

# 机动安定定理在路面结构安定分析中的应用

张吉庆, 王端宜, 吴文亮, 陈 强

(华南理工大学 土木与交通学院, 510640 广州)

**摘 要:** 为了准确评价路面结构的承载能力, 基于机动安定理论提出一种应用于路面结构的上限安定分析方法, 计算分析荷载分布方式、路面厚度、路面材料内摩擦角及结构层间模量比对路面结构安定上限荷载影响, 并与弹性极限、塑性极限及安定下限解进行对比分析. 结果表明: 单轮轴载下安定上限荷载随反映荷载的分布形式的  $a/r$  值增大而减小, 双轮轴载下安定上限荷载随  $a/r$  值增大而增大; 安定上限荷载随路面结构层厚度、材料内摩擦角增大而增大, 并在面层厚度与荷载当量半径比  $h/r = 2.5$  处开始趋于稳定; 安定上限荷载随上下层弹性模量比  $E/E_0$  的增加而减小, 且在  $E/E_0$  为 1.0 时安定上限荷载可取得最大值; 路面结构安定上限荷载要大于弹性极限和安定下限荷载但小于塑性极限; 安定上限荷载能较好地反映路面结构承载力, 可为路面结构设计提供参考.

**关键词:** 路面结构; 机动安定理论; 承载能力; 安定分析; 安定乘子

中图分类号: U416.01

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2012)08-0119-05

## Application of kinematic shakedown theorem in shakedown analysis of pavement structures

ZHANG Ji-qing, WANG Duan-yi, WU Wen-liang, CHEN Qiang

(Institute of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, 510640 Guangzhou, China)

**Abstract:** To accurately evaluate the bearing capacity of pavement structures, this paper proposed an upper shakedown analysis method based on the kinematic shakedown theorem, then calculated and analyzed the dependence of dimensionless upper shakedown load on the loading distribution, depth and angle of internal friction in the basecourse and ratio of elastic module in the basecourse and subgrade. Meanwhile the upper shakedown load was compared with elastic limit, plastic limit and lower shakedown load. The results showed that the upper shakedown load decreases with the increasing of  $a/r$  in a single-heel system, while increases in a dual-wheel system. The upper shakedown load increases with the increasing of depth of basecourse/subgrade interface and angle of internal friction in the basecourse, and the growth is slow as the value  $h/r$  (the ratio of surface course thickness to load equivalent radius) is greater than 2.5. The upper shakedown load decreases with the increasing ratio of  $E/E_0$ , and the upper shakedown load is the maximum when  $E/E_0 \leq 1.0$ . The upper shakedown load is greater than elastic limit and lower shakedown load, lesser than plastic limit. Our researches show that the shakedown limit based on the upper bound theorem can accurately represent the bearing capacity of pavement structures and could be a new reference to the analysis and design of pavement.

**Key words:** pavement structure; kinematic shakedown theorem; bearing capacity; shakedown analysis; shakedown multiplier

收稿日期: 2011-05-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51008131).

作者简介: 张吉庆(1984—), 男, 博士研究生;

王端宜(1960—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 张吉庆, zjqjava@126.com.

简单加载条件下运用极限分析理论可直接有效预测出路面结构的极限承载能力, 但在实际工程中, 路面结构承受的荷载十分复杂, 其作用方向、幅值及作用位置和作用时间是无法准确估计

的分析复杂荷载下的结构精确响应属于安定问题的范畴<sup>[1]</sup>,安定理论是解决这类问题的有力工具.从1938年 Melan 提出经典静力安定定理(下限定理)到1956年 Koiter 提出机动安定定理(上限定理),再到我国刘信声、徐秉业、冯西桥对定安进行了推理并建立了相关的表达式,安定理论经历了早期的只能用来寻求一些典型、简单结构的解析解到现在的可以用来求解复杂问题的数值方法的过程<sup>[1-7]</sup>.但在路面结构中应用较少,最早设想把安定极限荷载作为路面结构设计的基本参数的学者是 Sharp 和 Booker,他们认为在最早进行的 AASHO 道路试验的成果中就包含有安定的概念<sup>[1]</sup>,而后国外的一些学者相继发表了安定理论在路面结构中的应用成果.目前,国内的研究者开始把安定理论用来对路面结构进行分析,孙阳等<sup>[8]</sup>应用下限安定定理和能量法对路面结构的安定极限荷载进行求解,并分析了荷载作用方式、路面结构形式、材料性质变化对路面结构安定下限的影响.

从工程应用的角度来说,如何计算路面结构安定荷载是最关键的问题,因为安定荷载划分了能安全工作和最终破坏的荷载界限.但没有上限解就不能够准确估计下限解离真实安定极限有多近,因此有必要对所分析的结构进行机动安定性分析.本文基于机动安定定理对路面结构进行安定分析,研究不同荷载作用分布方式、路面材料性质和结构层变化对路面安定上限荷载的定量影响,并与基于下限定理求解值和弹性极限及塑性极限进行对比分析.

## 1 机动安定定理

### 1.1 安定理论简述

结构安定是指结构在复杂加载条件下产生的塑性变形有可能导致应力场的重新分布,形成稳定有利的残余应力场,使得在后续的荷载循环下结构完全处于弹性状态,结构整体达到了一种稳定的极限状态<sup>[9]</sup>.经典安定定理由 Koiter 机动安定理论(上限定理)和 Melan 静力安定理论(下限定理)组成.

### 1.2 强形式机动安定定理及在路面结构的应用

在路面结构中,可应用极限上限分析方法,来评价变值荷载条件下结构的安全性<sup>[10]</sup>,这里的安全性主要是指路面结构不发生结构型破坏和不影响行车安全的功能型破坏,这是因为构造机动许可的速度场比构造静力许可的应力场容易很多,只要采用的适当的优化方法,得出的上限解可以

和真实解接近,能够满足工程设计的要求.与之相比,进行机动安定分析就比静力安定分析更有意义.机动安定分析的困难来源于经典 Koiter 安定定理是一种弱形式,如果采用它的强形式(Strong version),即要求荷载循环过程中任意时刻的外力功率都小于塑性内能耗散率,那么就可以把机动安定分析写成与机动极限分析相对应的形式<sup>[11]</sup>,从而利用极限分析中对应的破坏机制,求解安定问题.

在路面结构问题中,假设存在一个机动允许的塑性应变率  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  循环,与其关联的速度场  $v^p$  和塑性应力场  $\sigma_{ij}^p$ .假设  $\sigma_{ij}^R$  为作用在路面的荷载所产生的应力场,  $\sigma_{ij}^e$  为变化的外荷载产生的纯弹性应力场,这是1个虚设的应力场.在变化循环荷载作用下如果路面结构能安定,则必然存在1个自平衡的残余应力场  $\rho_{ij}$ ,使得总应力为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^R + \rho_{ij}. \quad (1)$$

因此,由理想弹塑性材料的最大塑性耗散功率假设,对于一定的机动许可塑性速度场,真实应力所耗散的功率最大表达式为

$$\sigma_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p = D^p(\dot{\epsilon}_{ij}^p) \leq (\sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^e + \rho_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (2)$$

将上述两式对作用区域  $V$  积分,有

$$\int_V \sigma_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \geq \int_V (\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^R + \rho_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV. \quad (3)$$

自平衡的残余应力场  $\rho_{ij}$  与零外载平衡,由虚功率原理可知

$$\int_V \rho_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV = 0. \quad (4)$$

所以有

$$\int_V \sigma_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \geq \int_V (\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^R) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV. \quad (5)$$

如果违反了不等式(5),那么,路面结构在载荷作用下就不能趋于安定.由于恒定的外荷载就是体积力,在体积力作用下的路面结构满足平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^R}{\partial x_i} + \gamma_i = 0. \quad (6)$$

式中:  $\gamma_i$  为路面结构受到的体积力.分离变量积分后将  $\sigma_{ij}^R$  代入式(3),得到 Koiter 机动安定定理的强形式为

$$\int_V \sigma_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p dA \geq \int_V (\sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^p - \gamma_j v_j) dA. \quad (7)$$

如果荷载循环过程中的任意时刻,外力功率都小于塑性内能耗散功率,则结构安定.如果违反这个不等式,即荷载循环过程中的某一时刻,外力功率大于塑性内能耗散功率,那么,路面结构不安定.采用 Koiter 机动安定定理的强形式避免了采

用 Koiter 机动安定定理弱形式分析时对时间积分的困难,使复杂结构的安定分析成为可能.

## 2 安定分析方法

### 2.1 安定屈服准则

路面结构层材料可适用于 Mohr-Coulomb 准则, Mohr-Coulomb 准则在  $\pi$  平面上的屈服轨迹通常为六角形,如图 1 所示,它在主应力空间的屈服面存在尖顶和棱角,给数值计算带来困难,容易导致数值计算不收敛.

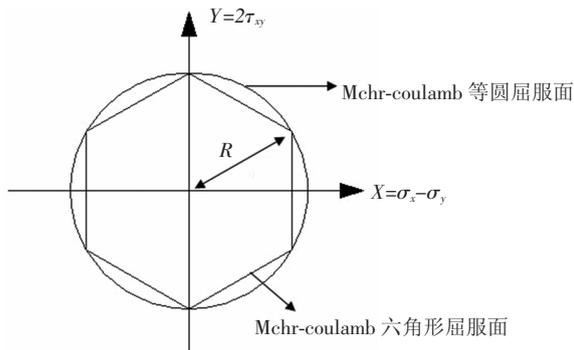


图 1 Mohr-Coulomb 六角形屈服面及等圆屈服面

若  $\pi$  平面上的屈服轨迹为圆形,则在程序的编制上更容易实现点,而且不存在尖顶处的数值计算问题. 本文采用文献 [12] 提出的 Mohr-Coulomb 等面积圆屈服准则代替传统的准则,该准则要求在  $\pi$  平面上的 Mohr-Coulomb 不等边六角形面积与其所表示的圆面积相等,对平面应变情况有

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0.$$

式中:  $I_1$ 、 $J_2$  分别为包含  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_{xy}$  的应力张量第 1 不变量和应力偏张量的第 2 不变量;  $\alpha$ 、 $k$  分别为与材料内摩擦角  $\phi$  和粘聚力  $c$  有关的常数, Mohr-Coulomb 等面积圆屈服准则时,有

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{2\sqrt{3} \pi (9 - \sin^2 \phi)}};$$

$$k = \frac{6\sqrt{3} \cos \phi}{\sqrt{2\sqrt{3} \pi (9 - \sin^2 \phi)}}.$$

### 2.2 基于上限定理的安定分析方法

假定作用在路面上的荷载为  $\lambda p(x, y)$ , 其中  $\lambda$  为安定乘子,因此本文的主要工作是要找到 1 个对应于结构安定性的安定荷载的临界安定乘子  $\lambda_c$ ,则临界安定荷载可以表述为

$$P_{SD} = \lambda_c P.$$

根据式(5)可得

$$\lambda_c \leq \frac{\int_V \sigma_{ij}^p e_{ij}^p dV}{\int_V (\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^p) e_{ij}^e dV}.$$

若  $\lambda < \lambda_c$ ,路面结构在重复荷载作用下首先表现为弹性阶段,并最终能够趋于安定,若  $\lambda > \lambda_c$ ,在重复荷载作用下,路面结构将产生永久应变至结构发生破坏.

作用在路表的荷载在  $x$  轴方向不会发生变化(车轮前进方向),任何作用机制对与  $x$  这个变量是无关系的,因此,在平面应变条件下,机动安定定理在滚动接触情况下的安定乘子主要由结构层厚度  $z$  决定<sup>[13]</sup>,如图 2 所示,于是式(7)可表述为

$$\lambda_c \leq \frac{c}{|\sigma_{xz}^e| - \sigma_{zz}^e \tan \phi}. \quad (8)$$

式中:在给定路面分析模型参数下弹性应力场  $\sigma_{xz}^e$ 、 $\sigma_{zz}^e$  可由 BISAR3.0 程序计算得出,  $c$ 、 $\phi$  分别为路面结构层材料的粘聚力和内摩擦角,于是可求出在考虑各种影响因素下的安定上限荷载乘子.

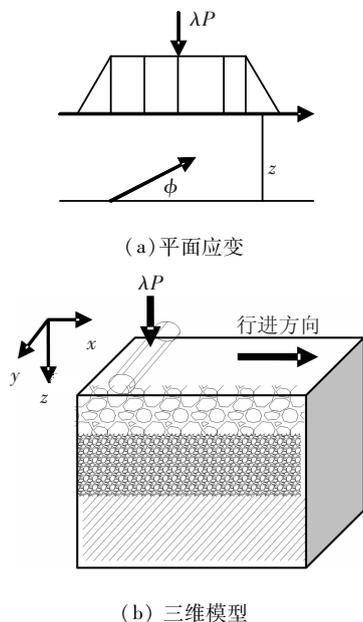


图 2 机动安定定理容许机制

## 3 路面结构安定计算分析

本文分别考虑荷载作用方式、路面厚度、路面材料内摩擦角和弹性模量比的变化对路面进行安定分析,计算分析各因素对路面结构安定荷载的影响.

### 3.1 路面作用荷载分布影响分析

本文分别分析单圆荷载和双圆荷载作用下的荷载分布对安定极限荷载的影响,并考虑不同结构材料属性的影响. 图示  $a/r$  比值反映的是路面作用荷载的分布形式,计算结果如图 3、4 所示. 从计算结果可以看出荷载分布形式对安定上限荷载在路面材料摩擦角较大时有显著的影响,单轮轴载下安定上限荷载随  $a/r$  增大而减小,双轮轴载下安定上限荷载随  $a/r$  增大而增大,材料摩擦角

较小时的安定极限荷载趋于稳定。

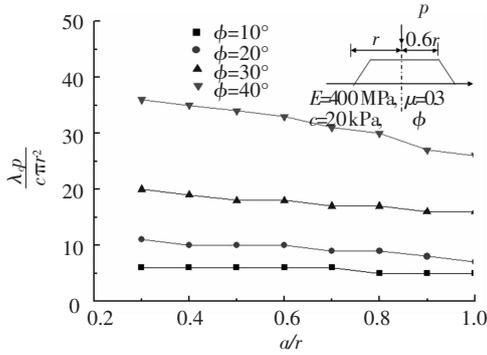


图3 路面荷载分布对安定极限的影响(单轮轴载)

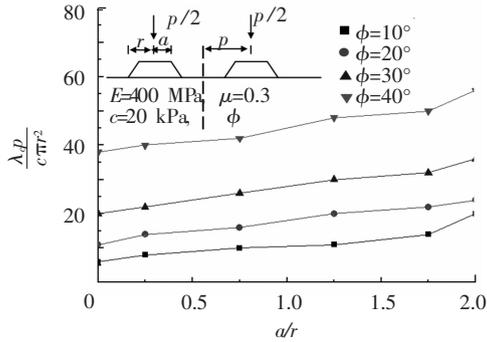


图4 路面荷载分布对安定极限的影响(双轮轴载)

### 3.2 路面结构层厚度影响分析

图5给出了不同结构层厚度情况下的路面结构安定极限荷载,图示结果表明路面结构的安定极限基本随内摩擦角增大而增大,内摩擦角 $\phi$ 在 $30^\circ$ 以下的安定极限波动幅值较小,在 $30^\circ$ 之上其安定极限随路面厚度增加到一定值后趋于稳定,因此内摩擦角变化对安定极限改变有限.在考虑经济性前提下改变表层厚度可明显提高路面承载力,因此从使路面结构趋于安定性角度来讲有1个合理的结构层厚度,本文分析的工况在 $h/r$ 为2.5时为最佳,在最佳经济性上满足了结构储备安定性要求.

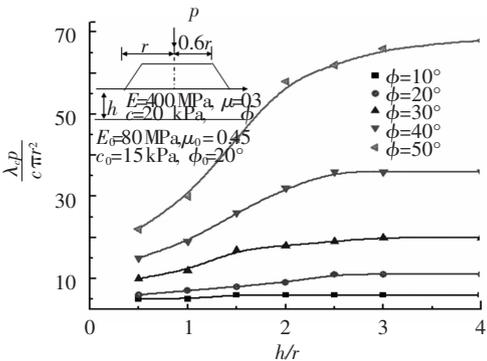


图5 路面表层厚度对安定极限的影响

### 3.3 路面材料内摩擦角影响分析

由图6可知,路面的安定极限在计算的3种不同结构层厚度工况下均随内摩擦角增大而增大,内摩擦角增大,结构承载力增大,由Koiter上限定

理知在结构承载力增大情况下,结构的残余应力场 $p_{ij}$ 与零外载平衡时的安定极限值也增大,但内摩擦角对安定极限的改变幅值不大.

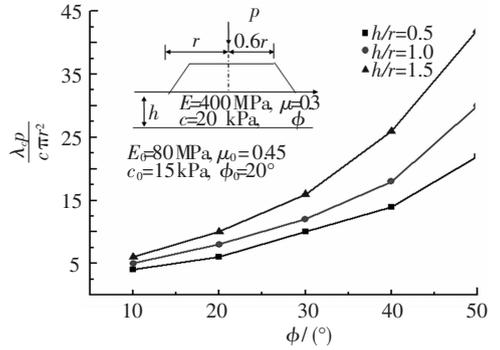


图6 内摩擦角对安定极限的影响

### 3.4 结构层模量比影响分析

图7为表层厚度 $h$ 和弹性模量比 $E/E_0$ 变化对安定极限的影响曲线,由图可知在层间模量比一定情况下,随着表层厚度的增大安定极限显著增加.这是因为表层直接承受外荷载的作用,在路面破坏模式不变的前提下,整个路面结构承载力将随表层厚度的增加而增加.在表层厚度一定情况下,两层路面结构模量比呈倍数增大,路面结构的安定极限线性减小,在 $E/E_0 = 1.0$ 时,安定极限可取得最大值.

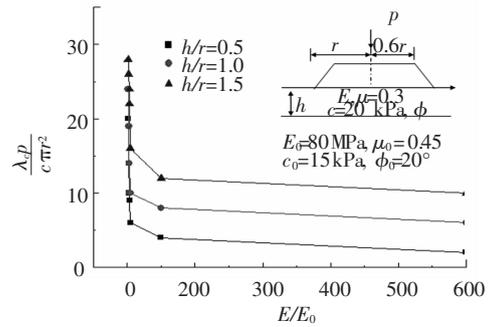


图7 面层和基层结构模量比对安定极限的影响

## 4 基于下限定理和上限定理极限荷载对比

路面结构在单调加载作用下,弹性极限 $p_{oe}$ 、塑性极限 $p_{op}$ 和下限定理求解安定极限 $p_{os}^{Mellan}$ 存在如下关系<sup>[9]</sup>:  $p_{os}^{Mellan} \subset [p_{oe}, p_{op}]$ .基于下限定理和上限定理的求解值都属于完全安定极限的近似值,本文对比分析考虑路面表层厚度和材料内摩擦角时的在不同求解方式的安定极限,如图8,9所示,由图可以看出基于强形式的机动安定理论基础上并结合BISAR求解的安定极限 $p_{os}^{Koiter}$ 要大于 $p_{os}^{Mellan}$ ,即弹性极限及塑性极限关系式: $p_{os}^{Koiter} > p_{os}^{Mellan} \subset [p_{oe}, p_{op}]$ ,这也符合安定定理对弹塑性结

构体在循环加载情况下的结构响应的描述,即由只产生弹性变形到伴随有残余应力场的永久变形,继续加载情况下到安定或增量破塑性破坏.因此,本文简述的基于机动安定定理的路面结构安定极限求解方法是可行的.

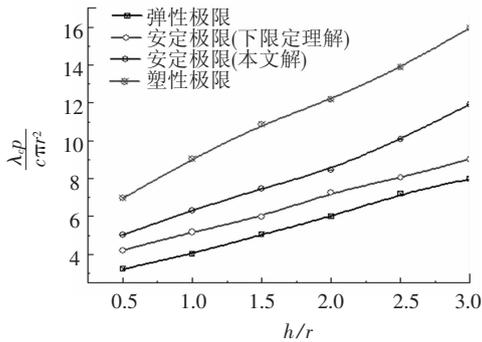


图8 不同求解方式下路面表层厚度对安定极限的影响

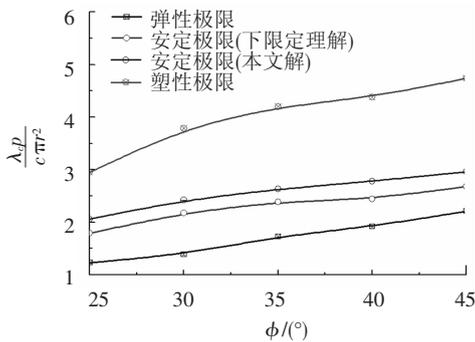


图9 不同求解方式下内摩擦角对安定极限的影响

## 5 结论

1)提出的基于机动安定上限定理对安定极限荷载的求解方法较静力安定定理,在计算方面有较多优势,结合 BISAR 路面计算软件,该方法可以避免常用的数学规划方法,具有计算效率高,可以应用于路面结构的安定分析.

2)路面材料的性质(主要考虑内摩擦角)、结构组成形式、表层结构厚度和荷载作用分布方式对结构的安定极限有显著影响,通过优化这些参数可改善路面结构承载能力,提高结构层整体性能,在路面的设计与分析时要综合考虑这些参数的影响.

3)对于受到重复性荷载作用的路面结构来说,Shakedown 原理与其设计有很好的相关性,但是基于 Shakedown 原理的模型要成为模拟路面长期行为的模型,以及路面设计参数之间量化关系还需进一步研究.

## 参考文献:

- [1] SHARP R W, BOOKER J R. Shakedown of pavements under moving surface loads[J]. Transportation Engineering, 1984,110(1):1-14.
- [2] ZHAO J D, SLOAN S W, LYAMIN A V, et al. Bounds for shakedown of cohesive-frictional materials under moving surface loads [J]. Solids and Structures, 2008, 45: 3290-3312.
- [3] COLLINS I F, CLIFFE P F. Shakedown in frictional frictional materials under moving surface loads[J]. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987,11:409-420.
- [4] BOULBIBANE M, COLLINS I F, WEICHERT D, et al. Shakedown analysis of anisotropic asphalt concrete pavements with clay subgrade[J]. Can Geotech, 2000,37: 882-889.
- [5] COLLINS I F, BOULBIBANE M. The application of shakedown theory to pavement design [J]. Metals and Materials, 1998, 4 (4): 822-837.
- [6] 刘信声,徐秉业.关于安定定理的推理[J].固体力学学报,1986,2:186-188.
- [7] 冯西桥,刘信声.影响弹塑性结构安定性的各种因素[J].力学进展,1993,23(5):214-218.
- [8] 孙阳,沈水龙.能量原理在路面结构安定分析中的应用研究[J].工程力学,2010, 27(11):88-91.
- [9] 张明焕,杨海元.结构安定分析方法研究[J].应用力学学报,1994,11(4):83-90.
- [10] HABIBALLAH T, CHAZALLON C. An elastoplastic model based on the shakedown concept for flexible pavements of unbound granular materials[J]. Numerical and Analytical Methods in Geotechnics,2005,29:577-596.
- [11] SHIAU S H, YU H S. Shakedown of three layered pavements [J]. Structural Failure and Plasticity, 2000;877-883.
- [12] 徐干成,郑颖人.岩土工程中屈服准则应用的研究[J].岩土工程学报,1990,12(2):93-99.
- [13] BOULBIBANE M, COLLINS I F. The calculation of shakedown loads for contact problems[J]. Key Engineering Materials, 2000,177:763-774.

(编辑 魏希柱)