误差的 L₂ 增益可以通过调节相关参数实现任意 地减小,并通过 Lyapunov 方法证明了姿态跟踪误 差的全局一致最终有界稳定性.最后对姿态跟踪 系统进行了数学仿真,结果表明了所提出方案是 有效可行的.

1 航天器运动模型

刚体航天器的动力学方程为[11]

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{\dot{\omega}} = -\left[\boldsymbol{\omega}^{\times}\right]\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}. \qquad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}^T$ 表示航天器本体坐标 系相对于地心惯性坐标系且表示在本体坐标系上 的姿态角速度向量; $\boldsymbol{J} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ 为航天器的对称正 定转动惯量矩阵; $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$ 、 $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^T$ 分别表示航天器在轨飞行时的三 轴控制力矩向量和所受干扰力矩向量;另外,对任 意 $\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}^T$,定义叉乘算子 $[\boldsymbol{l}^{\times}]$ 如下:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{l}^{\times} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 & l_2 & -l_3 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 & -l_3 \end{bmatrix}$$

由 MRP 参数 $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}^T$ 描述的航 天器非线性运动学方程为^[12]

$$\dot{\sigma} = G(\sigma) \cdot \omega$$
.
其中矩阵 $G(\sigma) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 定义如下:

$$G(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \boldsymbol{\sigma}^2}{2} \boldsymbol{I}_3 + [\boldsymbol{\sigma}^{\times}] + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} \right). \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{I}_n \ \exists n \times n \ \text{维单位矩阵}, \boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$
 $G(\boldsymbol{\sigma}) \ \text{矩阵满足如下性质}:$

$$G^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{16}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^2)} G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}),$$
$$G^{-1}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} = \frac{4\boldsymbol{\sigma}}{1 + \boldsymbol{\sigma}^2}.$$

2 航天器姿态跟踪模型

令 σ_a 、 σ_e 分别表示惯性坐标系到期望坐标系的期望MRP向量和期望坐标系到本体坐标系的误差MRP向量.由 σ_e 表示的方向余弦矩阵 $R(\sigma_e)$ 定义为

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\sigma}_{e}) = \boldsymbol{I}_{3} - \frac{4(1 - \boldsymbol{\sigma}_{e}^{2})}{(1 + \boldsymbol{\sigma}_{e}^{2})^{2}} [\boldsymbol{\sigma}_{e}^{\times}] + \frac{8}{(1 + \boldsymbol{\sigma}_{e}^{2})^{2}} [\boldsymbol{\sigma}_{e}^{\times}]^{2}.$$
(3)

取 ω_a 及 ω_e 分别表示期望角速度向量和误差 角速度向量,则在本体坐标系中有关系式

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \widetilde{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\omega}_d. \tag{4}$$

其中 $\tilde{R} = R(\sigma_e)$,且满足性质 d \tilde{R} /dt = - [ω_e^x] \tilde{R} . 将式(4)代入式(1),整理可得航天器的误差

动力学方程为

 $J\dot{\omega}_{e} = - \left[\omega_{e}^{\times} \right] J\omega - P\omega_{e} - q + u + d. \quad (5)$ 式中矩阵 P 和向量 q 定义如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J} [(\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d)^{\times}] + [(\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d)^{\times}] \boldsymbol{J}, \\ \boldsymbol{q} = [(\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d)^{\times}] \boldsymbol{J} \tilde{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\omega}_d + \boldsymbol{J} \tilde{\boldsymbol{R}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d. \end{cases}$$
(6)

另一方面,由 σ_e 和 ω_e 描述的误差运动学方 程为

3 几乎于扰解耦控制设计

3.1 相关基础知识

定义1^[12] (向量相对阶)仿射型 *m* 维输入 *m* 维输出非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases}$$
(8)

在 \mathbf{x}_0 处具有关于输入 \mathbf{u} 的向量相对阶为 $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$,如果同时满足:

1) 存在 x_0 的一个邻域 U, 对其中所有 x 有 $L_{g_j}L_f^k h_i(x) = 0$, 对 $\forall 0 \le i \le m, 1 \le j \le m, k < r_i - 1$, 其中

$$L_f^k h_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h_i(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}),$$

$$L_g L_f h_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial (L_f h_i(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$$

这里 L 为 Lie 导数.

2) m × m 维矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 处是非奇异的. 定义 $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$ 为系统 (8) 的总相对阶.

定义 2^[13] (*K* 类函数) 连续函数 *α*:[0,*a*) → [0,∞),如果满足:

1) $\alpha(0) = 0;$

- 2) $\alpha(p) > 0$, $\forall p > 0$;
- 3) α(·) 是严格增函数;

则称该函数为*K*类函数.

定义 3^[13] (*KL* 类函数) 连续函数 β:[0,*a*) × [0,∞),如果满足:

1) 对于固定的
$$s,\beta(\gamma,s)$$
关于 $\gamma \in K$ 类函数;

2) 对于固定的 γ , $\beta(\gamma,s)$ 关于s 为减函数;而 且当 $s \rightarrow \infty$ 时,有 $\beta(\gamma,s) \rightarrow 0$ 成立,则称该函数 $\beta(\cdot, \cdot)$ 为*KL* 类函数.

定义 $4^{[13]}$ (微分同胚映射) 若存在 1 个连 续可微的映射 $\phi(x)$,且对于所有的 $x \in U$,其逆 映射 $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$ 存在且光滑(也是连续可微 的),则称 $\phi: U \to \mathbf{R}^n$ 为 U 和 \mathbf{R}^n 之间的 1 个微分同 胚映射.

这里根据相对阶的概念,针对系统(8)定义1 个全局微分同胚映射

$$\phi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n. \tag{9}$$

为如下形式:

$$\begin{split} \boldsymbol{\xi}^{i} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{1}^{i} \\ \boldsymbol{\xi}_{2}^{i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{r_{i}}^{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{1}^{i} \\ \boldsymbol{\phi}_{2}^{i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{f}^{i} h_{i}(x) \\ \vdots \\ L_{f}^{i,i-1} h_{i}(x) \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) , \\ \boldsymbol{\phi}_{k}(\boldsymbol{x}(t)) &= \boldsymbol{\eta}_{k}(t), \quad (k = r + 1, r + 2, \dots, n). \\ \boldsymbol{\Xi} ; \boldsymbol{\Xi} \\ \boldsymbol{E} \\ L_{g} \boldsymbol{\phi}_{k}(\boldsymbol{x}(t)) &= \boldsymbol{0} , \end{split}$$

$$(k = r + 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

引理1^[14] 针对有界干扰 *d* 作用下的系统 (8),通过全局微分同胚映射(9) 得到的误差系 统,如果设计反馈控制器 *u* 满足如下要求:

1) 系统是输入到状态稳定的;

2) 对任意初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$, 任意时刻 $t \ge t_0$,

有

$$| y_{i}(t) - y_{d}^{i}(t) | \leq \beta_{1}(\| \mathbf{x}(t_{0}) \| , t - t_{0}) + \frac{1}{\sqrt{c_{1}}} \rho_{1}(\sup_{t_{0} \leq \tau \leq t} \| \mathbf{d}(\tau) \|), \ (i = 1, 2, \cdots, m).$$
(10)

且.

$$\int_{0}^{t} [y_{i}(\tau) - y_{d}^{i}(\tau)]^{2} d\tau \leq \frac{1}{c_{2}} [\rho_{2}(\| \mathbf{x}(t_{0}) \|)] + \int_{t_{0}}^{t} \rho_{1}(\| d(\tau) \|^{2}) d\tau, \ (i = 1, 2, \cdots, m).$$
(11)

其中: c_1 、 c_2 是正数; ρ_1 、 ρ_2 是 K 类函数; β_1 是 KL 类 函数; $\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} y_d^1 & y_d^2 \cdots y_d^m \end{bmatrix}^T$ 为期望输出向量. 那么 称控制器 \mathbf{u} 实现了输出跟踪和几乎干扰解耦 控制.

3.2 控制器设计

取状态变量 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T]^T$,其中 $\mathbf{x}_1 = \sigma_e$, $\mathbf{x}_2 = \omega_e$,则航天器姿态跟踪方程(5) ~ (7)可写 为如下三维输入三维输出方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + g(x)d, \\ y = h(x). \end{cases}$$
(12)

其中

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} G(\sigma_e)\omega_e \\ -J^{-1}[\omega_e^{\times}]J\omega - J^{-1}P\omega_e - J^{-1}q \end{bmatrix},$$

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix},$$

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1.$$

由定义1可以判定,系统(12)在平衡点 x^0 = $[000000]^T$ 处具有向量相对阶 $\{r_1, r_2, r_3\}$ = $\{2, 2, 2\}$,进而可知跟踪系统总的相对阶为r = 6,与跟踪系统的维数相等,因此系统可完全线性化,不存在内动态.

由映射(9),引入如下坐标变换:

$$\boldsymbol{\xi}^{i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{1}^{i} \\ \boldsymbol{\xi}_{2}^{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{f}^{0} h_{i}(x) \\ L_{f}^{1} h_{i}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{ei} \\ \boldsymbol{\sigma}_{ei} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\dot{\xi}_1^i = \xi_2^i, \qquad (14)$$

$$\dot{\xi}_{2}^{i} = \frac{\partial L_{f}^{1} h_{i}}{\partial x} f + \frac{\partial L_{f}^{1} h_{i}}{\partial x} (gu + gd) = L_{f}^{2} h_{i} + \sum_{j=1}^{3} (L_{g_{j}} L_{f}^{1} h_{i}) u_{j} + \sum_{j=1}^{3} (L_{g_{j}} L_{f}^{1} h_{i}) d_{j} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (15)$$
$$\dot{\xi}_{1} = [\xi_{1}^{1} \xi_{1}^{2} \xi_{1}^{3}]^{\mathrm{T}} = [\xi_{2}^{1} \xi_{2}^{2} \xi_{2}^{3}]^{\mathrm{T}}, \quad (16)$$

 $\dot{\xi}_2 = [\xi_2^1 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2^3]^{\mathrm{T}} = b + Au + Ad$. (17) 其中 A, b 定义如下:

- -

将式(18)其代入式(16)、(17)整理得到仿射 型非线性系统(12)的线性化状态方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{1} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^{2} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{A} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}^{1} \\ \boldsymbol{\xi}^{2} \\ \boldsymbol{\xi}^{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{v}_{1} \\ \overline{v}_{2} \\ \overline{v}_{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{d}_{1} \\ \overline{d}_{2} \\ \overline{d}_{3} \end{bmatrix}.$$

$$\ddagger \mathbf{H} \mathbf{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{v}_{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{i} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{d}}_{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{i}\boldsymbol{d} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\varphi}_{i} = \frac{\partial (L_{f}^{1} h_{i})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}, \ (i = 1, 2, 3).$$

为分析问题方便,考虑第*i*(*i* = 1, 2, 3)通 道状态方程:

并将跟踪误差做如下变换:

$$\bar{e}_{1}^{i} = e_{1}^{i}, \quad \bar{e}_{2}^{i} = \varepsilon e_{2}^{i}.$$
其中 $\varepsilon > 0$ 为可调参数. 同时令参考输入信号
 $v_{i} = -\varepsilon^{-2}\alpha_{1}^{i}e_{1}^{i} - \varepsilon^{-1}\alpha_{2}^{i}e_{2}^{i}, \quad (19)$
则得第 *i* 通道的线性化误差状态方程

$$c\dot{\bar{e}}^{i} - A^{i} \bar{e}^{i} + c^{2}\bar{d}$$

其中

$$ar{m{e}}^i = egin{bmatrix} ar{m{e}}^i_1 \ ar{m{e}}^i_2 \end{bmatrix}, \ m{A}^i_c = egin{bmatrix} 0 & 1 \ -\alpha^i_1 & -\alpha^i_2 \end{bmatrix}.$$

这里参数 α_1^i, α_2^i 的选择满足矩阵 A_e^i 是 Hurwitz 稳 定的, 且(A_e^i)^T $P^i + P^i A_e^i = -I_2$ 有正定解 P^i .

令 $\lambda_{\min}(\mathbf{P}^{i})$ 、 $\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{i})$ 分别表示 \mathbf{P}^{i} 的最小和 最大特征值,取

$$\begin{cases} \lambda_{\min}^{*} = \min \{ \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{1}), \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{2}), \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{3}) \}, \\ \lambda_{\max}^{*} = \max \{ \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}^{1}), \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}^{2}), \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}^{3}) \}, \end{cases}$$

$$(20)$$

及正定 Lyapunov 函数 V 为

$$V = k(\varepsilon) [V_1 + V_2 + V_3].$$
(21)

其中 $V_i = 0.5(\bar{e}^i)^T P^i \bar{e}^i, k(\varepsilon)$ 为 $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 的任意 连续函数,且满足

$$\lim_{\varepsilon \to 0} k(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{k(\varepsilon)} = 0.$$

对式(21)求时间导数,可得

$$\begin{split} \dot{V} &= \frac{k(\varepsilon)}{2} \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\bar{e}^{i} \right)^{\mathrm{T}} P^{i} \bar{e}^{i} + \left(\bar{e}^{i} \right)^{\mathrm{T}} P^{i} \bar{e}^{i} \right] = \\ &\frac{k(\varepsilon)}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\bar{e}^{i} \right)^{\mathrm{T}} \left[\left(A_{c}^{i} \right)^{\mathrm{T}} P^{i} + P^{i} A_{c}^{i} \right] \bar{e}^{i} + \\ &2\varepsilon^{2} d^{\mathrm{T}} \varphi_{i}^{\mathrm{T}} P^{i} \bar{e}^{i} \right] \leq -\frac{k(\varepsilon)}{2\varepsilon} \left[\| \bar{e}^{1} \|^{2} + \| \bar{e}^{2} \|^{2} + \\ \| \bar{e}^{3} \|^{2} \right] + \varepsilon k(\varepsilon) \sum_{i=1}^{3} \| d \| \cdot \| \varphi_{i} \| \cdot \| P^{i} \| \cdot \| \bar{e}^{i} \| \leq \\ &- \frac{k(\varepsilon)}{\varepsilon} \left[\frac{V_{1}}{\lambda_{\max}} (P^{i}) + \frac{V_{2}}{\lambda_{\max}} (P^{2}) + \frac{V_{3}}{\lambda_{\max}} (P^{3}) \right] + \\ &\varepsilon^{2} k^{2}(\varepsilon) \sum_{i=1}^{3} \| \varphi_{i} \|^{2} \cdot \| P^{i} \|^{2} \cdot \| \bar{e}^{i} \|^{2} + \frac{3}{4} \| d \|^{2} \\ & \text{theta} (20) (21) \text{ Bit} \text{Heta} \\ &V \leq - \frac{V}{\varepsilon \lambda_{\max}^{*}} + \varepsilon^{2} k^{2}(\varepsilon) \sum_{i=1}^{3} \frac{\| \varphi_{i} \|^{2} \cdot \| P^{i} \|^{2}}{(V2) \lambda_{\min} (P^{i})} \right) V + \frac{3}{4} \| d \|^{2} = \\ &- \left(\frac{1}{\varepsilon \lambda_{\max}^{*}} - \varepsilon^{2} k^{2}(\varepsilon) \sum_{i=1}^{3} \frac{\| \varphi_{i} \|^{2} \cdot \| P^{i} \|^{2}}{(V2) \lambda_{\min}^{*} (P^{i})} \right) V + \frac{3}{4} \| d \|^{2} = \\ &- \gamma V + \frac{3}{4} \| d \|^{2} \leq -\frac{1}{2} k(\varepsilon) \gamma \lambda_{\min}^{*} \sum_{i=1}^{3} \| \bar{e}^{i} \|^{2} + \frac{3}{4} \| d \|^{2} = \\ &- \gamma Y + \frac{3}{4} \| d \|^{2} . \end{split}$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon \lambda_{\max}^*} - \varepsilon^2 k^2(\varepsilon) \sum_{i=1}^3 \frac{\|\varphi_i\|^2 \|\boldsymbol{P}^i\|^2}{(1/2)\lambda_{\min}^*(\boldsymbol{P}^i)},$$

$$\gamma' = 0.5k(\varepsilon) \gamma \lambda_{\min}^*.$$

由上述结论可知

$$\int_{t_0}^{t} V d\tau = V(t) - V(t_0) \leq -\gamma' \int_{t_0}^{t} \|\bar{e}^i\|^2 d\tau + \frac{3}{4} \int_{t_0}^{t} \|d\|^2 d\tau \leq -\gamma' \int_{t_0}^{t} |\bar{e}_1^i(\tau)|^2 d\tau + \frac{3}{4} \int_{t_0}^{t} \|d\|^2 d\tau.$$

$$\ddot{\mathcal{H}} \vec{n} \vec{\eta} \vec{\mathcal{H}}$$

$$\int_{t_0}^{t} \left[\bar{\boldsymbol{e}}_1^i(\tau) \right]^2 \mathrm{d}\tau \leq \frac{V(t_0)}{\gamma'} + \frac{3}{4\gamma'} \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{d}\|^2 \mathrm{d}\tau.$$

可见当 γ´>0 时满足式(11),且可增大可调 参数 γ´,实现跟踪误差任意减小.

另一方面,由式(22)可知
$$\dot{V} \leq -\gamma V + \frac{3}{4} (\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \| \boldsymbol{d}(\tau) \|)^2.$$

因此根据比较原理^[15]得到

$$V(t) \leq V(t_0) e^{-\gamma(t-t_0)} + \frac{3}{4\gamma} (\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \| \boldsymbol{d}(\tau) \|)^2,$$

$$| \bar{\boldsymbol{e}}_1^i(t) | \leq \sqrt{\frac{2V}{k(\varepsilon)\lambda_{\min}^*}} \leq \sqrt{\frac{2V(t_0)}{k(\varepsilon)\lambda_{\min}^*}} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} +$$

$$\sqrt{\frac{3}{4\gamma k(\varepsilon)\lambda_{\min}^{*}}}(\sup_{\iota_{0}\leqslant\tau\leqslant\iota} \|\boldsymbol{d}(\tau)\|).$$
可见式(10)满足.

以上证明了干扰抑制下跟踪问题是全局可解 的,最后,证明系统输出跟踪误差存在吸引域为球 域 $B_r = \{\bar{e}: \|\bar{e}\|^2 \le r\}$. 记 $\|\bar{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \|\bar{e}^i\|^2$.

由

$$\ddot{V} \leq -\gamma' \parallel \bar{\boldsymbol{e}} \parallel^2 + \frac{3}{4} \parallel \boldsymbol{d} \parallel^2,$$

且当 $\|\bar{e}\| \ge r$ 时, 有 $\dot{V} < 0$, 因此当输出 $e_1^i = \xi_1^i = L_f^0 h_i(x) = \sigma_{ei} \notin B_r$ 时,必有

$$\frac{\dot{V}}{V} \leqslant \frac{-\gamma' \|\bar{\boldsymbol{e}}\|^2 + \frac{3}{4} \|\boldsymbol{d}\|^2}{\frac{k(\varepsilon)}{2} \lambda_{\max}^* \|\bar{\boldsymbol{e}}\|^2} = \frac{-\gamma \lambda_{\min}^*}{\lambda_{\max}^*} + \frac{3 \|\boldsymbol{d}\|^2}{2k(\varepsilon) \lambda_{\max}^* \|\bar{\boldsymbol{e}}\|^2} = -\alpha^*.$$

即 $\dot{V} \leq -\alpha^* V$,根据比较原理^[15],得到 $V(t) \leq V(t_0)e^{-\alpha^*(t-t_0)}$,因此

$$\frac{k(\varepsilon)}{2} \lambda_{\min}^{*} \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^{2} \leq V(t) \leq V(t_{0}) e^{-\alpha^{*}(t-t_{0})} \leq \frac{k(\varepsilon)}{2} \lambda_{\max}^{*} \| \bar{\boldsymbol{e}}(t_{0}) \|^{2} e^{-\alpha^{*}(t-t_{0})}.$$

由此可得

$$\| \bar{\boldsymbol{e}} \| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^*}{\lambda_{\min}^*}} \| \bar{\boldsymbol{e}}(t_0) \| e^{-\frac{1}{2}\alpha^*(t-t_0)}.$$

可见收敛至球域 *B*, 的收敛速率为 0.5α^{*}. 整个过 程证明了控制器实现了系统姿态跟踪的几乎干扰 解耦控制.

为了得到关于误差状态 $\boldsymbol{\omega}_e$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_e$ 反馈形式控制器,将控制器(18)进行如下的推导.由 $L_f \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = L_f \boldsymbol{\sigma}_{ei} = \boldsymbol{\sigma}_{ei}$,可得

$$A = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma}_e) \boldsymbol{J}^{-1},$$

再由式(3) 可得

$$A^{-1} = JG^{-1}(\sigma_{e}) = J \frac{16}{(1 + \sigma_{e}^{2})^{2}}G^{T}(\sigma_{e}) ,$$

$$b = [L_{f}\dot{\sigma}_{e1} \quad L_{f}\dot{\sigma}_{e2} \quad L_{f}\dot{\sigma}_{e3}]^{T} = [\frac{\partial(\tilde{G}\omega_{e})}{\partial\sigma_{e}} \quad \frac{\partial(\tilde{G}\omega_{e})}{\partial\omega_{e}}]f(x) = \frac{\partial(\tilde{G}\omega_{e})}{\partial\sigma_{e}}\tilde{G}\omega_{e} - \frac{\partial(\tilde{G}\omega_{e})}{\partial\omega_{e}}J^{-1}([\omega_{e}^{\times}]J\omega + P\omega_{e} + q) = -\tilde{G}J^{-1}[\omega_{e}^{\times}]J\omega - \tilde{G}J^{-1}P\omega_{e} - \tilde{G}J^{-1}q + 0.5[\omega_{e}^{\times}]\tilde{G}\omega_{e} + 0.5\sigma_{e}\omega_{e}^{T}\tilde{G}\omega_{e}.$$

$$\beta \hat{\Pi}(\# \mathbb{E}\mathbb{D}, \pi f m \mathbb{E}\mathbb{E}\mathbb{C}_{1}(19) \oplus \hat{m} \alpha_{1}^{1} = \alpha_{1}^{2} = \alpha_{1}^{3} = \alpha_{1}, \alpha_{2}^{1} = \alpha_{2}^{2} = \alpha_{2}^{3} = \alpha_{2}, \mathbb{M}\tilde{A}$$

 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = -\varepsilon^{-2}\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}_e - \varepsilon^{-1}\alpha_2 \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e.$ 因此,

$$u = [\omega_e^{\times}] J \omega + P \omega_e + q - 0.5 J \widetilde{G}^{-1} [\omega_e^{\times}] \widetilde{G} \omega_e - 0.5 \omega_e^{\top} \widetilde{G} \omega_e J \widetilde{G}^{-1} \sigma_e + J \widetilde{G}^{-1} (-\varepsilon^{-2} \alpha_1 \sigma_e - \varepsilon^{-1} \alpha_2 \dot{\sigma}_e).$$

$$\text{Szd} - \# \text{He}, \text{BSS} \text{He} \text{He} \text{Szd} + 1 \text{BSS} \text{He} \text{He} \text{He} \text{Szd} + 1 \text{BSS} \text{He} \text{H$$

(7),假设干扰
$$d$$
 有界,那么如下跟踪控制器:

$$u = \left\{ -\left[(J\omega_{e})^{\times} \right] - \frac{(1 - 3\sigma_{e}^{2})\omega_{e}^{T}\sigma_{e}}{(1 + \sigma_{e}^{2})^{2}}J - \varepsilon^{-1}\alpha_{2}J + \overline{P} \right\} \omega_{e} + \left\{ \left(\frac{1}{2}\omega_{e}^{2} - \frac{(\omega_{e}^{T}\sigma_{e})^{2} + 4\varepsilon^{-2}\alpha_{1}}{1 + \sigma_{e}^{2}} \right) J + \frac{\omega_{e}^{T}\sigma_{e}}{1 + \sigma_{e}^{2}}J [\omega_{e}^{\times}] \right\} \sigma_{e} + q.$$
(23)

其中: ε , α_1 , α_2 均为正的常数,且

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{J} [(\widetilde{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\omega}_d)^{\times}] + [(\widetilde{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\omega}_d)^{\times}] \boldsymbol{J} - [(\widetilde{\boldsymbol{J}} \widetilde{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\omega}_d)^{\times}],$$

$$\boldsymbol{q} = [(\widetilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d)^{\times}] \boldsymbol{J} \widetilde{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\omega}_d + \boldsymbol{J} \widetilde{\boldsymbol{R}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d.$$

实现了闭环系统姿态跟踪的几乎干扰解耦控制,即干扰**d**对姿态跟踪误差的L₂范数可通过调节控制参数任意地减小,同时保证了跟踪误差的全局一致最终有界稳定性.

备注:在推导过程中假设 $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = \alpha_1^3, \alpha_2^1 = \alpha_2^2 = \alpha_2^3$ 只是为了推导简便,数学仿真中可取为不等. 定理公式(23) 中由假设得出 $\alpha_2 J$ 和 $\alpha_1 J$,实际上易知为

$$\begin{bmatrix} a_2^1 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 J_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^3 J_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1^1 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 J_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^3 J_3 \end{bmatrix}.$$

4 仿真分析

本节在 Matlab/Simulink 环境下对某航天器 姿态跟踪系统进行了数学仿真,以验证所提出的 几乎干扰解耦方案的可行性和有效性.

航天器的转动惯量取为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} (\text{kg} \cdot \text{m}^2).$$

这里假设跟踪的目标角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{d} = \begin{bmatrix} 0.05 \sin\left(\frac{2\pi t}{120}\right) \\ -0.05 \sin\left(\frac{2\pi t}{120}\right) \\ 0.03 \sin\left(\frac{2\pi t}{120}\right) \end{bmatrix} (\text{rad/s}).$$

有界干扰力矩取为

$$\boldsymbol{d}(t) = \begin{bmatrix} 0.\ 005 - 0.\ 02\sin\left(\frac{2\pi t}{120}\right) \\ 0.\ 005 + 0.\ 02\sin\left(\frac{2\pi t}{120}\right) \\ 0.\ 005 - 0.\ 02\sin\left(\frac{2\pi t}{120}\right) \end{bmatrix} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}).$$

误差姿态的初始值取为

$$\boldsymbol{\omega}_{e}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} (\operatorname{rad/s}),$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{e}(0) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

控制器参数取为

 $\varepsilon = 0.1, \alpha_1^1 = \alpha_1^3 = 0.0006, \alpha_1^2 = 0.00085,$ $\alpha_2^1 = \alpha_2^2 = \alpha_2^3 = 0.05.$

采用跟踪控制律(23),得到仿真结果如图1~ 4 所示.图1给出了实际姿态角速度和目标姿态 角速度曲线;图2~3分别给出了角速度跟踪误差 和姿态跟踪误差曲线;控制力矩变化曲线由图4 给出.仿真结果表明,所设计控制器能较好地完成 姿态跟踪任务,实现几乎干扰解耦,保证了闭环系 统的跟踪误差是全局一致最终有界稳定的.

图 5 ~ 图 7 给出了当控制器参数 ε = 0.05 时的仿真结果,并将 ε 取不同值时的仿真结果进行比较分析.









由图 5~7 可见,当 ε 减小为 0.05 时,姿态跟踪的角速度稳态误差和 MRP 稳态误差都较 $\varepsilon = 0.1$ 时有明显减小,但是相应的控制力矩 u 却随着 ε 的减小而增大,所以在实际系统中应根据执行机构所能提供力矩的能力,全面综合地选择控制器的参数,实现理想有效的姿态跟踪几乎干扰解耦控制.

5 结 论

本文首先建立了带有干扰输入的航天器姿态 运动误差模型,然后利用非线性微分几何理论中 的反馈线性化方法设计控制器,并应用 Lyapunov 方法证明了该方法能够有效地实现系统的几乎干 扰解耦控制,最终得到状态反馈形式控制器.根据 系统输出跟踪误差的吸引域和收敛速度与调节参 数 ε 之间的关系表达式,易知随着 ε 的减小, γ '增 大同时系统输出跟踪误差的吸引域减小,即稳态 误差减小,且收敛速度也随着 ε 的减小而增大,这 说明了干扰对跟踪误差的L2 增益可以通过减小 参数 ε 实现任意减小. 仿真研究也通过比较两组 不同的 ε 取值下的稳态误差值,验证了该结论.本 文不足之处在于控制器依赖系统的转动惯量参 数,因此设计自适应控制律实现对参数不确定性 下姿态跟踪的几乎干扰解耦控制可作为后续的研 究方向.

参考文献:

- [1] 王晓华,刘晓平. 非线性广义时变系统的干扰解耦 [J]. 自动化学报,2000,26(6):798-802.
- [2] 王兴平,程兆林. 输出反馈实现一类带不确定输入动态非线性系统的鲁棒几乎干扰解耦[J]. 控制理论与应用,2004,21(2):183-188.

- [3] LUO Wengcheng, CHU Yunchung, LING Keck-Voon. Inverse optimal adaptive control for attitude tracking of spacecraft [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1639-1654.
- [4] KANG Wei. Nonlinear H_∞ control and its applications to rigid spacecraft [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(7): 1281 – 1285.
- [5] WANG Xinghu, JI Haibo. Stochastic H_x almost disturbance decoupling for a class of stochastic nonlinear systems [C]//Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai:
 [s. n.], 2009:2887 2892.
- [6] CHEN B S, LEE C H, CHANG Y C. H_∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: adaptive fuzzy approach [J]. IEEE Transactions on Fuzzy System, 1996, 4(1): 32 - 43.
- [7] CHIEN Tingli, CHEN Chungcheng, HUANG Yichieh. Stability and almost disturbance decoupling analysis of nonlinear system subject to feedback linearization and feedforward neural network controller [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2008, 19 (7): 1220 – 1230.
- [8] QIAN Chunjiang, LIN Wei. Almost disturbance decoupling for a class of high-order nonlinear systems [J].
 IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45 (6): 1208 1214.
- [9] FU Yanming, WU Aiguo, DUAN Guangren. Almost disturbance decoupling for a class of inherently nonlinear systems [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2009, 7(2): 325 - 330.
- [10]陆国平,郑毓蕃. 一类不确定时滞系统的鲁棒几乎 干扰解耦问题[J]. 控制理论与应用, 2002,19(3): 445-449.
- [11]SIDI M J. Spacecraft dynamics and control [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [12] 宫清先,张化光,孟祥萍. 一类 MIMO 非线性系统的稳定干扰解耦控制[J]. 控制理论与应用,2006, 23(2):199-203.
- [13] ISIDORI A. Nonlinear control systems [M]. New York: Springer Verlag, 1989.
- [14] MARINO R, TOMEI P. Nonlinear output feedback tracking with almost disturbance decoupling [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1986, 31: 67-69.
- [15] KHALILI H. Nonlinear systems [M]. New York: Prentice Hall, 2002.